高等学校教材

高等代数讲义

北京大学数学力学系
几何与代数教研室代数小组编

高等教育出版社

高等学校教材

高等代数讲义

北京大学数学力学系
几何与代数教研室代数小组编

高等教育出版社

本书是在北京大学数学力学系历年所用讲义的基础上写成的．內容包括行列式和线性方程组，多项式理论，线性代数，群论初步和环与域的概念．在讲述上力求由浅入深，由具体例子引出抽象概念，并注意了理论和计算的结合．每章后面都附有一定数量的习题．

本书可作为综合大学数学专业高等代数课程的教材，也可作师范院校数学专业高等代数课程的教学参考书．

高等代数讲义

北京大学数学力学系
几何与代数教研室代数小组编

北京市书刊出版业营业許可証出字第119号

高等教育出版社出版（北京景山东街）

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

統一书号K13010·1193　开本 850×1168 1/32　印张 12 9/16

字数 328,000　印数 0,001—4,500　定价(5)¥1.20

1965年7月第1版　1965年7月北京第1次印刷

前　言

自 1953 年以来，我们在高等代数的教学中就采用了自编的讲义。通过教学实践，讲义逐年都有程度不同的改变，其中有几次较大的改写。现在这本讲义就是在这个基础上，特别是在 1961—1963 年所用讲义的基础上直接改写而成的。因之，这本讲义只能认为是我们教学经验的一个小结，拿出来供大家参考。我们希望，这样能听到更多的批评与建议，有助于我们教学质量的提高。

这是一本直接用于教学的讲义，它的內容基本上不超出过去教学大纲的范围。在材料的安排以及证明方法的选择上，我们主要是从教学的需要来考虑的。讲义分四个部分，即线性方程组，多项式，线性代数以及基本概念介绍。对某些不一定要讲的內容以及不一定要做的习题，我们打上了“*”。因之，习题是否带有“*”不完全反映它的难易。为了使篇幅不致太大，讲义中大部分例子采用小字排印。

讲义中用了数学归纳法，但是沒有讲数学归纳法。这是考虑到，数学归纳法（特别是第二数学归纳法）可以在高等代数中讲，也可以在其它课程中讲，甚至于也可以只是简单地提一下而在用的过程中熟悉它。关于集合与映射（或变换）的一些定义，我们参照人民教育出版社出版的吳光磊等编“解析几何”（修订本）第九章 § 1，这里就不重讲了。

最后说明一下，这本讲义是长期的集体劳动的成果，由丁石孙同志做了最后的整理工作。

北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组

1964 年 2 月

目　录

第四部分 基本概念介紹

第一部分　綫性方程組

第一章　消元法与行列式

§1. 綫性方程組

解方程是代数中一个基本的问题，特别是在中学代数中，解方程占有重要的地位。因之这个问题是读者所熟悉的。譬如说，如果我们知道了一段导线的电阻 r，它的两端的电位差 v，那么通过这段导线的电流强度 i，就可以由关系式

$$ir = v \tag{1}$$

求出来。这就是通常所谓解一元一次方程的问题。在中学代数中，我们解过一元、二元、三元以至四元一次方程组。第一章和第二章主要地就是讨论一般的多元一次方程组，或称**綫性方程組**。

线性方程组的理论在数学中具有基本的重要性。我们知道方程反映了一些数量之间的一定的依赖关系，而线性方程反映的是数量之间的按比例变化的关系。例如，关系式（1）就表示了在电阻 r 固定的情况下，电流强度 i 与电位差 v 是按比例变化的。数量之间按比例变化的关系在自然现象和社会现象中是大量存在的(精确地说，它们是近似地按比例变化)。再举个例子。对一个工厂来说，产品的数量与所需要的原料、资金、劳动力和设备等的数量，在一定的范围內是成比例关系的。譬如说，某工厂用两种原料 A_1, A_2 来生产三种产品 B_1, B_2, B_3，而生产每一单位的产品 B_1, B_2, B_3 需要原料 A_1 分别为 a_{11}, a_{12}, a_{13} 个单位，原料 A_2 分别为 a_{21}, a_{22}, a_{23} 个单位。设 x_1, x_2, x_3 分别是产品 B_1, B_2, B_3 的产量。于是有方程

