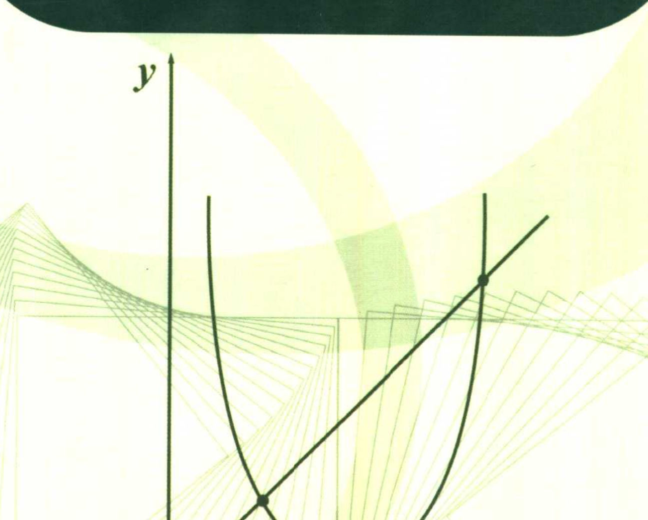
2004年

北京文都培训学校考研复习推荐用书

考研数学复习精编

KAOYAN SHUXUE FUXI JINGBIAN

理工类



主　编　蔡子华

副主编　韩於羹
曾祥金
樊启斌

石油工业出版社

北京文都培训学校考研复习推荐用书

2004年

考研数学

复习精编

(理工类)

主　编　蔡子华
副主编　韩於羹　曾祥金　樊启斌

石油工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

2004年考研数学复习精编．理工类/蔡子华主编．
北京:石油工业出版社,2003.3
ISBN 7-5021-4171-5

Ⅰ.2…
Ⅱ.蔡…
Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ.0132

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第009715号

石油工业出版社出版发行
发行部电话:(010)62095934
(100011 北京安定门外安华里二区一号楼)
北京国民灰色系统科学研究院计算机中心排版
石油工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 32.75印张 742千字 印1—5000
2003年3月北京第1版 2003年3月北京第1次印刷
ISBN 7-5021-4171-5/O·10
定价:42.80元

前　言

全国硕士生入学统一考试是我国选拔硕士研究生的主要途径，而数学统考在此统考中占有极其重要的地位。为了使数学统考更加完备和科学，国家教育部对数学考试大纲进行了重大修订，对试卷重新作了分类，对考试内容的深度和广度作了较大的调整。这些变化对考生提出了更高的要求。因此，考生们迫切需要一本既符合《考试大纲》的要求，又能引导自己深刻理解《考试大纲》的精神，进行全面、系统复习的指导书。本书即为此而编写。

本书作者均长期从事高校数学教学工作，曾参加过多种层次的考试命题，并多年参与研究生入学数学考试的辅导及阅卷工作。在此过程中，对《考试大纲》和历年的试卷进行过深入的研究，积累了丰富的经验，并将这些经验用到考研辅导班中，使考生在最短的时间内获得最大的收效，因此受到全国考生的广泛欢迎。

本书的特点是：

一、完全参照《考试大纲》编写，无超过考试大纲要求的内容。

二、完全涵盖了《考试大纲》规定的内容，突出了对数学基本概念、基本原理的理解和对基本解题方法的训练，以便提高考生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力及空间想象能力。

三、通过对典型例题的分析，引导考生深入理解数学的基本概念及它们的内在联系，便于考生突破难点，提高解答难题的能力。

四、针对考生难于将数学知识应用到实践中去的现状，本书编有大量的应用题，引导考生掌握建立数学模型的基本方法，提高考生解决实际问题的能力。

五、对各类重要类型题，本书都作了系统归纳，并给出了一些独特解法，便于考生举一反三，融会贯通。

六、本书所选例题具有广泛的代表性，难度和历年试题相当，力求摒弃偏题与怪题。

七、本书每章都附有大量练习题，并在书后给出答案，便于考生检验解题是否正确。

八、为了沟通各学科知识之间的联系，本书的第四部分给出了综合题解，引导考生学会运用数学知识求解综合题。

在本书的编写过程中，王嘉、赵伟、李涛、王文倩、李玉玲、陶伟宏、程进、李荫、刘书刚、黄瑶、崔卫国、叶传平、郎明、李栋、彭建森、万飞、马刚、袁泉、贾群、陈燕、徐涛、周云、张波、谢丽、宛宏斌、郭卫烈等同志做了大量有益工作，在此一并表示感谢。由于时间仓促，错误在所难免，望专家、读者批评指正。

