陕西省高等师范函授教材

初等数学

第二册

（三角部分）

陕西省高等师范函授教材
初 等 数 学
第 二 册
（三角部分）

陕西教育学院选编
陕西人民出版社出版
陕西省新华书店发行
汉中地区印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 7.625 字数 150,000
1979年7月第1版 1981年5月第2次印刷
印数46,201—56,200
书号：K7094·207 定价：0.62 元

说　明

这本教材是北京师范大学数学函授教材，系曹才翰和余炯沛两位同志编写的。我们现翻印出来，作为我省高师函授数学教材，也可供我省中学数学教师教学时参考使用。全教材共分三册，函授学员在第一学年内学完。

翻印时，我们对原稿在排印中的错误作了校正，但限于水平，难免有不当之处，望读者批评指正。

陕西教育学院师训部数学组

一九七九年元月

第六章　三角函数的概念和基本三角恒等式

§17　弧和角的概念及其度量…………………………1

一、任意大小的角…………………………1

二、角的度量…………………………3

三、单位圆…………………………7

§18　三角函数…………………………10

一、向量在轴上的射影…………………………10

二、任意角的三角函数定义…………………………13

三、三角函数的几何表示法…………………………17

四、三角函数的符号…………………………19

五、一些特殊角的函数值…………………………21

六、三角函数的奇偶性…………………………24

§19　基本的三角恒等式…………………………26

一、基本的三角恒等式…………………………26

二、根据一个三角函数值计算其他三角函数值……30

§20　根据角的已知三角函数值求作角…………………………34

一、已知$\cos\alpha = m$，求作角α…………………………34

二、已知$\sin\alpha = m$，求作角α…………………………40

三、已知$tg\alpha = m$，求作角α…………………………46

四、已知$ctg\alpha = m$，求作角α…………………………49

第七章　加法定理及其推论

§21　加法定理…………………………56

一、两角和差的余弦公式…………………………… 57
二、两角和差的正弦公式…………………………… 59
三、两角和差的正切公式…………………………… 61
四、加法定理的其他证法…………………………… 62
五、例　　题………………………………………… 69
§22　诱导公式……………………………………… 73
一、诱导公式………………………………………… 73
二、诱导公式的记忆法……………………………… 77
§23　倍角公式和半角公式………………………… 81
一、倍角公式………………………………………… 81
二、半角公式………………………………………… 91
§24　积化和差与和差化积公式…………………… 98
一、积化和差与和差化积公式……………………… 98
二、利用公式进行变形……………………………104

第八章　三角函数的性质和图象

§25　三角函数的性质………………………………114
一、几个基本性质…………………………………114
二、三角函数的周期性……………………………115
三、三角函数的单调性区间………………………123
§26　三角函数的图象………………………………130
一、几个基本三角函数的图象……………………130
二、正弦型函数$y=a\sin(kx+b)$的图象…………138
§27　反三角函数……………………………………146
一、反正弦函数……………………………………146
二、反余弦函数……………………………………150

三、反正切函数……………………………………………151
四、反余切函数……………………………………………153

第九章 三角方程

§28 三角方程的解法及同解性……………………………162
一、基本三角方程……………………………………………163
二、含有同一个未知数的同一个三角函数
的三角方程的解法……………………………………170
三、利用两个同名函数相等的充要条件来解方程…174
四、形如$asinx+bcosx=c$的方程
的解法……………………………………………………178
五、可以化为同一个未知数的同一个三角函数
的方程的解法…………………………………………181
六、使方程一边为零而另一边分解因式的解法……189
七、$sinx$和$cosx$的齐次方程的解法 …………………193
八、利用万能置换解方程…………………………………196

第十章 任意三角形的解法

§29 三角形的边角关系和几个重要定理………………203
一、三角形的可解条件……………………………………204
二、正弦定理、余弦定理和正切定理………………206
§30 斜三角形的解法及应用……………………………213
一、斜三角形的解法………………………………………213
二、应用举例………………………………………………227

第六章　三角函数的概念和基本的三角恒等式

§17　弧和角的概念及其度量

一、　任意大小的角

在几何学里，角是由一个点引出两条射线所组成的图形.