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=y_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=y_2, \end{cases} \tag{2}$$

其中 y_1, y_2 分别是 A_1, A_2 的需用量．这两个方程都是线性的，正是反映了原料与产品数量之间的按比例变化的关系．这是问题的一个方面．另一方面，虽然有些变量之间的关系不是线性的，但是在变量足够小的变化范围内，它们的变化关系可以近似地看作是线性的．这一点在数学分析中有详细的讨论．简单地说，对于函数

$$y=f(x),$$

在 $x=x_0$ 的附近，y 的改变量 Δy 差不多等于 $f'(x_0)\Delta x$, 这里 Δx 表示 x 的改变量．这就是说，Δy 近似地与 Δx 成比例关系．对于多元函数也有类似的结果．这两方面说明，线性关系在数量关系中是常见的，基本的，因而线性方程组具有基本的重要性．

对于线性方程组，我们不但要给出具体求解的方法，同时还要研究解对于系数的依赖关系，给出线性方程组有解的判别条件，等等．

最后我们指出，在三元的情况下，一个线性方程的几何图象是一个平面，解线性方程组的问题就相当于求一些平面的交的问题．因之．有关线性方程组的结论以及讨论问题的办法常常有着直接的几何意义．由于一般方程组的讨论与三元的情形的讨论有很多共同之处，所以充分利用几何直观是有好处的．

§2. 消元法

用消元法解线性方程组是大家熟悉的．虽然在中学代数中我们解的只是二元和三元的方程组，并且一般限于方程的个数与未知量的个数相等的情形，但是不难看出，消元法是具有一般性的．用消元法来解一般的线性方程组是这一节要讨论的问题．

首先我们引入必要的记号和名词．

所谓**一般的綫性方程組**就是指形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases} \tag{1}$$

的方程组，其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代表 n 个未知量，s 是方程的个数，$a_{ij}(i==1, 2, \cdots, s,\ j=1, 2, \cdots, n)$是方程组的系数，$b_j(j=1, 2, \cdots, s)$称为**常数项**．方程组中未知量的个数 n 与方程的个数 s 不一定相等．系数 a_{ij} 的第一个脚标 i 表示它在第 i 个方程，第二个脚标 j 表示它是 x_j 的系数．

所谓方程组(1)的一个**解**就是指由 n 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 组成的有序数组$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$，当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别用 $k_1, k_2\cdots, k_n$ 代入后，(1)中每个等式都变成恒等式．方程组(1)的解的全体称为它的**解集合**．解方程组实际上就是找出它全部的解，或者说，求出它的解集合．如果两个方程组有相同的解集合，它们就称为**同解的**．

消元法的基本内容是对一些方程进行运算，把其中一部分方程变成含较少未知量的方程①．从中学代数中我们知道，反复地应用消元法，最后常常能得到一个只含有一个未知量的方程，于是它的值就定出了，从而原方程组求解的问题就归结为一个含有较少未知量的方程组求解的问题．这样，一步一步地得出原方程组的全部解．

例如解方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1, \\ 4x_1+2x_2+5x_3=4, \\ 2x_1\qquad\quad+2x_3=6. \end{cases} \tag{2}$$

第二个方程减去第一个方程的 2 倍，第三个方程减去第一个方程，(2)就变成

① 确切地说，并不是把一些未知量"消去"，只是使这些未知量的系数变成零．

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1, \\ \qquad 4x_2-x_3=2, \\ \qquad\ x_2-x_3=5. \end{cases} \tag{3}$$

第二个方程减去第三个方程的 4 倍，把第二第三两个方程的次序互换，即得

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1, \\ \qquad x_2-x_3\ =5, \\ \qquad\quad 3x_3=-18. \end{cases} \tag{4}$$

这样，我们得出方程组的解$(9, -1, -6)$.

