

集合論與數學基礎

洪成完著

台灣中華書局印行

集合論與數學基礎

洪成完著

台灣中華書局印行

中華民國六十四年四月初版

集合論與數學基礎 (全一冊)

精裝一冊基本定價壹拾元正

(郵運滙費另加)

著者 洪 成 完

發行人 臺灣中華書局股份有限公司代表
熊 鈞 生

印刷者 臺灣中華書局印刷廠

發行處 臺灣中華書局

臺北市重慶南路一段九十四號
郵政劃撥帳戶：三九四二號
Chung Hwa Book Company, Ltd.
94, Chungking South Road, Section 1,
Taipei, Taiwan, Republic of China



set
theory
investigates
the nature of ultimate reality.

— Alfred Tarski

Philosophical clarification of a
concept does not usually consist in
reduction to another class of concepts but
consists in becoming aware of the properties of
of the concept.

— George Kreisel

Mathematics may be likened to a Promethean labor, full of
life, energy and great wonder, yet containing the seed of
an overwhelming self-doubt Number theory stands as a
shining beacon. If, as I hope does not happen too often,
our doubt begin to overpower us, we retreat back
into the safe confines of number theory until
refreshed, we ventured out again
into the unsafe ground of set
theory. This is our fate, to
live with doubts, to
pursue a subject
whose absoluteness
we

are not certain of, in short to realize the only "true" science is itself of the same mortal, perhaps empirical, nature as all other human undertakings.

— Paul J. Cohen

自序

本書不同於一般「急展式的」集合論與「點集論」的教本。本書的主要目標是：(1)應用古典邏輯之重要概念，並介紹古典邏輯在其無限論的後設論方面的結果（如完備定理）；(2)介紹一般數學中所能引用的，集合論之「基幹部分」；(3)介紹當代集合論與數學基礎中重要的事實與結果，使得讀者以及有志於攻研數理邏輯者對數學基礎在集合論和哲學這兩個層面的意涵有所瞭解，並且期能進一步做更深一層的探討。

本書要敘述嚴密，所以，預設讀者具有「大一邏輯」的初步知識——能活用邏輯符號與邏輯規則，並行對確的論證。當然，讀者能有「普通數學」的常識更好。大致說來，本書每一章節之細節都詳細地敘述並發展出來。這是為了減免讀者對已知的重大結果花太多的時間去重新思考證明。本書作者期望讀者很快就進入更深層的研究領域，專注於集合論與數學基礎中的原創問題。因此，本書分三大部分：I，II，III。各部分多多少少互有聯貫。在概念形成的層次與順序上來說，II預設I，III預設II（參見附圖）。

站在純數學〔分析，部分代數與幾何〕的立場來看，除了當代的「範疇理論」（‘category theory’）所涉及的架構與結果外，純粹數學的（許多）概念可用集合論之概念來「解說」。純粹數學所需要的集合論必須假定一個論域（universe）而這論域之所有元素都是集合；但這些集合是由空集合 0 依超限步驟形製而成。這種集合論稱為「純集合論」。在許多情況下，我們需要選擇公設（axiom of choice, AC）與／或其等價的原理。因此，針對純粹數學之需要而

言，只要一個純集合論再加 AC「就夠用了」。要在集合論及純數學領域外，應用集合論，或者使得集合論有廣泛應用的可能，我們必須再加一組特殊元符號（symbols for urelements）於純集合論。所謂「特殊元」是一種（抽象的，或具體的）對象，但這對象不是集合，也不含任何元素，又非空集合。純集合論中以 ZF 與 NBG，ZF+AC，NBG+AC 這些系統為多數數學家所預設的「大邏輯架構」而成為現代古典數學之制式語言（official language），此處「古典數學」指建基於古典邏輯的數學。因此，本書要介紹的主要系統是 ZF，ZFA，ZFC（ZFA 是 ZF 再附加一組特殊元符號；ZFC 為 ZF 再加 AC）。本書不介紹 NBG，NBG+AC，因為，在 ZF 內可引進「類」概念，並且相對於只含集合變元的命題（句式）而言，ZF 與 NBG 有相同的定理。關於 ZF 與 NBG（甚至其他集合論之比較），參見下列文獻中之討論：

