不等式

与

一元二次方程

北京师范大学出版社

不等式与一元二次方程

刘　坤

北京师范大学出版社

内 容 简 介

本书依据部颁数学教学大纲的要求和教学改革的精神，把中学数学课涉及到的有关不等式的内容集中在一起，从理论上系统地、较详尽地进行阐述。全书共分为三章：第一章不等式；第二章一元二次方程；第三章不等式与区域。其中第一章是本书的主要部分。

本书重理论，重体系，重方法，注意培养能力，并辅以适量的例题、练习和习题。可供中学数学教师、高中学生、自学数学的青年作为参考书。

不等式与一元二次方程

刘 坤

*

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

国防工业出版社印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：9.25 字数：202千

1984年12月第1版 1984年12月第1次印刷

印数：1—41,500

统一书号：7243·245 定价：1.15元

写给同学们(前言)

这本书是我在北京四中从事数学教学和指导数学课外小组的产物，是由教案和讲义整理而成的。因而书中保留了一些课堂用语，也许对阅读本书的同学们是有益的。本书把中学阶段数学课所涉及到的有关不等式的内容集中在一起，系统地加以讲授，为的是使同学们对不等式的理论和方法有一个完整的认识，也便于复习。这本书作为高中学生学习“不等式”的配套参考书是合适的。整个内容和数学课的教学紧密配合，略高于教学大纲所规定的水平。其中第一章是本书的重点和主要部分。第二章是不等式应用的一个重要方面，也是初中阶段所学到的关于一元二次方程的根与系数的关系的补充、系统化和提高。一元二次方程是初等数学的最重要的内容之一，但是在初中阶段限于当时的基础，重点解决了方程的解法和应用题，而对有关根与系数之间的一些理论问题阐述得是不够的。因而现在做些补充、提高是必要的。第三章讲区域与不等式的关系。学了它能解释一元以至于多元不等式的几何意义，有助于提高解多元不等式的能力。这一章也是解析几何中“曲线与方程”理论的补充。学了它能从另一个角度加深对“曲线与方程”概念的理解。同时这一章对以后学习高等数学也是必要的基础知识。

以下和同学们谈谈怎样读这本书。

本书的每个单元都是由理论、例题和习题三部分组成。理论又包括概念、原理、定理、方法。我在讲述这些内容时，

有时先提出“探索性问题”，目的是想促使你先去探索，通过自己的独立思考获取知识。这不仅使你对知识的来龙去脉感受亲切深刻，并希望能对培养你的创造(研究)能力有些帮助。因此，你应当积极地试一试，待有所发现以后，再与书上的分析讲解进行对比。你在读书的时候怎样才能对书上的理论阐述钻得深一点呢？这就必须学会“思考”，其中最根本的就是要学会“提问题”。这是因为提问题在思考中占有很突出的地位，它既是初步思考的结果，又是进一步深入思考的前提。而且学会提问题在科学研究中更具有十分重要的意义。爱因斯坦说过：“提出一个问题，往往比解决一个问题更重要，因为解决问题也许仅是一个数学上实验上的技能而已，而提出新问题，新的可能性，从新的角度去看旧的问题，却需要有创造性的想象力，而且标志着科学的真正进步。”因此，在读书的过程中发扬“每事问”的精神，处处经过自己的独立思考，都问一个“为什么？”这是大有好处的。

其次，在阅读例题时，你最好能做到“作、比、问”。作——就是自己不看书先作一遍。若实在作不出，可以看一部分，待开启自己的思路以后，再合上书作下去。这样，可以检查自己对理论的理解和掌握的程度。比——就是对比。待自己作完以后，与书上的解法进行对比，找出差距。问——就是提问题，总结经验。上述两个步骤完成之后，向自己提一些问题对提高独立解题的技能是十分有益的：(1)解题中什么是决定性的一步？什么是主要困难？(2)解题中暴露出我在审题上、知识上、思路上或毅力上有什么弱点或不足？(3)解题方法是否还可以改进？是否还有别的方法？(4)条件中哪些是本质性的？哪些是非本质性的？从而能否把这个题目作出推广，去发现一类问题的一般解法？(5)作者写这个例题

的目的何在？从中我应该学到什么？用这种办法阅读例题总结经验可以有针对性地加深对例题的理解，从而可能学到更多的东西。

第三，一章学完之后结合本章小结首先要弄清并掌握理论体系的来龙去脉（即前后左右的逻辑关系），然后再去做习题。而且在做习题时要自觉站在理论的全局之上分析要作的题目，并把解题的经验上升到理论，用来丰富自己对理论的理解。