分析一下消元法，不难看出，它实际上是反复地对方程组进行变换，而变换也只是由以下三种基本的变换所构成：

1. 互换两个方程的位置；
2. 把一个方程的倍数加到另一个方程；
3. 用一非零的数乘某一个方程.

于此，我们给出

定义 1　变换 1, 2, 3 称为线性方程组的**初等变换**.

消元的过程就是反复施行初等变换的过程. 不难证明，初等变换总是把方程组变成**同解的方程组**. 下面对于初等变换 2 来证明这一点，其余的留给读者.

设原方程组为

$$\begin{cases} L_1 \\ \vdots \\ L_p \\ \vdots \\ L_q \\ \vdots \\ L_s, \end{cases} \tag{5}$$

这里用 $L_j(j=1, 2, \cdots, s)$代表方程．经过初等变换 2，得

$$\left\{\begin{array}{l} L_1 \\ \vdots \\ L_p \\ \vdots \\ L_q+kL_p \\ \vdots \\ L_s. \end{array}\right. \tag{6}$$

为了证明(5)与(6)是同解的，只要证明(5)的解一定是(6)的解，并且，(6)的解也一定是(5)的解．设$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$是(5)的一个解，这就是说，把它代入(5)，每个方程都成恒等式．因为恒等式的倍数、恒等式的和都是恒等式，所以它也是(6)的解．反过来，由

$$L_q \equiv (L_q+kL_p)-kL_p,$$

可以同样证明方程组(6)的解也是方程组(5)的解．

下面我们来说明，如何利用初等变换来解一般的线性方程组．

对于方程组(1)，首先检查 x_1 的系数．如果 x_1 的系数 $a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{s1}$ 全为零，那么方程组(1)对 x_1 没有任何限制，而方程组(1)就可以作为是 $x_2, \cdots, x_n$ 的方程组来解．如果 x_1 的系数不全为零，那么利用初等变换 1，可以设 $a_{11}\neq 0$．利用初等变换 2，分别地把第一个方程的 $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ 倍加到第 i 个方程$(i=2, \cdots, s)$．于是方程组(1)就变成

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \qquad\quad a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n=b'_2, \\ \qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\quad a'_{s2}x_2+\cdots+a'_{sn}x_n=b'_s, \end{array}\right. \tag{7}$$

其中 $a'_{ij}=a_{ij}-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}\cdot a_{1j},\quad i=2, \cdots, s,\quad j=2, \cdots, n.$

这样，解方程组(1)的问题就归结为解方程组

$$\begin{cases} a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n=b'_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_{s2}x_2+\cdots+a'_{sn}x_n=b'_s \end{cases} \tag{8}$$

的问题．显然，由(8)的一个解，根据(7)的第一个方程就定出 x_1 的值，也就是得出(1)的一个解；而且(7)的解显然都是(8)的解．因之，方程组(1)有解的充分必要条件为方程组(8)有解．

对(8)再施行上面的变换，并且一步步作下去，最后就得到一个阶梯形的方程组：

$$\begin{cases} c_{1j_1}x_{j_1}+c_{1,j_1+1}x_{j_1+1}+\cdots \qquad\qquad +c_{1n}x_n=d_1, \\ \qquad\qquad c_{2j_2}x_{j_2}+c_{2,j_2+1}x_{j_2+1}+\cdots+c_{2n}x_n=d_2, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rj_r}x_{j_r}+\cdots+c_{rn}x_n=d_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=0. \end{cases} \tag{9}$$

其中 $c_{ij_i}\neq 0,\quad 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_r\leqslant n.$

方程组(9)中“0＝0”是一些恒等式，去掉后并不改变方程组的解．

我们知道，(1)与(9)是同解的．根据上面的分析，方程组(9)是否有解就取决于其中最后一个方程

$$0=d_{r+1}$$

是否有解，换句话说，就取决于它是不是恒等式．这就给出了判别方程组(1)是否有解的一个方法：用初等变换把方程组(1)变成阶梯形方程组(9)．方程组(1)有解的充分必要条件为 $d_{r+1}=0$．