一条射线在平面内环绕着它的端点旋转可以组成任意的角。例如，一条射线环绕端点O从开始的位置OA旋转到终止位置OB，就形成了角$\angle AOB$（图17—1）.

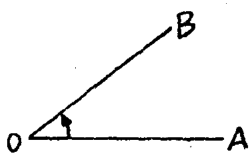

图　17—1

在三角学里，角被看作是一条射线在平面内环绕它的端点旋转而成的。

一条射线旋转所成的角可以大于一个平角(图17—2(a)；也可以环绕端点旋转若干周后和开始的位置重合（图17—2(b)）；也可以旋转若干周又一周的一部分（图17—2(c)）。

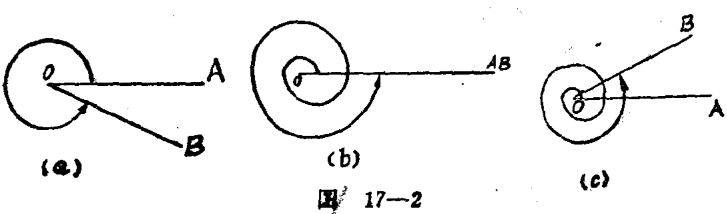

图　17—2

由此可见，在三角里，角的大小是不限的。

射线在平面内的旋转还可以有两个方向。一般规定，按逆时针方向旋转的角作为正角，按顺时针方向旋转的角作为负角。

如果射线OA没有作任何旋转，仍留在开始的位置，那么我们说射线旋转的角度等于零。

定义 旋转射线的开始位置叫做旋转角的始边，而射线的终止位置叫做这个角的终边。

显然，具有相同的始边和相同的终边的旋转角不只一个，而是无穷多个，它们之间彼此相差整数周（正的或负的）。

角的概念对应的是弧的概念。

对应于圆的两条半径所构成的任何的角，这个圆上都有以这两条半径的端点为界的一条弧（图17—3），如果半径OA绕着圆心O旋转，那么半径的端点A就在圆上运动，我们说：一个点在圆上运动。如果这个点所在的半径是按照正（负）方向旋转的，那么就说这个点在圆上按正（负）方向运动。

一个点在圆上按照正方向运动所形成的弧作为正的弧，

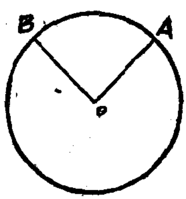

图 17—3

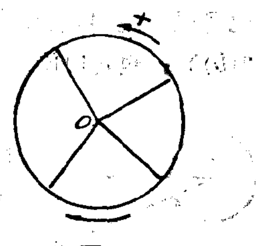

图 17—4

而按照负方向运动所成的弧作为负的弧（图17—4）。

如果半径旋转一周（正的或负的），那么它的端点划过一个整圆后又返回到开始的位置。

由上我们看到，弧的正负是依据射线旋转的方向的正负来决定的，这样规定就使正负角和正负弧对应起来了。

二、角的度量

我们在几何里已经知道，角的度量是取一个确定的角作为度量单位的，并且利用它来量其他所有的角。

任何一个角都可以取来作为度量单位。

在实用中，角常常用“度”来量，就是取一整圆的1/360作为度量单位，把它叫做一度。为了更精确的度量，把一度分成60个等份，每一份叫做一分，把一分再分成60个等份，每一份叫做一秒。

在几何里，有时用直角作为度量单位。

在实际应用中，常用一周作为度量单位。例如机器中的齿轮或飞机的螺旋桨的旋转，通常用周数来度量。

在炮术里，取一周的1/60，就是$\frac{360^\circ}{60}=6^\circ$作为角的度量单位，这个角叫做一个大密位。为了更精确的度量，把一个大密位分成100个等份，每一份就是$\frac{6^\circ}{100}=3'36''$，叫做一个小密位。

正角的大小用正数表示，负角的大小用负数表示。

因为射线旋转的时候，可以构成任意大小的角（正的、负的、零、含有任意周的），所以三角里所研究的角，可以

是用任意的实数来表示的各种角.