我在教课和写这本书的过程中经常参阅下列书籍和一些有经验的教师们发表的文章，并经常和本教研组中许多同志讨论。有些好的讲法、例题和习题就来自这些文献和讨论，文中就不一一列举了。在此我向这些书和文章的作者们，向教研组中的许多同志致意，并把这些书目介绍给同学们：

（1）史济怀：《平均》（中国青年出版社）

（2）张弛：《不等式》（上海教育出版社）

（3）（苏）С. И. 诺沣塞洛夫《代数与初等函数》（中译本，高等教育出版社）

本书承北京师范大学数学系蒋铎副教授以及出版社的编辑同志审阅了原稿，提出了许多宝贵意见，对提高本书的质量很有益，在此我向他们表示深切的谢意。

最后，由于本人水平有限，书中一定还有不妥之处，诚恳希望阅读本书的同学们、同志们提出批评、指正。

作者于北京四中数学教研组

目　录

预备知识*——充要条件

在展开本书各章的内容之前，我们先学习阅读本书的预备知识——充要条件。

数学上为了表达两个命题（或说成两个事件）之间的因果关系，需要引入充要条件的概念。

设 A、B 是两个命题：

1．$A \Rightarrow B$(箭头表示由 A 成立能推出 B 成立)，

（i）**称 A 是 B 的充分条件**（就是保证 B 成立的条件）。

例如，
$$x = y \Rightarrow x^2 = y^2,$$
即说“$x = y$”是使“$x^2 = y^2$”成立的充分条件；

再如两个三角形全等⇒这两个三角形面积相等，

即说“两个三角形全等”是使“两个三角形面积相等”成立的充分条件。

（ii）**称 B 是 A 的必要条件**（就是使 A 成立所必需的条件）。

事实上，根据大家在初中阶段所学过的四个命题之间的关系不难得出：“$A \Rightarrow B$”与“A 否 $\Leftarrow B$ 否”是等价的。后一个关系表明，B 不成立就可导出 A 不成立，即 B 是 A 成立所必需的。

例如，
$$x = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 = 2,$$
即说“$x^2 = 2$”是使“$x = \sqrt{2}$”成立的必要条件；

---

* 这是学习本书第二章时的预备知识，你在学第一章时可以先略去。

再如，$$x=y\Rightarrow x^2=y^2,$$
即说“$x^2=y^2$”是使“$x=y$”成立的必要条件。

注意 由这两个定义可知，要判断两个命题A与B，谁是谁成立的充分（或是必要）条件，关键是先判断A与B的因果关系。若A是因，B是果(即$A\Rightarrow B$)，对果B而言，因A是它成立的充分条件；对因A而言，果B是它成立的必要条件。(若B是因，A是果呢?)。反之，若已知A是B的充分条件，我们也可以判断A与B之间的因果关系是$A\Rightarrow B$。

练习

1．填下表

A	B	A是使B成立的什么条件
$a^2=b^2$	$a=b$	
$a=b$	$a^3=b^3$	
$a=0$	$ab=0$	
$a\neq 0$	$ab\neq 0$	

2．将下列语句先“翻译”成因果关系(用箭头表示)，再判断A是F的什么条件；E是B的什么条件?

“A是B的充分条件；C是B的必要条件；C是D的充分条件；E是D的必要条件；F是E的必要条件”。

2．$A\Leftrightarrow B$(双箭头表示由A成立能推出B成立；同时，由B成立也能推出A成立)。

（i）A既是B的充分条件；

A又是B的必要条件。

就称A是B的充要条件。

(ii) 完全同样的，**称B是A的充要条件。**

例如，因为三角形的两个底角相等$\Leftrightarrow$三角形是等腰的，所以，“两底角相等”是使“三角形等腰”成立的充要条件；或者，“三角形等腰”是使“三角形两底角相等”成立的充要条件。

由此定义可知，互为因果的两个命题A与B(即$A\Leftrightarrow B$)，A是B的充要条件；B也是A的充要条件，这样的两个命题A与B，在数学上我们称它们是彼此“**等价的**”，用符号“$A\Longleftrightarrow B$”表示之。