[*1] A. A. Fränkel, Y. Bar-Hillel, A. Lévy: *Foundations of set theory* (with the collaboration of D. van Dalen), second revised edition, North-Holland, Amsterdam, 1973。

本書未介紹下列項目及有關的理論：

- (i) 實數系之集合形製（由有限序數形製實數）；
- (ii) 序型及其算術；
- (iii) 解析集理論（有關 analytic sets, projective sets 之理論）；
- (iv) 可測基數與大基數之「詳細」的新近理論。

因為這些項目之介紹，非增加本書之篇幅不可。

除每一章節所特別提到的（有關專題的）文獻，本書所涉及的文獻，請參閱上述參考書目[*1]中所開列，長達 41 頁的文獻。除了一些章節外，本書每一章節的定理均附有號碼。例如：定理 6.1.3 指本書第 6 章第 1 節的第三個定理。重要定理附有星號☆，有時附有發現者之英文姓名；定理號碼右上方註有 AC 者，表示這定理之證明用了 AC 與／或其等價原理。當定理證明完畢時，以圓號●附於結尾語句之後，以示定理「至此已證畢」。例如，定理 9.2.12^{AC}（König 引理），表示這定理之另一個名稱是 König 引理，而其證明要用到選擇公設 AC。在本書中，所有外國學人之姓名均未譯成中文（除 B. Russell（羅素）外），以便讀者查閱文獻。本書所附演習（*excursion problem*）含有討論與挑激這兩層面意義的習題。

* * * * *

自 1970 年起，作者在台大數學系與哲學系教授有關邏輯與集合論課程。本書第一章起至第二十章，是依據作者在台大數學系所授「集合論」、「集合論與其邏輯」、「公設化集合論」之教材，多次（至少六次）改寫而成。其中第十六章及最後一章（第二十一章）之部分題材，是根據「數學基礎研討會」中劉世超先生的資料改寫而來。那次研討會是由中央研究院數學研究的劉先生主持，在三年前舉行，雖然那次研討會總共只有三個人參與，但那次經驗促使作者擴大了本書原先的計劃。作者相信：要使「數學基礎與邏輯之研究」能在國內大專的數學、哲學（以及有關科）系紮基並發展出來，一定要由非「文科出身」的，受過數學和哲學專業訓練的教師與研究者寫出介於「教科書」（大學用書）與「research survey」之間的書——因為，至今為止，「文科教員」所撰寫的「邏輯教本」，很少能進入「邏輯之後設理論」之精粹部分。這本書是在這一境況下產生出來的。作者不只

希望本書有「拋磚引玉」的功用。

行政院國家科學委員會曾輔助本人專題研究。六十二年度專題研究「公設化集合論之反射原理與傳遞內在模型」，六十三年度專題研究「公設化集合論之可界定性問題」之能完成，得力於行政院國家科學委員會之輔助。因此，本人能專心撰寫本書第十五、十七、二十這三章之綜合指引（Survey），並已予出版，作者在此謹向行政院國家科學委員會致謝。

謝謝中華書局的熊鈍生先生、諸位董事和編輯，他們為學術的播種與開拓，出版了這本書。謝謝負責編排的郭宜生先生，他曾提供寶貴的意見，細心校對。本書若有缺失之處，作者願敬負其責而不敢辭。

