

2004年



北京文都培训学校考研复习推荐用书

考研数学

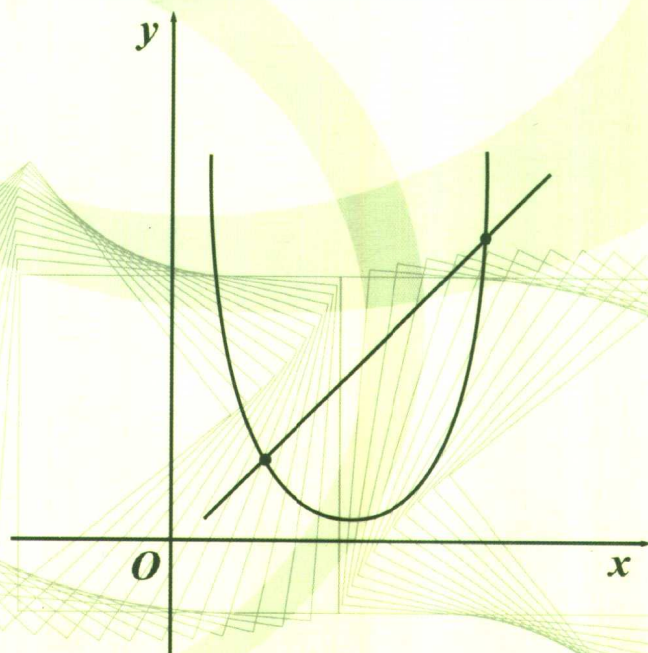
KAOYAN SHUXUE FUXI JINGBIAN

复习精编

理工类

主 编 蔡子华
副主编 韩於羹
曾祥金
樊启斌

石油工业出版社



北京文都培训学校考研复习推荐用书

2004年

考研数学

复习精编

(理工类)

主 编 蔡子华

副主编 韩於葵 曾祥金 樊启斌

石油工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

2004 年考研数学复习精编. 理工类/蔡子华主编.
北京:石油工业出版社,2003.3

ISBN 7-5021-4171-5

I. 2...

II. 蔡...

III. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料

IV. 0132

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 009715 号

石油工业出版社出版发行

发行部电话:(010)62095934

(100011 北京安定门外安华里二区一号楼)

北京国民灰色系统科学研究院计算机中心排版

石油工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092 毫米 16 开本 32.75 印张 742 千字 印 1—5000

2003 年 3 月北京第 1 版 2003 年 3 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-5021-4171-5/O·10

定价:42.80 元

前 言

全国硕士生入学统一考试是我国选拔硕士研究生的主要途径,而数学统考在此统考中占有极其重要的地位。为了使数学统考更加完备和科学,国家教育部对数学考试大纲进行了重大修订,对试卷重新作了分类,对考试内容的深度和广度作了较大的调整。这些变化对考生提出了更高的要求。因此,考生们迫切需要一本既符合《考试大纲》的要求,又能引导自己深刻理解《考试大纲》的精神,进行全面、系统复习的指导书。本书即为此而编写。

本书作者均长期从事高校数学教学工作,曾参加过多种层次的考试命题,并多年参与研究生入学数学考试的辅导及阅卷工作。在此过程中,对《考试大纲》和历年的试卷进行过深入的研究,积累了丰富的经验,并将这些经验用到考研辅导班中,使考生在最短的时间内获得最大的收效,因此受到全国考生的广泛欢迎。

本书的特点是:

一、完全参照《考试大纲》编写,无超过考试大纲要求的内容。

二、完全涵盖了《考试大纲》规定的内容,突出了对数学基本概念、基本原理的理解和对基本解题方法的训练,以便提高考生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力及空间想象能力。