在量已知圆的弧的时候，所取的单位，是圆心角的度量单位所对的弧，这时，圆心角的大小和它所对的弧的大小分别用同样数目的角的度量单位和弧的度量单位来表示.

由于在“度”的度量制中，弧长和半径之间没有明确的关系，因而在解决某些应用问题（例如已知角度求弧长）时，就感到不便. 此外，在高等数学中，这种度量制也感到不便. 由于这些原因，就产生了另一种度量角度的单位，即所谓“弧度制”.

为了今后的需要，我们在本讲义中将突出弧度制的概念和使用.

从几何里知道，在圆心角相同时，两个圆上的弧长的比等于它们的半径长的比（图17—5），即，

$$\frac{\overset{\frown}{A_1B_1}}{\overset{\frown}{A_2B_2}}=\frac{R_1}{R_2},$$

或 $$\frac{\overset{\frown}{A_1B_1}}{R_1}=\frac{\overset{\frown}{A_2B_2}}{R_2}.$$

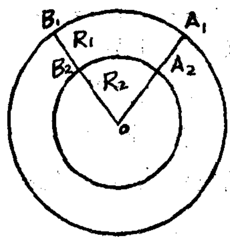

图 17—5

于是，在圆心角相同时，一个圆上的弧长和它的半径之比，等于另一个圆上的弧长和它的半径之比. 换句话说，任何圆上，弧长和半径之比由这弧所对的圆心角的大小决定，而与半径的长短无关. 圆心角的大小改变的时候，这个比也改变.

定义 以一个角为圆心角，这个角所对的弧的长和这个弧的半径长之比叫做这个角的弧度.

当弧长等于半径时，这个比值就等于 1，这就是说，长度

等于半径的弧所对的圆心角的弧度是1．

因此，在弧度制里，度量一个角时度量单位是长度等于半径的弧所对的一个正圆心角，这个角叫做一弧度角（图17—6）；度量一条弧时，度量单位是长度等于半径的弧，这条弧叫做一弧度的弧．

度和弧度的互化

一周（正的）的弧度等于圆周长除以半径，即

$$\frac{2\pi R}{R}=2\pi=6.283185\cdots\text{弧度}.$$

一周角的角度是360°，

$\therefore\quad 360°=2\pi$弧度，

或　$180°=\pi$弧度．

这样我们得到下面的换算式：

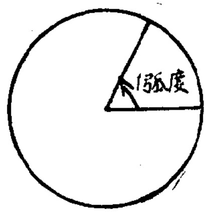

图17—6

$$1°=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\approx 0.017453\text{弧度},$$

$$1\text{弧度}=\frac{180°}{\pi}\approx 57°17'45''.$$

下表给出一些常用的角的弧度：

度	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
(近似值)	0.5236	0.7854	1.0472	1.5708	3.1416	4.7124	6.2832

应该指出，量度任何的量所得的数照例都要带有度量单

位的名称，例如5000米，6.87元，365公斤等，但是对于角（或弧）的“弧度”通常都是例外。用弧度表示角（或弧）的大小，写成不带单位的数。例如，2弧度，3弧度，π弧度，$\frac{\pi}{2}$弧度，x弧度等，就写成2，3，π，$\frac{\pi}{2}$，x；$\sin\frac{\pi}{4}$，$\sin 1$分别表示$\frac{\pi}{4}$弧度的角（或弧）的正弦和1弧度的角（或弧）的正弦。