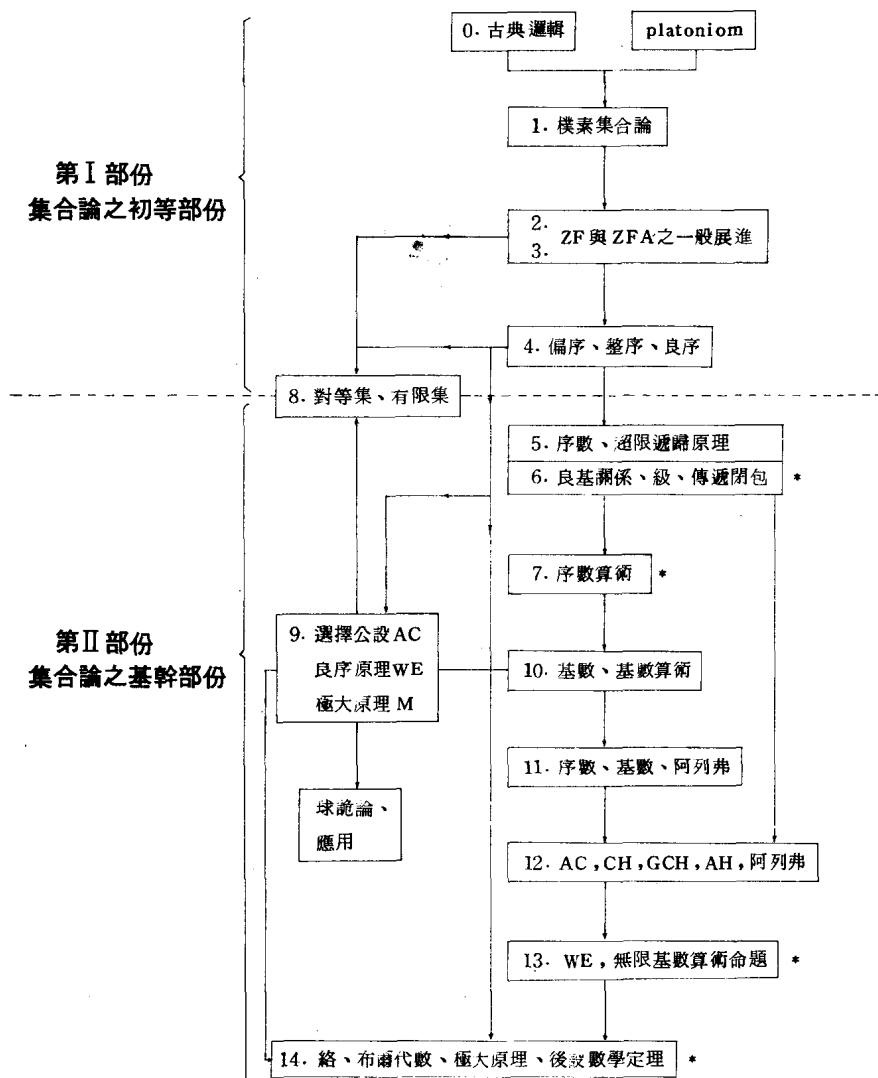
1974年6月1日

洪 成 完 於

國立台灣大學數學系及數學中心

集合論概念形成之順序

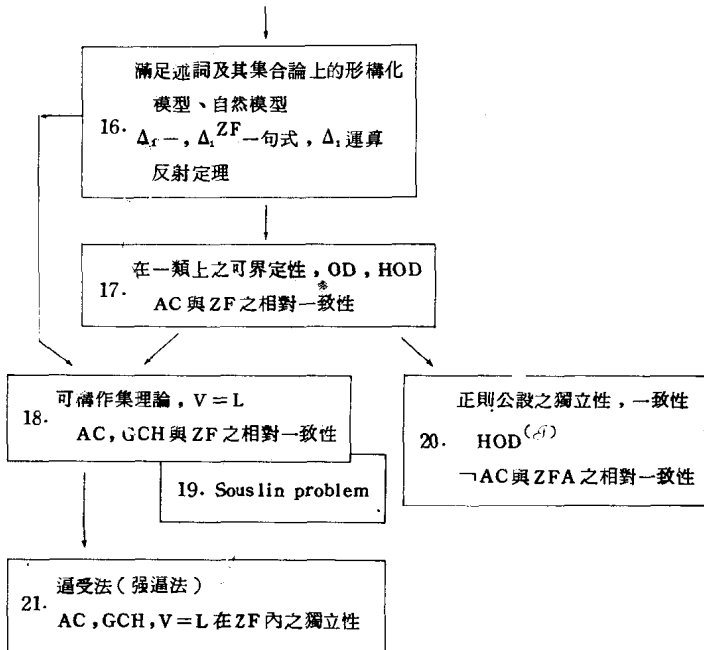
(號碼表示章次，箭頭表示概念形成之順序)