三、通过对典型例题的分析,引导考生深入理解数学的基本概念及它们的内在联系,便于考生突破难点,提高解答难题的能力。

四、针对考生难于将数学知识应用到实践中去的现状,本书编有大量的应用题,引导考生掌握建立数学模型的基本方法,提高考生解决实际问题的能力。

五、对各类重要类型题,本书都作了系统归纳,并给出了一些独特解法,便于考生举一反三,融会贯通。

六、本书所选例题具有广泛的代表性,难度和历年试题相当,力求摒弃偏题与怪题。

七、本书每章都附有大量练习题,并在书后给出答案,便于考生检验解题是否正确。

八、为了沟通各学科知识之间的联系,本书的第四部分给出了综合题解,引导考生学会运用数学知识求解综合题。

在本书的编写过程中,王嘉、赵伟、李涛、王文倩、李玉玲、陶伟宏、程进、李荫、刘书刚、黄瑶、崔卫国、叶传平、郎明、李栋、彭建森、万飞、马刚、袁泉、贾群、陈燕、徐涛、周云、张波、谢丽、宛宏斌、郭卫烈等同志做了大量有益工作,在此一并表示感谢。由于时间仓促,错误在所难免,望专家、读者批评指正。

作 者

2003 年 2 月

目 录

第一部分 高等数学

第一章	函数 极限 连续性	(1)
一	内容提要.....	(1)
二	重点.....	(3)
三	典型例题解析.....	(3)
四	练习题	(18)
第二章	导数与微分	(21)
一	内容提要	(21)
二	重点	(22)
三	典型例题解析	(22)
四	练习题	(30)
第三章	中值定理与导数的应用	(34)
一	内容提要	(34)
二	重点	(35)
三	典型例题解析	(36)
四	练习题	(55)
第四章	不定积分	(60)
一	内容提要	(60)
二	重点	(61)
三	典型例题解析	(61)
四	练习题	(72)
第五章	定积分	(75)
一	内容提要	(75)
二	重点	(76)
三	典型例题解析	(76)
四	练习题	(97)
第六章	定积分的应用	(102)
一	内容提要.....	(102)
二	重点.....	(103)
三	典型例题解析.....	(103)
四	练习题.....	(109)

第七章 空间解析几何与向量代数	(111)
一 内容提要	(111)
二 重点	(113)
三 典型例题解析	(113)
四 练习题	(121)
第八章 多元函数微分法及其应用	(125)
一 内容提要	(125)
二 重点	(127)
三 典型例题解析	(127)
四 练习题	(140)
第九章 重积分	(144)
一 内容提要	(144)
二 重点	(147)
三 典型例题解析	(147)
四 练习题	(166)
第十章 曲线积分与曲面积分	(171)
一 内容提要	(171)
二 重点	(173)
三 典型例题解析	(173)
四 练习题	(204)
第十一章 无穷级数	(208)
一 内容提要	(208)
二 重点	(214)
三 典型例题解析	(215)
四 练习题	(255)
第十二章 微分方程	(260)
一 内容提要	(260)
二 重点	(263)
三 典型例题解析	(263)
四 练习题	(278)
练习题答案	(282)

第二部分 线性代数

第一章 行列式与矩阵	(292)
一 内容提要	(292)
二 重点	(297)
三 典型例题解析	(298)

四	练习题	(315)
第二章	向量的线性相关性与矩阵的秩	(318)
一	内容提要	(318)
二	重点	(321)
三	典型例题解析	(321)
四	练习题	(333)
第三章	线性方程组	(335)
一	内容提要	(335)
二	重点	(337)
三	典型例题解析	(337)
四	练习题	(350)
第四章	相似矩阵与二次型	(353)
一	内容提要	(353)
二	重点	(357)
三	典型例题解析	(358)
四	练习题	(383)
	练习题答案	(385)

第三部分 概率与数理统计

第一章	随机事件与概率	(388)
一	内容提要	(388)
二	重点	(391)
三	典型例题解析	(391)
四	练习题	(401)
第二章	随机变量及其分布	(403)
一	内容提要	(403)
二	重点	(405)
三	典型例题解析	(406)
四	练习题	(415)
第三章	多维随机变量及其分布	(418)
一	内容提要	(418)
二	重点	(420)
三	典型例题解析	(421)
四	练习题	(432)
第四章	随机变量的数字特征	(435)
一	内容提要	(435)
二	重点	(437)