在有解的情形，我们来求解．为了讨论起来方便，把未知量重新编号，不妨设(9)为：

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+\cdots+c_{1n}x_n=d_1,\\
\qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+\cdots+c_{2n}x_n=d_2,\\
\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\qquad\qquad c_{rr}x_r+\cdots+c_{rn}x_n=d_r,\\
\qquad\qquad\qquad 0=0,\\
\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\\
\qquad\qquad\qquad 0=0,
\end{cases}
\tag{10}
$$

其中 $c_{ii}\neq 0,\ i=1,2,\cdots,r$。

分两个情形来看：如果 $r=n$，那么由最后一个方程开始，$x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1$ 的值就逐个地唯一地决定了。也就是说，方程组(10)有唯一的解。如果 $r<n$，那么(10)可以改写为

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r=d_1-c_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n,\\
\qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r=d_2-c_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n,\\
\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\qquad\qquad c_{rr}x_r=d_r-c_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n.
\end{cases}
\tag{11}
$$

由此可见，任给 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 一组值，就唯一地定出 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 的值，也就是定出方程组(11)的一个解。一般地，由(11)我们可以把 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 通过 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 表示出来。这样一组表达式称为方程组(10)的**一般解**，而 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 称为一组**自由未知量**。

例 解方程组

$$
\begin{cases}
2x_1-\ x_2+3x_3=1,\\
4x_1-2x_2+5x_3=4,\\
2x_1-\ x_2+4x_3=-1.
\end{cases}
\tag{12}
$$

用初等变换消去 x_1，得

$$
\begin{cases}
2x_1-x_2+3x_3=1,\\
\qquad\quad -\ x_3=2,\\
\qquad\qquad x_3=-2.
\end{cases}
$$

再化一次，得

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1, \\ \qquad\qquad x_3=-2. \end{cases} \tag{13}$$

改写一下，

$$\begin{cases} 2x_1+3x_3=1+x_2, \\ \qquad x_3=-2. \end{cases}$$

最后得

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{2}(7+x_2), \\ x_3=-2. \end{cases}$$

这就是方程组(12)的一般解，其中 x_2 是自由未知量。

以上就是用初等变换解一般线性方程组的全部过程。

如果线性方程组(1)中常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_s$ 全为 0，那么(1)就称为**齐次线性方程组**。显然，齐次线性方程组总是有解的，因为$(0, 0, \cdots, 0)$就是一个解，称作**零解**。对于齐次线性方程组，我们关心的问题常常是，它除去$(0, 0, \cdots, 0)$以外还有沒有其他的解，或者说，它有沒有**非零解**。根据以上的分析，我们有

定理 1 在齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases}$$

中，如果 $s<n$，那么它必有非零解。

証明 显然，方程组在化成阶梯形方程组之后，方程的个数不会超过原方程组的个数，即

$$r\leqslant s<n.$$

由 $r<n$ 得知，它的解不是唯一的，因而必有非零解。

最后我们给出以下定义：

定义 2 由 sn 个数排成的 s 行 n 列的表

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn}
\end{pmatrix} \tag{14}
$$

称为一个 $s\times n$ **矩阵**.

定义 3 由线性方程组(1)的系数排成的 $s\times n$ 矩阵(14)称为线性方程组(1)的**系数矩阵**,而 $s\times(n+1)$ 矩阵

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s
\end{pmatrix}
$$

称为方程组(1)的**增广矩阵**.

除去未知量的记号外，增广矩阵完全代表了方程组. 与线性方程组的初等变换相当,我们有

定义 1′ 所谓矩阵的初等行变换是指下列三种变换:

1. 互换两行的位置;
2. 把一行的倍数加到另一行(行与行相加就是对应元素分别相加);
3. 用一非零数乘某一行的各个数.

由于增广矩阵完全代表了线性方程组,所以在解方程组的过程中,可以直接对它的增广矩阵作初等变换,以代替方程组的变换.