作　者

2003 年 2 月

目　　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　概率与数理统计

第四部分　综合题解

第一部分　高等数学

第一章　函数 极限 连续性

一　内容提要

(一) 主要内容

1. 有关函数的基础知识

(1) 函数、反函数、复合函数的概念;

(2) 各基本初等函数的图像、性质,初等函数的概念;

(3) 函数的特性.

① 有界性:

a. 定义:对一切 $x \in D$,存在正数 M,使 $|f(x)| \leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 D 上有界.

b. 应注意的问题:函数 $y = f(x)$ 在 D 上有界,其导函数在 D 上不一定有界,如 $y = \sqrt[3]{x}$ 在 $(-1,1)$ 上有界,但 $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ 在 $(-1,1)$ 上无界.

② 单调性:定义

③ 奇偶性:

a. 定义:$f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,若对一切 $x \in D$,$f(-x) = f(x)$,则 $f(x)$ 为偶函数;$f(-x) = -f(x)$,则 $f(x)$ 为奇函数.

b. 性质:奇 + 奇 = 奇,偶 + 偶 = 偶,奇 · 偶 = 奇,偶 · 偶 = 偶,奇 · 奇 = 偶.

c. 导函数与原函数的奇偶性:

可导偶函数的导函数是奇函数;

可导奇函数的导函数为偶函数;

可积奇函数的原函数是偶函数;

可积偶函数的原函数中有一个是奇函数.

④ 周期性:

a. 定义

b. 导函数、原函数的周期性:可导周期函数的导函数是周期函数;可积周期函数的原函数不一定是周期函数.

2. 极限的概念及运算

(1) 各类极限的定义;

(2) $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 极限存在的充要条件;

(3) 极限的四则运算法则.

3. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小的定义;

(2) 无穷小的运算性质;

(3) 无穷小的比较;

(4) 极限与无穷小的关系;

(5) 无穷大的定义;

(6) 无穷小与无穷大的关系.

4. 极限存在的准则

(1) 夹逼定理;

(2) 单调有界数列必存在极限.

5. 有关极限的定理

(1) 惟一性;

(2) 有界性;

(3) 保号性.

6. 函数的连续性

(1) 函数在 x_0 点连续的定义;

(2) 函数的间断点的分类

$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点(左、右极限都存在)}\begin{cases}\text{可在间断点(左极限} = \text{右极限)}\\ \text{跳跃间断点(左极限} \neq \text{右极限)}\end{cases}\\ \text{第二类间断点(除第一类间断点外的间断点)}\end{cases}$$

(3) 连续函数的运算性质;

(4) 初等函数的连续性;

(5) 在闭区间上连续函数的性质:

① 最大、最小值定理;

② 介值定理及零点定理;

③ 在闭区间$[a,b]$上连续的函数必取到最大、最小值之间的任何数值.

(二) 重要公式

1. 极限的四则运算法则

若 $\lim f(x) = A \qquad \lim g(x) = B$

则 $\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$

$\lim f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$

$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} (B \neq 0)$

$\lim[f(x)]^n = A^n$

2. 重要结论

(1) $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$

(2) $\lim\limits_{u \to 0}(1 + u)^{\frac{1}{u}} = \mathrm{e}$

(3) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(4) $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0 \quad (|q| < 1)$

3. 常用的等价无穷小

当 $u\to 0$ 时：$\sin u\sim u$，$e^u-1\sim u$，$\ln(1+u)\sim u$，$\tan u\sim u$，$1-\cos u\sim\frac{u^2}{2}$，$\arcsin u\sim u$，$\arctan u\sim u$.