三	典型例题解析·····	(438)
四	练习题·····	(452)
第五章	大数定理、中心极限定理 ·····	(455)
一	内容提要·····	(455)
二	重点·····	(456)
三	典型例题解析·····	(456)
四	练习题·····	(458)
第六章	数理统计 ·····	(460)
一	内容提要·····	(460)
二	重点·····	(466)
三	典型例题解析·····	(466)
四	练习题·····	(475)
练习题答案·····		(477)

第四部分 综合题解

综合题解·····	(481)
-----------	-------

第一部分 高等数学

第一章 函数 极限 连续性

一 内容提要

(一) 主要内容

1. 有关函数的基础知识

- (1) 函数、反函数、复合函数的概念;
- (2) 各基本初等函数的图像、性质,初等函数的概念;
- (3) 函数的特性.

① 有界性:

a. 定义:对一切 $x \in D$, 存在正数 M , 使 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 D 上有界.

b. 应注意的问题:函数 $y = f(x)$ 在 D 上有界, 其导函数在 D 上不一定有界, 如 $y = \sqrt[3]{x}$ 在 $(-1, 1)$ 上有界, 但 $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ 在 $(-1, 1)$ 上无界.

② 单调性:定义

③ 奇偶性:

a. 定义: $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 若对一切 $x \in D$, $f(-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 为偶函数; $f(-x) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 为奇函数.

b. 性质: 奇 + 奇 = 奇, 偶 + 偶 = 偶, 奇 · 偶 = 奇, 偶 · 偶 = 偶, 奇 · 奇 = 偶.

c. 导函数与原函数的奇偶性:

可导偶函数的导函数是奇函数;

可导奇函数的导函数为偶函数;

可积奇函数的原函数是偶函数;

可积偶函数的原函数中有一个是奇函数.

④ 周期性:

a. 定义

b. 导函数、原函数的周期性: 可导周期函数的导函数是周期函数; 可积周期函数的原函数不一定是周期函数.

2. 极限的概念及运算

- (1) 各类极限的定义;
- (2) $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 极限存在的充要条件;

(3) 极限的四则运算法则.

3. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小的定义;

(4) 极限与无穷小的关系;

(2) 无穷小的运算性质;

(5) 无穷大的定义;

(3) 无穷小的比较;

(6) 无穷小与无穷大的关系.

4. 极限存在的准则

(1) 夹逼定理;

(2) 单调有界数列必存在极限.

5. 有关极限的定理

(1) 惟一性;

(2) 有界性;

(3) 保号性.

6. 函数的连续性

(1) 函数在 x_0 点连续的定义;

(2) 函数的间断点的分类

间断点 $\begin{cases} \text{第一类间断点(左、右极限都存在)} & \left\{ \begin{array}{l} \text{可在间断点(左极限} = \text{右极限)} \\ \text{跳跃间断点(左极限} \neq \text{右极限)} \end{array} \right. \\ \text{第二类间断点(除第一类间断点外的间断点)} \end{cases}$

(3) 连续函数的运算性质;

(4) 初等函数的连续性;

(5) 在闭区间上连续函数的性质:

① 最大、最小值定理;

② 介值定理及零点定理;

③ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数必取到最大、最小值之间的任何数值.

(二) 重要公式

1. 极限的四则运算法则

若 $\lim f(x) = A$ $\lim g(x) = B$

则 $\lim [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$

$\lim f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$

$\lim [f(x)]^n = A^n$

2. 重要结论

(1) $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$

(2) $\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (|q| < 1)$

3. 常用的等价无穷小

当 $u \rightarrow 0$ 时: $\sin u \sim u, e^u - 1 \sim u, \ln(1+u) \sim u, \tan u \sim u, 1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}, \arcsin u \sim u, \arctan u \sim u$.