I, II 可當一年或一學期課程。

* 做為一學期課程或首次閱讀時，可略去部分。

第II部份「ZF之後設數學」導引



目 錄

第 〇 章 古典邏輯	1
第 一 章 樸素集合論	17
1-1 樸素的「集合」概念	17
1-2 羅素詭論之分析	21
1-3 一般公設方法需要語言層次的區分	24
第 二 章 集合論之展進	29
2-1 ZFA與ZF	29
2-2 類之引進	44
2-3 類演算 $\cap$, $\cup$, $-$	49
第 三 章 關係、函數、集簇	63
3-1 關係與映照（函數）	63
3-2 廣義的聯集運算與交集運算	82
3-3 在一雙元運算下閉合的集簇	90
第 四 章 偏序、整序、良序	97
4-1 關係結構	97
4-2 偏序與整序	102
4-3 良序	106
第 五 章 序數與超限遞歸原理	117
5-1 序數	117
5-2 繼元序數與極限序數	124
5-3 超限遞歸原理	129

第 六 章 良基關係、級、傳遞閉包	141
6-1 良基關係	141
6-2 級 (rank)	154
6-3 傳遞閉包 (transitive closure)	161
第 七 章 序數算數	171
7-1 序數加法	171
7-2 序數乘法	176
7-3 序數乘幕	181
7-4 序數之廣義加法與廣義乘法	185
7-5 序數之吸納	190
7-6 序數標準式定理	198
7-7 序數之極限、連續函數與正規函數	206
第 八 章 對等集與有限集	213
8-1 對等 (equipollence)	213
8-2 通常有限集、歸納有限集、Dedekind 有限集	222
8-3 可列集與 (通常的) 無限集	233
第 九 章 AC, WE, M	243
9-1 選擇公設 AC 在哲學及後設邏輯方面的評註	243
9-2 AC 之六種形式	246
9-3 良序原理 WE, 三分律 Trich, 映照定理 LTS	267
9-4 無限集與 AC	275
9-5 極大原理	279
附 錄 球「詭論」	297
(A) 轉軸群與 Hausdorff paradox	298
(B) 圍割對等 (equivalence by finite decomposition)	303

(C) Banach-Tarski paradoxes	307
第十章 基 數	313
10-1 導引	313
10-2 基數算術	320
10-3 $\aleph_0, c, 2^{\aleph_0}, f$	340
10-4 基數之廣義加法與廣義乘法	350
第十一章 序數、基數、阿列弗	363
11-1 第二級數類 (Second number class)	363
11-2 阿列弗及其初步的算術	372
11-3 序數之共端性	382
第十二章 AC, CH, GCH, AH	397
12-1 阿列弗, AC, CH, GCH, AH	397
12-2 AH, GCH 與阿列弗的計算	406
第十三章 良序原理與無限基數算術命題	415
13-1 Hartogs 阿列弗	415
13-2 WE 與無限基數之算術命題	420
第十四章 絡, 布爾代數, 初序語言之實現	437
14-1 絡 (lattice)	437
14-2 分配絡與布爾代數	444
14-3 布爾代數、初序語言之實現、與古典邏輯之完備性	462
14-4 Löwenheim-Skolem 定理與 AC	485
第十五章 公設化集合論 ZF 在後設數學方面的重要結果	495
第十六章 ZF 之標準傳遞模型	507
16-1 ZF 結構	507
16-2 Δ_0 - $\neg$, Δ_0^{ZF} - $\neg$, Δ_1 - $\neg$, Δ_1^{ZF} - $\neg$ 句式	530