二　重　点

(1) 函数的概念与特性

(2) 极限的概念

(3) 无穷小的定义、运算性质及无穷小的比较

(4) 极限存在的准则；两个重要极限

(5) 极限的求法

(6) 函数连续性的定义及间断点的分类

(7) 在闭区间上连续函数的性质

三　典型例题解析

(一) 函数

【例 1】 判断下列各对函数是否相同：

(1) $y=\sin(\arcsin x)$ 与 $y=x$

(2) $y=\sqrt{\sin^2 x}$ 与 $y=\sin x$

(3) $y=\cos^2 t+\sin^2 t+t$ 与 $y=1+x$

分析：判断两个函数是否相同，要看(1) 定义域是否相同；(2) 对应法则是否相同. 所谓对应法则相同，即对定义域内任取一自变量的值，两个函数的函数值相等.

解 (1) 是一对不相同的函数. 因前者定义域为 $|x|\leqslant 1$，而后者为 $x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) 是一对不相同的函数. 因为对应法则不相同. 如在定义域内取 $x=\frac{5}{4}\pi$，前者的函数值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，而后者的函数值为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) 是一对相同的函数。因它们的定义域都是全体实数，且对任意实数 t，$\cos^2 t+\sin^2 t=1$，$\therefore$ 前者实为 $y=1+t$，与后者的对应法则相同. 至于用何字母表示自变量，与函数是否相同无关.

【例 2】 求函数 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数.

解
$$y^3=x+\sqrt{1+x^2}+3\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}\right)^2\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}+3\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}\left(\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}\right)^2+x-\sqrt{1+x^2}$$

$$= 2x + 3\sqrt[3]{(x+\sqrt{1+x^2})(x-\sqrt{1+x^2})} \cdot (\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}})$$

$$= 2x + 3(-1)(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}})$$

$$= 2x - 3y$$

$\therefore\ x = \frac{1}{2}(y^3 + 3y)$　即所求反函数为 $y = \frac{1}{2}(x^3 + 3x)$.

【例 3】 已知 $f(\sin\frac{x}{2}) = 1 + \cos x$,求 $f(\cos\frac{x}{2})$.

解 $f(\sin\frac{x}{2}) = 1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} = 2(1 - \sin^2\frac{x}{2})$

设 $u = \sin\frac{x}{2}$,则 $f(u) = 2(1 - u^2)$

$\therefore\ f(\cos\frac{x}{2}) = 2 - 2\cos^2\frac{x}{2} = 2 - (1 + \cos x) = 1 - \cos x$

【例 4】 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}$,且 $x \neq 0$,求 $f[\frac{1}{f(x)}]$ 及 $f[f(x)]$.

解 $\frac{1}{f(x)} = \frac{x-1}{x}$

则 $$f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x} - 1} = 1 - x.$$

$$f[f(x)] = f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = x.$$

【例 5】 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| \leqslant 1 \\ x & |x| > 1 \end{cases}$　$g(x)\begin{cases} 2 - x^2 & |x| \leqslant 1 \\ 2 & |x| > 1 \end{cases}$　求 $f[g(x)]$.

解 $$f[g(x)] = \begin{cases} [g(x)]^2 & |g(x)| \leqslant 1 \\ g(x) & |g(x)| > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (2 - x^2)^2 & |2 - x^2| \leqslant 1 \text{且} |x| \leqslant 1 \\ 2 - x^2 & |2 - x^2| > 1 \text{且} |x| \leqslant 1 \\ 2 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & |x| = 1 \\ 2 - x^2 & |x| < 1 \\ 2 & |x| > 1 \end{cases}$$

【例 6】 设 $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{3}{2}x^2 & -1 \leqslant x < 0 \\ \frac{xe^x}{(e^x + 1)^2} & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$　求 $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 的表达式.