二 重 点

- (1) 函数的概念与特性
- (2) 极限的概念
- (3) 无穷小的定义、运算性质及无穷小的比较
- (4) 极限存在的准则;两个重要极限
- (5) 极限的求法
- (6) 函数连续性的定义及间断点的分类
- (7) 在闭区间上连续函数的性质

三 典型例题解析

(一) 函数

【例1】 判断下列各对函数是否相同:

- (1) $y = \sin(\arcsin x)$ 与 $y = x$
- (2) $y = \sqrt{\sin^2 x}$ 与 $y = \sin x$
- (3) $y = \cos^2 t + \sin^2 t + t$ 与 $y = 1 + x$

分析: 判断两个函数是否相同,要看(1)定义域是否相同;(2)对应法则是否相同.所谓对应法则相同,即对定义域内任取一自变量的值,两个函数的函数值相等.

解 (1) 是一对不相同的函数.因前者定义域为 $|x| \leq 1$,而后者为 $x \in (-\infty, +\infty)$.

(2) 是一对不相同的函数.因为对应法则不相同.如在定义域内取 $x = \frac{5}{4}\pi$,前者的函数值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,而后者的函数值为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) 是一对相同的函数.因它们的定义域都是全体实数,且对任意实数 t , $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, $\therefore$ 前者实为 $y = 1 + t$,与后者的对应法则相同.至于用何字母表示自变量,与函数是否相同无关.

【例2】 求函数 $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}}$ 的反函数.

解
$$y^3 = x + \sqrt{1+x^2} + 3(\sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}})^2 \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}} \\ + 3\sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}}(\sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}})^2 + x - \sqrt{1+x^2}$$

$$\begin{aligned}
&= 2x + 3\sqrt[3]{(x + \sqrt{1+x^2})(x - \sqrt{1+x^2}) \cdot (\sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}})} \\
&= 2x + 3(-1)(\sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}}) \\
&= 2x - 3y
\end{aligned}$$

$\therefore x = \frac{1}{2}(y^3 + 3y)$ 即所求反函数为 $y = \frac{1}{2}(x^3 + 3x)$.

【例3】 已知 $f(\sin \frac{x}{2}) = 1 + \cos x$, 求 $f(\cos \frac{x}{2})$.

解 $f(\sin \frac{x}{2}) = 1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} = 2(1 - \sin^2 \frac{x}{2})$

设 $u = \sin \frac{x}{2}$, 则 $f(u) = 2(1 - u^2)$

$\therefore f(\cos \frac{x}{2}) = 2 - 2\cos^2 \frac{x}{2} = 2 - (1 + \cos x) = 1 - \cos x$

【例4】 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}$, 且 $x \neq 0$, 求 $f[\frac{1}{f(x)}]$ 及 $f[f(x)]$.

解 $\frac{1}{f(x)} = \frac{x-1}{x}$

则 $f[\frac{1}{f(x)}] = f(\frac{x-1}{x}) = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x} - 1} = 1 - x.$

$$f[f(x)] = f(\frac{x}{x-1}) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = x.$$

【例5】 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| \leq 1 \\ x & |x| > 1 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & |x| \leq 1 \\ 2 & |x| > 1 \end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

解 $f[g(x)] = \begin{cases} [g(x)]^2 & |g(x)| \leq 1 \\ g(x) & |g(x)| > 1 \end{cases}$

$$= \begin{cases} (2 - x^2)^2 & |2 - x^2| \leq 1 \text{ 且 } |x| \leq 1 \\ 2 - x^2 & |2 - x^2| > 1 \text{ 且 } |x| \leq 1 \\ 2 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & |x| = 1 \\ 2 - x^2 & |x| < 1 \\ 2 & |x| > 1 \end{cases}$$

【例6】 设 $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{3}{2}x^2 & -1 \leq x < 0 \\ \frac{xe^x}{(e^x + 1)^2} & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ 求 $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$ 的表达式.