4 集合論與數學基礎

16-3	M 絕對性	550
16-4	滿足述詞 $\models$ 之可界定性	554
16-5	ZF標準模型之表徵定理、反射定理	574
16-6	ZF之自然模型	585
第十七章	HOD	603
17-1	類 OD	604
17-2	類 OD之另一個定義	614
17-3	AC與ZF之相對一致性	623
第十八章	AC, GCH各與ZF之相對一致性	635
18-0	證明 $V = L$ 與 ZF 相對一致時所採取的策略	635
18-1	可構作集與可構作字	637
18-2	AC與ZF之相對一致性	651
18-3	GCH與ZF之相對一致性	656
18-4	傳遞內在模型方法的限制	667
第十九章	蘇斯令假設	677
第二十章	AC在ZFA與ZF°A內之獨立性	699
第二十一章	AC, GCH, $V=L$在ZF內之獨立性	715
21-1	Cohen extension $M[G]$	716
21-2	迫受關係 $\Vdash$ 之 Δ_1^{ZF} 可界定性	722
21-3	$M[G]$ 爲 ZFC 之標準傳遞可列模型	733
21-4	$V=L$ 在 ZFC 內之獨立性	740
21-5	逼受集之直積	747
21-6	AC 在 ZF 內之獨立性	752
21-7	$M[G]$ 與基數	762
21-8	GCH 在 ZF 內之獨立性	776

非終結的評斷.....	783
特別推荐的進修書目及文獻.....	791
符號表.....	795
中英術語對照表.....	811

第○章

古典邏輯

本書將常用一些邏輯符號、邏輯規則、邏輯定理與後設邏輯定理；這些都是古典邏輯（二值邏輯）之現成結果。換一句話說，我們所要研究的集合論是建基於古典邏輯的理論。

現在我們介紹古典邏輯之一個系統 L_0 。 L_0 是一個形式系統 (formal system)，這是集合論賴於建立的「邏輯架構」。這個形式系統是由①基設符號，②形成規則，③形變規則所構成。

① L_0 之基設符號

(i) 個體變元 (變元) : $v_0, v_1, \dots, v_n, \dots$ (可列個)

(ii) 述詞 : $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ (可列個)

此處對每個 i , P_i 是一個 $\lambda(i)$ 元述詞， $\lambda(i)$ 是一個正整數。

(iii) 邏輯符號 : $\rightarrow, \wedge, \vee, \neg, \forall, \exists, =$

(iv) 輔助符號 : $(,), [,]$

L_0 之基設符號以及由這些符號所引進的定義符號，通稱為 L_0 之語言 (language)。所列邏輯符 $\rightarrow, \wedge, \vee, \neg, \forall, \exists, =$ 各讀作：「如果，則」（「涵蘊」）；「且」（「與」）；「或者」；「非」；「對所有」（「對任何」，「給定」）；「有」（「存在」，「對某些」）；「等同於」。「或者」在此具有非排斥性的選言意義。

L_0 是本章所要提涉（討論）的對象語言 (object-language)。用來討論 L_0 的語言，稱為 L_0 的後設語言，這是一個含有數學符號，以及一些英文，某種邏輯規則的自然語言（中文）。如果有一個

2 集合論與數學基礎

(數學)理論 T 是我們所要研究的對象,則 T 可看做一個語言,稱之為「對象語言」;用來討論 T 的後設語言是讀者所能熟悉並且可溝通的語言。

在 L 。的後設語言內,我們以下列符號

$a, b, c, x, y, z, \dots$ (可附指標)

表示個體變元;以下列符號

$\varphi, \psi, \dots$

表示 L 。之句式(L 。-formulas)。

② L 。之形成規則

L 。之形成規則告訴我們:何種表式(以 L 。之語言所表示出來的表式)是一個述元(term)或是一個 L 。句式。

簡要地說: L 。之一個述元是用來名構(names)或描述(describes)個體的一種表式,或者,以一個名構或描述(name or description)替換那些出現於一個表式內的變元後所得到的一個名構或描述。一個個體是一個述元,一個個體變元也是一個述元。

定義. L 。之原子句式(L 。-atomic formulas)

1. 如果 x 與 y 都是述元,則 $x = y$ 是 L 。之原子句式。
2. 如果 P_1 是一個 $\lambda(i)$ 元述詞, $x_1, \dots, x_{\lambda(i)}$ 都是述元,則 $P_1(x_1, x_2, \dots, x_{\lambda(i)})$ 是 L 。之原子句式。
3. L 。之所有原子句式只由1與2所給。

定義. L 。句式(L 。-formulas)

1. L 。之任何原子句式是一個 L 。句式。
2. 如果 φ, ψ 都是 L 。句式, x 為變元,則下列表式都是