如果知道圆的半径R和一条弧的弧度α，那么可以计算这条弧的长l。事实上，根据弧度的定义：

$$\alpha=\frac{l}{R}$$

由此得　$l=\alpha R$。

就是说：圆弧的长度等于它的弧度乘以半径。

这样，弧的长和角的大小在弧度制下建立了直接的关系。

例1　化$67°30'$为弧度。

解：　$67°30'=67.5°=\frac{\pi}{180}\times 67.5=\frac{3}{8}\pi$（弧度）。

例2　化$\frac{3}{5}\pi$弧度为度。

解：　$\frac{3}{5}\pi$ 弧度 $=\frac{180°}{\pi}\times\frac{3}{5}\pi=108°$。

例3　两皮带轮的半径是$R_1=20$，$R_2=30$，求它们的转速之比（图17—7）。

解：转速之比等于在相同时间内两轮的转角大小之比，即求$\alpha_1:\alpha_2$。

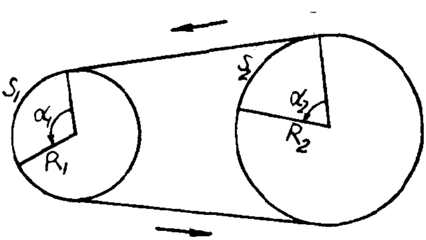

图17—7

因为在相同时间内，两轮周上转过的弧长相等，即$S_1=S_2$，在弧度制下

$$S_1=\alpha_1 R_1,$$

$$S_2=\alpha_2 R_2,$$

$$\therefore \quad \alpha_1 R_1=\alpha_2 R_2,$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{30}{20},$$

$$\therefore \quad \alpha_1:\alpha_2=30:20=3:2.$$

答：转速之比是3∶2。

三、单位圆

在坐标平面上的角，我们仍规定，按逆时针方向旋转所形成的角为正角，按顺时针方向旋转所形成的角为负角。

在坐标平面上，把角放在这样的标准位置上：取坐标原点作为角的顶点，取横轴的正半轴作为角的始边，而要确定某一角α的终边（例如135°的角的终边），应当把射线从开始的位置OX轴环绕原点旋转，终止位置由这个角α的大小

（135°）决定（图17—8）。

由此可见，终边不同，角的大小也不同。

从坐标原点引出的一条射线，可以作为无穷多个以 OX 轴正半轴为始边的角的终边，这些角之间彼此相差整数周。如果这些角中的一个的大小是 α，那么其他任一个角 β 的大小都可以表示为 $\beta = 2k\pi + \alpha$，

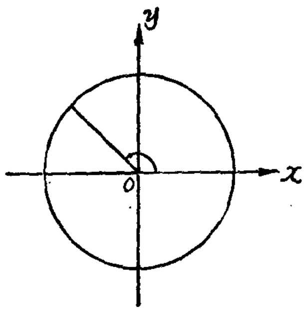

图17—8

这里 k 是任何整数，即 $k = 0$，± 1，± 2，…，例如和横轴倾斜成30°角的射线，可以作为角 $k360° + 30°$ 的终边，就是30°（$k = 0$），390°（$k = 1$），$-330°$（$k = -1$），750°（$k = 2$）的终边，等等。

定义 以坐标原点为圆心，半径长为1的圆叫做单位圆。

任何实数 a 都可以用单位圆上的点来表示。为此，我们从水平直径的右端点（1，0）起，放置一条量数为 α 的弧（如图17—8），并且 α 是弧的弧度数，那么在 $\alpha > 0$ 时，就在圆周上沿着正方向得到这个弧的另一端点；在 $\alpha < 0$ 时，就沿着负方向得到这个弧的另一端点；在 $\alpha = 0$ 时，就得到起点（1，0）。

这一来，任意一个实数 α，把它看作某一个角（或弧）的弧度数，就对应着单位圆上一个点。如图17—9中，单位圆上的各点就是与一些不同的实数所对应的。

这种对应并不是一一对应的。一个确定的实数，对应着单位圆上唯一的一个点，例如，

实数$\frac{\pi}{2}$对应着点(0，1)。但反过来，单位圆上一个确定的点却对应着不只一个实数，例如(0，1)这个点对应着$\frac{\pi}{2}$，$-\frac{3\pi}{2}$等实数。一般来说，实数α，β ($\beta=\alpha+2k\pi$)与单位圆上同一个点对应。