解 当 $-1 \leq x < 0$ 时

$$F(x) = \int_{-1}^x (2t + \frac{3}{2}t^2)dt = \left(t^2 + \frac{t^3}{2}\right) \Big|_{-1}^x = \frac{x^3}{2} + x^2 - \frac{1}{2}.$$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \\
 &= \left(t^2 + \frac{t^3}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \int_0^x \frac{te^t}{(e^t + 1)^2} dt \\
 &= -\frac{1}{2} - \int_0^x t d\left(\frac{1}{e^t + 1}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{t}{e^t + 1} \Big|_0^x + \int_0^x \frac{dt}{e^t + 1} \\
 &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} + \int_0^x \frac{d(e^t)}{e^t(e^t + 1)} \\
 &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} + \ln \frac{e^t}{e^t + 1} \Big|_0^x = -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} + \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + \ln 2 \\
 \therefore F(x) &= \begin{cases} \frac{x^3}{2} + x^2 - \frac{1}{2} & -1 \leq x < 0 \\ \frac{xe^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1) + \ln 2 - \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

(二) 极限的求法

1. 初等变换

【例 7】 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right]$

解 $\because \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

【例 8】 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+a)(1+a^2) \cdots (1+a^{2^n}) \quad |a| < 1$

$$\begin{aligned}
 \text{解 原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-a)(1+a)(1+a^2) \cdots (1+a^{2^n})}{1-a} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a} \quad (\because |a| < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a^{2^{n+1}} = 0) \\
 &= \frac{1}{1-a}
 \end{aligned}$$

2. 重要极限

【例 9】 求 $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right)^m$

$$\begin{aligned}
 \text{解 原式} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right)^{-\frac{m^2}{n^2} \cdot \left(-\frac{n^2}{m^2}\right) \cdot m} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right)^{-\frac{m^2}{n^2} \left(-\frac{n^2}{m^2}\right)}
 \end{aligned}$$

$$= e^0 = 1$$

【例 10】 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+C}{x-C} \right)^x = \int_{-\infty}^C t e^{2t} dt$, 求 C .

解 左边 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+C}{x-C} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \frac{C}{x})^x}{(1 - \frac{C}{x})^x} = \frac{e^C}{e^{-C}} = e^{2C}$

$$\begin{aligned} \text{右边} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^C t e^{2t} dt = \frac{1}{2} \left[t e^{2t} \Big|_{-\infty}^C - \int_{-\infty}^C e^{2t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} C e^{2C} - \frac{1}{4} e^{2C} = e^{2C} \left(\frac{C}{2} - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

由 $e^{2C} = e^{2C} \left(\frac{C}{2} - \frac{1}{4} \right)$ 得 $C = \frac{5}{2}$

3. 无穷小的运算性质

【例 11】 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x})$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2 \sin \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \right)$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}$$

$\because$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}$ 为无穷小量, 且 $\left| \sin \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right| \leq 1$ 有界
 $\therefore$ 原式 $= 0$

4. 无穷小量分出法

【例 12】 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^{20}(3x+4)^{30}}{(4x-3)^{50}}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2 - \frac{1}{x})^{20} (3 + \frac{4}{x})^{30}}{(4 - \frac{3}{x})^{50}} = \frac{2^{20} \cdot 3^{30}}{4^{50}} = \frac{3^{30}}{4^{40}}$

【例 13】 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(\sqrt{n^2+a^2}-n)}$

解 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \frac{(\sqrt{n^2+a^2}-n)(\sqrt{n^2+a^2}+n)}{\sqrt{n^2+a^2}+n}}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln a^2 - \ln n - \ln \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{a}{n} \right)^2} \right]} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\ln a^2}{\ln n} - 1 - \frac{\ln \sqrt{1 + \left(\frac{a}{n} \right)^2} + 1}{\ln n}} = -1 \end{aligned}$$

注: 对 $x \rightarrow \infty$ 或 $n \rightarrow \infty$ 时的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式应首先采用无穷小量分出法.