关于系数矩阵与增广矩阵在线性方程组的研究中的作用，以后还要专门讨论.

§3. 排　列

虽然消元法是解线性方程组的一个有效方法，但是它还不能明白地给出方程组的解与系数的依赖关系. 我们知道，在二元和三元的情

形，利用二级和三级行列式，线性方程组的解可以通过系数表达出来。在一般的情形下也有相仿的公式。为此，我们首先要定义 n **级行列式**。为了定义 n 级行列式，还需要先讨论一下关于**排列**的一些性质。

定义 4　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n **级排列**。

例如，2 4 3 1 是一个四级排列，4 5 3 2 1 是一个 5 级排列。

n 级排列的全体所成的集合记为 P_n。不难算出 P_n 中排列的个数。设 $j_1\ j_2\ \cdots\ j_n$ 是一个 n 级排列，j_1 可以是 $1,2,\cdots,n$ 中的任一个，有 n 个可能的取法。在 j_1 取定之后，因为 j_2 不能与 j_1 相同，所以只有 $n-1$ 个可能的取法。同理，j_3 只有 $n-2$ 个可能的取法，其余类推。因之 n 级排列的总数是

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1.$$

我们记

$$1\cdot2\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n=n!,$$

读为"n **阶乘**"。例如：$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$，$5!=120$。$n!$随着 n 的增大迅速地增大。例如，$10!=3628800$。

$1\ 2\cdots n$ 当然也是一个 n 级排列，这个排列具有自然顺序，就是按递增的顺序排起来的；其它的排列都或多或少地破坏自然顺序。

定义 5　在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那末它们就称为一个**逆序**，一个排列中逆序的总数就称为这个排列的**逆序数**。

例如 2 4 3 1 中，2 1，4 3，4 1，3 1 是逆序，2 4 3 1 的逆序数就是 4。而 4 5 3 2 1 的逆序数是 9。

排列 $j_1\ j_2\ \cdots\ j_n$ 的逆序数记为

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n).$$

定义 6　逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**。

例如：2 4 3 1 是偶排列；4 5 3 2 1 是奇排列；$1\ 2\cdots n$ 的逆序

数是零，因之是偶排列.

应该指出，我们同样可以考虑由任意 n 个不同的自然数所组成的排列，一般地也称为 n 级排列. 对这样一般的 n 级排列，同样可以定义上面这些概念.

把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列. 这样一个变换称为一个**对换**. 例如，经过 1, 2 对换，排列 2 4 3 1 就变成了 1 4 3 2，排列 2 1 3 4 就变成了 1 2 3 4. 显然，如果连续施行两次相同的对换，那么排列就还原了. 由此得知，对换引起 P_n 的一个到自身上的 1—1 变换. 因为经过一个对换，n 级排列还是变成 n 级排列. 为了说明变换是 1—1 的，只需证明，经过一个对换之后，两个不同的排列还是变到不同的排列. 设 t_n 与 r_n 是两个不同的排列，经过对换之后，它们分别地变成 t_n' 与 r_n'，因为再作一次这个对换之后，t_n', r_n' 又分别变成 t_n 与 r_n, 如果 t_n' 与 r_n' 是相同的排列，那么，t_n 就应该与 r_n 相同，这与假设矛盾.

关于排列的奇偶性，我们有下面的基本事实.

定理 2 对换改变排列的奇偶性.

这就是说，经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

証明 先看一个特殊的情形，即对换的两个数在排列中是相邻的情形. 排列

$$\cdots\cdots j \quad k \cdots\cdots \tag{1}$$

经过 j, k 对换变成

$$\cdots\cdots k \quad j \cdots\cdots, \tag{2}$$

这里"……"表示那些不动的数. 显然，在排列(1), (2)中 j, k 与其他的数所成的逆序是一致的，不同的只是 j, k 的次序. 如果原来 j, k 组成逆序，那么经过对换，逆序数就减少一个；如果原来 j, k 不组成逆序，那么经过对换，逆序数就增加一个. 不论增加 1 还是减少 1，排列的逆序