解 当 $-1 \leqslant x < 0$ 时

$$F(x) = \int_{-1}^{x}(2t + \frac{3}{2}t^2)\mathrm{d}t = \left(t^2 + \frac{t^3}{2}\right)\Big|_{-1}^{x} = \frac{x^3}{2} + x^2 - \frac{1}{2}.$$

当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时

$$F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0} f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

$$=(t^2+\frac{t^3}{2})\Big|_{-1}^{0}+\int_0^x \frac{t\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t+1)^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2}-\int_0^x t\mathrm{d}(\frac{1}{\mathrm{e}^t+1})=-\frac{1}{2}-\frac{t}{\mathrm{e}^t+1}\Big|_0^x+\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}+\int_0^x \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t(\mathrm{e}^t+1)}$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}+\ln\frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t+1}\Big|_0^x=-\frac{1}{2}-\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}+\ln\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}+\ln 2$$

$$\therefore\quad F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{2}+x^2-\dfrac{1}{2} & -1\leqslant x<0\\[2mm] \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}-\ln(\mathrm{e}^x+1)+\ln 2-\dfrac{1}{2} & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

(二) 极限的求法

1. 初等变换

【例 7】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}]$

解 $\because \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$$\therefore \text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}$$

【例 8】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})\quad |a|<1$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})}{1-a}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}\qquad(\because |a|<1,\lim_{n\to\infty} a^{2^{n+1}}=0)$$

$$=\frac{1}{1-a}$$

2. 重要极限

【例 9】 求 $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1-\dfrac{n^2}{m^2}\right)^m$

解 原式 $=\lim\limits_{m\to\infty}\left(1-\dfrac{n^2}{m^2}\right)^{-\frac{m^2}{n^2}\cdot(-\frac{n^2}{m^2})\cdot m}$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{n^2}{m^2}\right)^{-\frac{m^2}{n^2}(-\frac{n^2}{m})}$$

$$= e^0 = 1$$

【例 10】 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+C}{x-C}\right)^x = \int_{-\infty}^{C} te^{2t}\mathrm{d}t$，求 C.

解 左边 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+C}{x-C}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+\dfrac{C}{x})^x}{(1-\dfrac{C}{x})^x} = \dfrac{e^C}{e^{-C}} = e^{2C}$

$$右边 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{C} t\mathrm{d}e^{2t} = \frac{1}{2}[te^{2t}\Big|_{-\infty}^{C} - \int_{-\infty}^{C} e^{2t}\mathrm{d}t]$$

$$= \frac{1}{2}Ce^{2C} - \frac{1}{4}e^{2C} = e^{2C}(\frac{C}{2} - \frac{1}{4})$$

由 $e^{2C} = e^{2C}(\dfrac{C}{2} - \dfrac{1}{4})$ 得 $C = \dfrac{5}{2}$

3. 无穷小的运算性质

【例 11】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x})$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)$

$$= -2\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

$\because$ 当 $x\to+\infty$ 时，$\sin\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$ 为无穷小量，且 $\left|\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right| \leqslant 1$ 有界

$\therefore$ 原式 $= 0$

4. 无穷小量分出法

【例 12】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{20}(3x+4)^{30}}{(4x-3)^{50}}$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2-\dfrac{1}{x})^{20}(3+\dfrac{4}{x})^{30}}{(4-\dfrac{3}{x})^{50}} = \dfrac{2^{20}\cdot 3^{30}}{4^{50}} = \dfrac{3^{30}}{4^{40}}$

【例 13】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln(\sqrt{n^2+a^2}-n)}$

解 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln\dfrac{(\sqrt{n^2+a^2}-n)(\sqrt{n^2+a^2}+n)}{\sqrt{n^2+a^2}+n}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln a^2 - \ln n - \ln\left[1+\sqrt{1+(\frac{a}{n})^2}\right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{\ln a^2}{\ln n} - 1 - \dfrac{\ln\sqrt{1+(\frac{a}{n})^2}+1}{\ln n}} = -1$$

注：对 $x\to\infty$ 或 $n\to\infty$ 时的 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式应首先采用无穷小量分出法.

5. 罗必塔法则

【例 14】 求$\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$

分析：当 $x\to0^+$ 时，$(\cos\sqrt{x})\to1$，而$\dfrac{1}{x}\to+\infty$，故原式是 1^∞ 未定式，可用重要极限或罗必塔法则求解.

