高等几何

学习指导书

刘增贤 门树慧 周国新 孙润霖 陈明华 编

高等教育出版社

★ GAODENG JIAOYU CHUBANSHE

高等几何

学习指导书

刘增贤 门树慧 周国新 孙润霖 陈明华 编

高等教育出版社

出版前言

本书是中学教师进修高等师范的卫星电视教材《高等几何》(梅向明、刘增贤、门树慧编,高等教育出版社,1989 年出版)的学习辅导书, 系根据原书的内容和要求,结合编者的教学经验写成. 其内容要求与章节顺序均与原书相同. 每章包括主要内容提要、目的和要求、例题分析、习题解答和自测题五部分.

本书可作为配合卫星电视教材《高等几何》(梅向明、刘增贤、门树慧编)的学习辅导书,也可作为中学教师进修高等师范,函授和业余大学的自学参考书,以及高等师范院校本科及专科数学专业师生的教学参考书

高等几何
学习指导书
刘增贤 门树慧 周国新 孙丽[illegible] 陈明华 编

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 8.75 字数 210 000
1989 年 3 月第 1 版 1989 年 3 月第 1 次印刷
印数 0001— 17 650
ISBN7-04-002027-0/O·730
定价 2.35 元

前　言

本书是为配合中学教师进修高等师范数学专业的高等几何课而编写的辅导书，也是根据我们多年讲授这门课及其习题课的材料整理而成的．为了帮助学员自学，我们把教材中每一章的主要内容都作了概括的总结，指出重点、难点及学习中应注意的地方，然后提出学习这一章的目的和要求，并把一些基本概念、基本公式以及这些知识的综合运用通过例题加以说明，特别是对一些解题技巧和容易混淆的概念和公式都选择有针对性的例题作了进一步分析．为了学员自己能检查学习效果，我们在每一章都附上了本章的习题答案或提示，并且在每章的最后又附上了一份自测题，希望学员独立完成后，再对照答案检查自己对这一章内容掌握的程度．

为了也能给使用其它教材的读者提供参考，我们把各章的基本内容和公式都列出来，在作习题答案时都印出了原题，并对一些题目给了几种不同的解法．因此，本书可以作为广大教师和同学自学“高等几何”课程的参改书．

本书虽然是根据中学教师进修高等师范专科的卫星电视教材《高等几何》(梅向明、刘增贤、门树慧编)编写的，但有些内容超出了培训初中教师的要求，作为培训初中教师来讲，以教材要求为准，超出教材内容的部分可以不看，对本科及进修高等师范的其它业余大学、函授等自学的同志，本书也可作为学习辅导书使用．

由于作者水平所限．不妥之处在所难免，衷心希望同志们给予批评指正．

编者

目　　录

第一章　仿射变换

一、主要内容

本章是在欧氏平面上先介绍点变换的概念，然后介绍正交变换和仿射变换的定义以及有关性质和代数表达式．本章内容是从欧氏几何到射影几何的桥樑，也就是说，一方面是从变换的观点来研究图形的性质，在欧氏几何基础上引出正交变换和仿射变换及其在变换下的不变性质和不变量；另一方面则是表现在研究方法上要兼用解析法和综合法，并且要用到解析几何及高等代数的有关知识．

本章内容主要分以下三部分，并以第三部分为重点内容．

1．点变换

在初等几何中研究图形性质时，经常通过图形的"运动"（叠合）来比较图形的大小，这实际上是使用了点变换的观点．

为了研究几何变换的有关内容，首先要研究点变换的概念，为此，先要研究集合之间映射的有关概念．

课本上首先分别介绍了两个集合 A、B 的"A 到 B 中的对应"、"A 到 B 上的对应"和"A 与 B 之间的一一对应"，即"设 A，B 是两个集合，如果有一个法则 φ，通过 φ 对于 A 的任何元素 a，能得到 B 中的一个唯一元素 b 与 a 对应，则 φ 叫做 A 到 B 中的一个对应"、"设有集合 A 到 B 中的对应 φ，如果在 φ 之下，B 的每个元素 b 都有原象，则对应 φ 叫做 A 到 B 上的对应"和"设有集合 A 到 B 上的对应 φ，如果在 φ 之下，A 的任何两个不同元素 a_1，a_2 的象也不同，则对应 φ 叫做 A 与 B 之间的一一对应"．应注意这三个定义之间

的区别和联系.

它们的联系是:"A 到 B 上的对应"是在"A 到 B 中的对应"的基础上定义的;"A 与 B 之间的一一对应"又建立在"A 到 B 上的对应"的基础上.