5. 罗必塔法则

【例 14】 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cos \sqrt{x}$

分析: 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $(\cos \sqrt{x}) \rightarrow 1$, 而 $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, 故原式是 1^∞ 未定式, 可用重要极限或罗必塔法则求解.

$$\begin{aligned} \text{解法 1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} [1 - (1 - \cos \sqrt{x})]^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - 2\sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^{-\frac{1}{2\sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2}} \cdot \frac{-2\sin \frac{\sqrt{x}}{2}}{x}} \\ &= \exp \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2\sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 \cdot 4} = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

解法 2 设 $y = \sqrt{x}$, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} (\cos y)^{1/y^2} \\ &= \exp \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cos y)}{y^2} = \exp \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-(\sin y / \cos y)}{2y} \\ &= \exp \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{2\cos y} \right) = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

【例 15】 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)} - x]$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})(1+\frac{c}{x})} - 1}{\frac{1}{x}} \quad \left(\frac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left[(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})(1+\frac{c}{x}) \right]^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{[(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})(1+\frac{c}{x})]'}{(1/x)'} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[a(1+\frac{b}{x})(1+\frac{c}{x}) + b(1+\frac{c}{x})(1+\frac{a}{x}) + c(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x}) \right] \\ &= \frac{1}{3}(a+b+c) \end{aligned}$$

【例 16】 设 $f(x)$ 连续, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2 \int_0^x f(t) dt}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{原式} &\stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot 2x}{2x \int_0^x f(t) dt + x^2 f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x)}{2 \int_0^x f(t) dt + xf(x)} \quad \left(\frac{0}{0}\right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f'(x)}{3f(x) + xf'(x)} = \infty$$

6. 等价无穷小替换

【例 17】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^3(2x)}{x^4} \left(1 - \frac{x}{e^x - 1}\right)$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^3(2x)}{x^3} \cdot \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)^3}{x^3} \cdot \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \quad [x \rightarrow 0 \text{ 时}, \tan(2x) \sim 2x, e^x - 1 \sim x]$
 $= 8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$
 $= 8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = 4$

【例 18】 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\sin x)^x}{x^2 \arctan x}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^x (e^{x \ln \frac{\sin x}{x}} - 1)}{x^3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^x) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln \frac{\sin x}{x}}{x^3}$
 $= -\exp \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln[1 + (\frac{\sin x}{x} - 1)]}{x^2}$
 $= -\exp \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-(1/x^2)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^2}$
 $= -e^0 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{3x^2}$
 $= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-(x^2/2)}{3x^2} = \frac{1}{6}$

7. 用泰勒公式展开

【例 19】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

解 $\because e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
 $\therefore$ 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)][x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)] - x(1+x)}{x^3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{2!} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$

注:用泰勒公式展开时的阶数要依确定的幂指数展开,如此例中要依分母将分子展开到 3 阶为止.

8. 利用导数的定义

【例 20】 设 $f(u)$ 为可微函数, 且 $f(0) = 0$, 求

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy}{\pi t^3}$$

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t r f(r) dr}{\pi t^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\pi t f(t)}{3\pi t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{3} \cdot \frac{[f(t) - f(0)]}{t} \\ &= \frac{2}{3} f'(0) \end{aligned}$$

9. 利用中值定理

【例 21】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - \sin x}{x^3}$

$$\begin{aligned} \text{解 } \because \sin(\sin x) - \sin x &= (\sin x - x) \cos[\theta(x - \sin x) + x] \quad (0 < \theta < 1) \\ \therefore \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos[\theta(x - \sin x) + x](\sin x - x)}{x^3} \\ &= \cos 0 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

10. 用准则

【例 22】 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3+1} + \frac{2^2}{n^3+2} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+n} \right)$

$$\text{解 设 } x_n = \frac{1^2}{n^3+1} + \frac{2^2}{n^3+2} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+n}$$

$$\text{则 } \frac{\sum_{i=1}^n i^2}{n^3+n} \leq x_n \leq \frac{\sum_{i=1}^n i^2}{n^3+1}$$

$$\therefore \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+n} \leq x_n \leq \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+1}$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+1} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}$$

【例 23】 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx$

$$\text{解 } \because 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1}$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx = 0$$