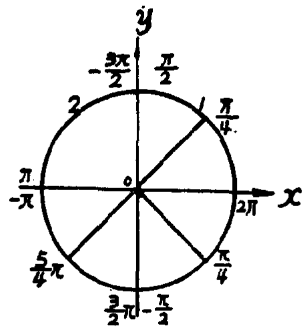

图17—9

当然，如果限定实数的范围，比如限定$\alpha\in[0,\ 2\pi]$，那么实数α与单位圆上的点是一一对应的。

我们知道，坐标轴把平面分为四个象限，从而把单位圆分属四个象限。

如果角的终边（或弧的端点）在平面（或单位圆）的某个象限内，那么就说所给的角（或弧）终止于这个象限。

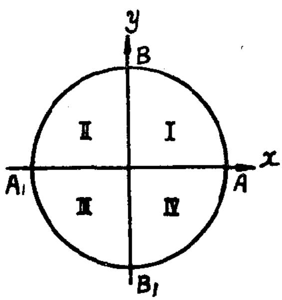

图17—10

量数为$2k\pi$（或角度$k360°$）的弧终止于单位圆上水平直径的右端点A（这里k为任意整数）。

量数为$\pi+2k\pi=(2k+1)\pi$（或角度$(2k+1)180°$）的弧终止于水平直径的左端点A_1（这里k为任意整数）。

把这两者结合起来，量数为$n\pi$（或度制为$n180°$）的弧

终止于水平直径的端点，在偶数$n=2k$时，终止于A点；在奇数$n=2k+1$时，终止于A_1点。

量数为$\frac{\pi}{2}+2k\pi$（或角度$90°+k360°$）的弧终止于铅垂直径的上端B（0，1）点处，$-\frac{\pi}{2}+2k\pi=\frac{\pi}{2}+(2k-1)\pi$的弧终止于铅垂直径的下端$B_1$（0，－1）点处。

把这两者结合起来，量数为$\frac{\pi}{2}+n\pi$的弧终止于铅垂直径的端点处，在偶数$n=2k$时终止于B点；在奇数$n=2k-1$时终止于B_1点。

$k\frac{\pi}{2}$（或$k90°$）的弧，或终止于水平直径的端点，或终止于铅垂直径的端点，在$k=0$，1，2，3，4，5，…时，依次得到的点是A，B，A_1，B_1，A，B，…；在$k=-1$，－2，－3，－4，－5…时，依次得到的点是B_1，A_1，B，A，B_1，…（如图17—10）.

若α的终边落在右半平面，则满足

$$\frac{\pi}{2}+(2k-1)\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

若α的终边落在上半平面，则满足

$$k\pi<\alpha<(2k+1)\pi.$$

以上这些表示法希望大家熟悉，因为以后经常用到。

§18 三角函数

一、向量在轴上的射影

一个以A为起点B为终点的有向线段AB，也叫做一个

以A为起点B为终点的向量，记做$\overrightarrow{AB}$。

定义　如果向量$\overrightarrow{AB}$的起点和终点在轴l上的射影分别是A_1和B_1，那么有向线段A_1B_1的数量就叫做向量$\overrightarrow{AB}$在轴l上的射影（图18—1）。

注意，A_1B_1还是有方向的量。如果有向线段A_1B_1的方向和轴l的方向一致，那么射影A_1B_1被认为是正的；如果A_1B_1的方向和轴l的方向相反，那么射影A_1B_1被认为是负的。

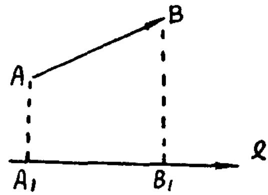

图18—1

如果向量$\overrightarrow{AB}$与l轴垂直，那么它在轴l上的射影等于零（图18—2）。

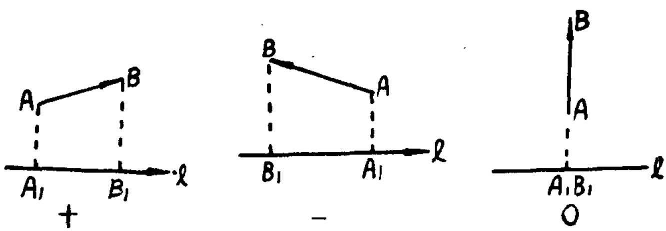

图18—2

设$\overrightarrow{F}$是坐标平面上的一个向量，它在横轴和纵轴上的射影分别用F_1和F_2表示，而它的长用$|\overrightarrow{F}|$来表示。

定理　向量的长的平方等于它在坐标轴上的射影的平方