它们的区别是:定义"A 到 B 中的对应"强调"通过法则 φ 之后,原像有像";定义"A 到 B 上的对应"时,除满足"原像有像"外,还满足"B 中每个元都有原像";在"A 与 B 之间的一一对应"的定义中,则强调在以上两条件满足时,还要满足"原像不同时,像也不同".

当以上两个集合相同时,所定义的对应叫变换,如果集合是点集,则此变换为点变换. 在几何学中,我们主要研究平面(或空间)到它自身的变换.

应注意这里所指的一一变换是在整个平面上,也就是说,平面上所有的点都要作这种变换,而在初等几何中,我们往往只局限于两图形的对应点、对应边之间的关系.

课本接着介绍了变换的乘积、恒等变换的概念.

设 φ_1, φ_2 是集合 S 的两个变换,如果对于 S 中任何元素 x,先通过 φ_1,再通过 φ_2 而得到x',即$\bar{x}=\varphi_1(x)$,$x'=\varphi_2(\bar{x})$,则所得到的 S 的新变换 $\varphi: x'=\varphi(x)$ 叫已知变换 φ_1, φ_2 的乘积.

应注意变换的乘法不满足交换律,但满足结合律.

对于集合 S,使得 S 的任何元素都不变的变换叫做 S 的恒等变换,记为 e.

对于集合 S 的一个一一变换 $\varphi: x \to x'$, S 的另一个变换 φ^{-1}: $x' \to x$ 叫 φ 的逆变换.

平面上的平移、旋转、轴反射都是点变换的例子,它们都属于正交变换.

2. 正交变换

(1) 平面上的变换，如果保持任何两点间的距离不变，则这样的变换叫平面上的正交变换. 也就是说，当 $A\to A'$，$B\to B'$ 时，必然有 $|AB|=|A'B'|$，这就是正交变换的定义.

(2) 正交变换的性质：在正交变换下，线段变为与原线段等长的线段；单位向量变为单位向量；笛卡儿直角坐标系变为笛卡儿直角坐标系；矩形变为与原矩形全等的矩形. 以上性质都可由正交变换保持两点间的距离不变来证明；又由于点和直线经正交变换后仍分别为点和直线，共线点变为共线点，不共线点变为不共线点，所以正交变换具有同素性和保持结合性.

(3) 正交变换的代数表达式是

$$\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13},\\ y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23},\end{cases}\tag{A}$$

上式的系数必须满足正交条件

$$\begin{cases}a_{11}^2+a_{21}^2=1,\\ a_{12}^2+a_{22}^2=1,\\ a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0.\end{cases}\tag{B}$$

正交变换还可以有以下等价定义："在线性变换 (A) 中，如果系数方阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$满足条件 $A'A=E$，则此线性变换叫做正交变换，其中 A' 是 A 的转置方阵，E 是单位方阵". 这个等价定义要在证明了定理："满足正交条件(B)的线性变换(A) 必是正交变换(也就是证明可以保持平面上的任何两点间的距离不变)" 以后才能成立.

注意：由于 $AA'=A'A=E$，所以正交条件(B)还可以写为

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1, \\ a_{11}\, a_{21} + a_{12}\, a_{22} = 0. \end{cases}$$

（4）正交变换的特例.

平移:
$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \end{cases}$$

如图 1-1，$\boldsymbol{v}$ 与 $\overrightarrow{PP'}$ 平行，$\boldsymbol{v} = \{a, b\}$.

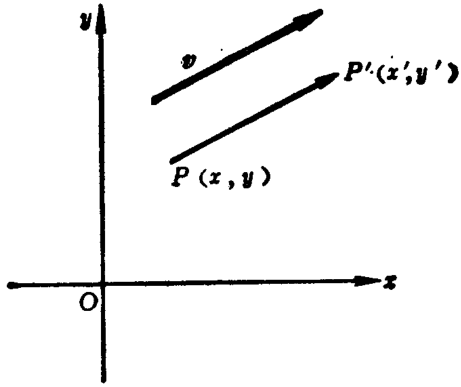

图 1-1

旋转(定点为原点，旋转角为 θ，如图 1-2)：

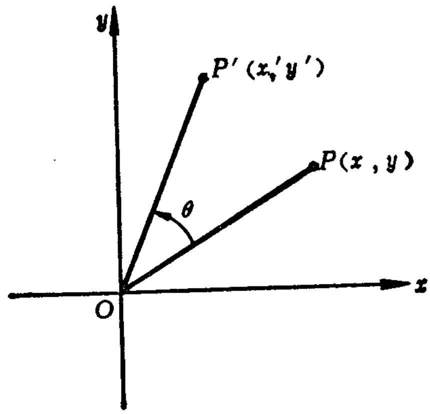

图 1-2

$$\begin{cases}x'=x\cos\theta-y\sin\theta,\\y'=x\sin\theta+y\cos\theta.\end{cases}$$