解法 1
$$\lim_{x\to0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\left[1-(1-\cos\sqrt{x})\right]^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\left(1-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}}$$
$$=\exp\lim_{x\to0^+}\frac{-2\sin^2\dfrac{\sqrt{x}}{2}}{\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^2\cdot4}=e^{-\frac{1}{2}}$$

解法 2 设 $y=\sqrt{x}$，则

$$\text{原式}=\lim_{y\to0^+}(\cos y)^{1/y^2}$$
$$=\exp\lim_{y\to0^+}\frac{\ln(\cos y)}{y^2}=\exp\lim_{y\to0^+}\frac{-(\sin y/\cos y)}{2y}$$
$$=\exp\lim_{y\to0^+}\left(-\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{1}{2\cos y}\right)=e^{-\frac{1}{2}}$$

【例 15】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)}-x\right]$

解
$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})(1+\frac{c}{x})}-1}{\frac{1}{x}}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}\left[(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})(1+\frac{c}{x})\right]^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{[(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})(1+\frac{c}{x})]'}{(1/x)'}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\left[a(1+\frac{b}{x})(1+\frac{c}{x})+b(1+\frac{c}{x})(1+\frac{a}{x})+c(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})\right]$$
$$=\frac{1}{3}(a+b+c)$$

【例 16】 设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0$，$f'(0)\neq0$，求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$.

解
$$\text{原式}\xlongequal{(\frac{0}{0})}\lim_{x\to0}\frac{f(x)\cdot2x}{2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^2f(x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2f(x)}{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)}{3f(x)+xf'(x)} = \infty$$

6. 等价无穷小替换

【例 17】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^3(2x)}{x^4}\left(1-\dfrac{x}{e^x-1}\right)$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^3(2x)}{x^3}\cdot\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x)^3}{x^3}\cdot\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$ $[x\to 0$ 时, $\tan(2x)\sim 2x, e^x-1\sim x]$

$= 8\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}$

$= 8\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x} = 4$

【例 18】 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\arctan x}$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x^x(e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}-1)}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}(-x^x)\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x^3}$

$= -\exp\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{1/x}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln[1+(\dfrac{\sin x}{x}-1)]}{x^2}$

$= -\exp\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1/x}{-(1/x^2)}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{\sin x}{x}-1}{x^2}$

$= -e^0\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x-x}{x^3} = -\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}$

$= -\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-(x^2/2)}{3x^2} = \dfrac{1}{6}$

7. 用泰勒公式展开

【例 19】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

解 $\because$ $e^x = 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)$ $\sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$

$\therefore$ 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[1+x+\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)][x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)]-x(1+x)}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^3}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x^3} = \dfrac{1}{3}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^3)}{x^3} = \dfrac{1}{3}$

注: 用泰勒公式展开时的阶数要依确定的幂指数展开,如此例中要依分母将分子展开到 3 阶为止.

8. 利用导数的定义

【例 20】 设 $f(u)$ 为可微函数,且 $f(0)=0$,求

$$\lim_{t\to 0}\frac{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi t^3}$$

解 原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t rf(r)\mathrm{d}r}{\pi t^3}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\pi tf(t)}{3\pi t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2}{3}\cdot\frac{[f(t)-f(0)]}{t}$$

$$=\frac{2}{3}f'(0)$$

9. 利用中值定理

【例 21】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-\sin x}{x^3}$

解 $\because$ $\sin(\sin x)-\sin x=(\sin x-x)\cos[\theta(x-\sin x)+x]$ $(0<\theta<1)$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos[\theta(x-\sin x)+x](\sin x-x)}{x^3}$

$$=\cos 0\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}=-\frac{1}{6}$$

10. 用准则

【例 22】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3+1}+\dfrac{2^2}{n^3+2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n}\right)$

解 设 $x_n=\dfrac{1^2}{n^3+1}+\dfrac{2^2}{n^3+2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n}$

则 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}i^2}{n^3+n}\leqslant x_n\leqslant\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}i^2}{n^3+1}$

$\therefore$ $\dfrac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+n}\leqslant x_n\leqslant\dfrac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+1}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+1}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{3}$

【例 23】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^{2n}}{1+x}\mathrm{d}x$

解 $\because$ $0\leqslant\int_0^1\dfrac{x^{2n}}{1+x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2n+1}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}0=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1}=0$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^{2n}}{1+x}\mathrm{d}x=0$