轴反射:

以 y 轴为反射轴的轴反射变换公式为(图 1-3)

$$\begin{cases}x'=-x,\\y'=y.\end{cases}$$

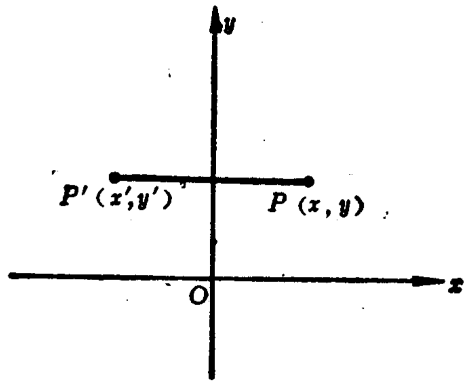

图 1-3

以 x 轴为反射轴的轴反射公式为(图 1-4)

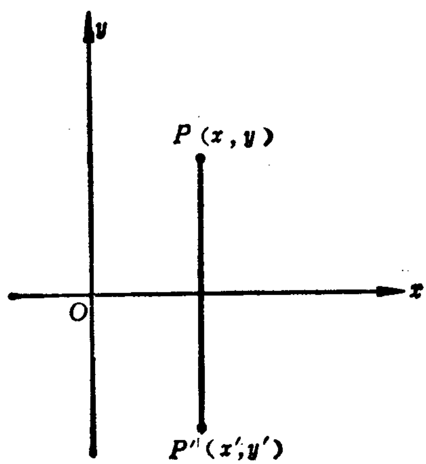

图 1-4

$$\begin{cases}x'=x,\\y'=-y.\end{cases}$$

第一种正交变换或是一个平移，或是一个旋转，或是一个旋转与一个平移的乘积；第二种正交变换是关于一条直线的轴反射，或是一个轴反射变换与第一种正交变换的乘积.

这里应注意，正交变换和坐标变换是不同的. 在解析几何中所谈的平移和旋转，是指图形位置不变，坐标系改变；在正交变换中的平移与旋转是指点变换，即坐标系不变，图形位置改变. 如下式

$$\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta+a,\\y=x'\sin\theta+y'\cos\theta+b,\end{cases}$$

可以有两种几何意义，由变换式中变量的几何意义来确定. 如果上式中(x,y)和(x',y')是对应点在同一坐标系下的坐标，则为正交变换，是点变换. 在高等几何中我们研究的是点变换. 如果上式中(x,y)与(x',y')分别表示同一点在两种坐标系里的坐标，则为坐标变换.

3. 仿射变换

仿射变换是本章的中心内容，主要有以下几个方面.

(1) 透视仿射对应、仿射对应和仿射变换的定义.

首先考虑同一平面内直线 a 到直线 a' 的平行射影，它建立了 a 到 a' 的点之间的一一对应，这是同一平面内的透视仿射对应.

再考虑空间二平面间的透视仿射对应，已知两个相交（或平行）的平面和一个投射方向，利用这个方向经过平行射影，可以建立两平面点之间的一一对应，叫两平面间的透视仿射对应.

仿射对应是平面 π 到 π' 的透视仿射对应推广成 $n+1$ 个平面间连续施行 n 次透视仿射对应而得到.

仿射变换是当 π 与 π' 是同一平面时的仿射对应.

以上定义中应注意，透视仿射对应与仿射对应的区别在于：透视仿射对应的对应点连线互相平行，而在一般情况下，仿射对应的对应点连线不平行. 如果 $\pi_1 /\!/ \pi_2 /\!/ \cdots /\!/ \pi_{n+1}$，或 π_1、π_2、π_3、…、π_{n+1} 共线，那么 π_1 到 π_{n+1} 之间的对应是透视仿射对应，对应点连线平行. 区别还在于：在二平面间的透视仿射对应中，二平面的交线是自对应直线；而二平面间的仿射对应一般没有自对应直线.

（2）透视仿射对应的不变性质、仿射对应的不变性质和仿射不变量.

透视仿射对应保持同素性、结合性、平行性和共线三点的单比不变，对应直线的交点在透视轴上(或说对应点连线平行).

仿射对应不保持对应点连线平行的性质，但保持同素性、结合性、平行性和共线三点单比不变，还有两平行线段之比是仿射不变量，一直线上两线段之比是仿射不变量(如图 1-5)，即

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'},\quad \frac{AB}{MN}=\frac{A'B'}{M'N'}.$$

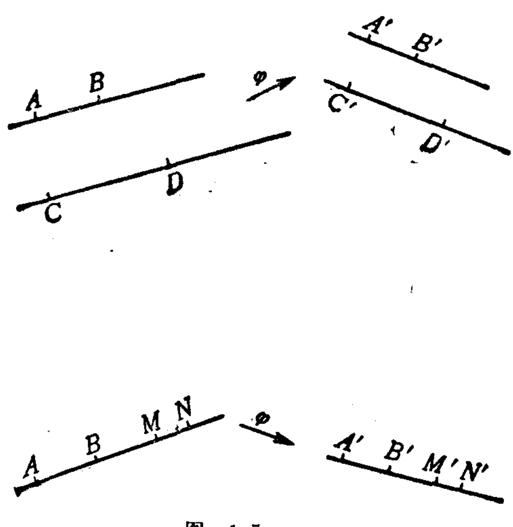

图 1-5

除此之外，任何两个三角形面积之比是仿射不变量，任何一对封闭图形的面积之比是仿射不变量.

应特别注意，在这些仿射不变量中，单比(仿射比)是基本不变量，它与解析几何中定比分点的定比的含义是不同的. 如图 1-6，P_1,P_2 是基点，P 为分点，于是单比$(P_1P_2P)=\frac{P_1P}{P_2P}$.

定比分点中的定比 λ 为

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}.$$

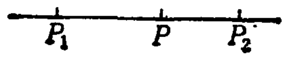

图 1-6

最后，应明确以下几个名词的含义和关系:

仿射性质: 图形经仿射对应或仿射变换后不改变的性质.

仿射不变量: 经过仿射对应或仿射变换后不改变的量.

(3) 仿射坐标系.

由于经过仿射变换后不保持距离和角度，所以直角坐标系经过仿射变换不再是直角坐标系，因此要引进仿射坐标系. 把直角坐标系加以推广，使两条坐标轴的交角任意，两轴上的单位非零向量换为任意非零向量 e_1,e_2. 对于平面上任一点 P，可唯一地表为

$$\overrightarrow{OP}=xe_1+ye_2,$$

那么 x, y 就叫 P 点的仿射坐标，从而平面上的点与有序数对(x,y)建立了一一对应关系.

所以仿射坐标可以理解为: 平面上两条规定了正方向的相交直线和直线外一点 E，就确定了一个仿射坐标系.

由此可见，笛氏坐标是仿射坐标的特例，仿射坐标系与笛氏坐标系的差别是仿射坐标系两轴上的单位长度可以不同，而笛氏坐标系两轴上的单位长度相同.

(4) 仿射变换的代数表达式.

仿射变换的代数表达式为

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}, \end{cases} \quad 其中 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

应注意，若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$，也就是在奇异情况下，将没有逆变换，即不成为一一对应了.

仿射变换的逆变换式为

$$\begin{cases} x = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1, \\ y = \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2, \end{cases} \quad 其中 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

在仿射变换的代数表达式中，要确定 a_{11}, a_{12}, a_{13}，a_{21}, a_{22}, a_{23} 这六个数即可确定这个变换，如果给出不共线的三对对应点，设 $(x_1, y_1) \to (x'_1, y'_1)$，$(x_2, y_2) \to (x'_2, y'_2)$，$(x_3, y_3) \to (x'_3, y'_3)$，代入仿射变换式后，列出六个方程

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}, \\ x'_2 = a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13}, \\ x'_3 = a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_{13}, \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} y'_1 = a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}, \\ y'_2 = a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{23}, \\ y'_3 = a_{21}x_3 + a_{22}y_3 + a_{23}. \end{cases}$$

由于三对对应点不同，所以上面两个线方程组的系数行列式不为零，可解出 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$，从而确定一个仿射变换.

由此可知，不共线的三对对应点决定唯一一个仿射变换.

(5) 仿射变换的三种等价定义

第一种定义：用透视仿射对应链.

第二种定义：用解析法定义.

平面上点之间的一个线性变换

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}, \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$