练习

1．写出下列命题的充分条件：

(1) 多边形是个正多边形；

(2) 在$\triangle ABC$中，$\angle A$的平分线，BC边上的中线，BC边上的高线，这三线合一；

(3) 四边形的对角线互相平分；

(4) $x^2=1$；

(5) $y=kx+b$是增函数。

上述各个题目中，你写出的充分条件都是必要条件吗？为什么？

2．写出下列命题的一个必要条件：

(1) 两个三角形全等；

(2) $x^2=y^2$。

你所写出的这个必要条件是充分的吗？为什么？

3．填表：(应先判断A与B之间的因果关系，作为填表的依据)

A	B	A是B成立的什么条件
各边都相等的四边形	四边形是正方形	
各边都相等的四边形	四边形是菱形	
$\angle A$和$\angle B$是对顶角	$\angle A=\angle B$	
$\lvert x\rvert=\lvert y\rvert$	$x^2=y^2$	
$y=\log_a x(0<a<1)$	$y=\log_a x$是x的减函数	
$a=b$	$a+m=b+m$	
$a=b$	$am=bm$	

通过上面的练习大概你已经发现：一个命题的充分条件不一定是它的必要条件；反之，一个命题的必要条件也不一定是它的充分条件。事实上，从因果关系（逻辑关系）上看，这是很明显的，因为若A是B的充分条件，就有$A\Rightarrow B$。但由此不一定能得出$B\Rightarrow A$。所以A不一定是B的必要条件。同理可以得出后一个论断。

练习

1．举例：

（1）是命题的充分条件，但不是必要条件；

（2）是命题的必要条件，但不是充分条件。

2．找出下列命题的充要条件，并证明之：

（1）四边形的两条对角线互相平分；

（2）函数$y=kx+b$是x的增函数。

（提示：找充要条件的方法一般是先求必要条件，然后证明所找的必要条件也是充分的；或先找出充分条件，然后证明所找出的也是必要条件）。

第一章 不 等 式

本章目的：把初中阶段从感性上得到的不等式的知识上升到理性，并加以扩充，使之形成系统的完整的理论体系（参看本章目录）。

对同学的要求：

1° 首先弄清不等式的理论体系是怎样长成的？学会用“知识结构”的思想掌握知识。有些同学学习这部分内容只是记住结论，不去认真弄清楚这些理论发生、发展、长成的全过程。这种学法是不能很好地掌握理论的，更不能形成创造性地研究学问的能力；

2° 不等式与等式（方程）有密切的联系，要自觉地通过对比进行学习；

3° 学会“站在理论体系的全局之上”观察分析问题，提高解题能力。

§1.1 实 际 问 题*

在日常生活和生产实践中，我们不仅经常会碰到量与量之间的“相等”关系（想一想：能举出实例吗？处理这类问题的数学方法是什么？）而且还会碰到量与量之间的“不等”关系。例如：

* 本节的主要内容取自张驰的书《不等式》。

（i）我们周围所能见到的绝大部分管道，如自来水管、烟筒等的横截面为什么都制成圆形而不制成正方形或三角形呢？

（ii）在海拔200米的山顶上施放一个气球，若气球平均每秒钟上升1.5米，那么气球位于海拔500米～600米的高空是在施放后什么时刻？

如果你细心想一想的话，类似的实例大概你也会举出一些。

（iii）给你一块正方形的白铁片，要你制成一只无盖的盒子。大概你会想到在它的四个角各剪去一个相等的小的正方形，然后就可以弯折成盒子了（图1-1）。

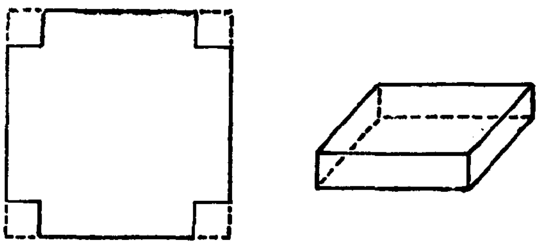

图 1-1

可是，你想过没有：要想使制成的盒子有最大的体积，应该剪去边长多大的小正方形？

（iv）晚上在灯下做功课的时候，电灯吊在离桌面多高处才能使桌面照得最亮？

以上这些问题都与不等式有关，都可以用不等式的理论来解决。这说明不等式的理论与日常生活，科学研究和生产实践有密切的关系。正因为如此，不等式是初等数学和高等数学的重要内容，是学习其他科学的基础之一。

让我们初步分析一下上面的问题吧。

看例(i)。管道的横截面制成圆形而不制成正方形，这类问题从数学上来看，那是因为在管道横截面相等的条件下，圆形截面的周长始终比正方形截面的周长要小。所以要制成流量相等的水管，采用圆筒形总比方筒形要节省材料。事实上，若圆的面积是S，半径就是$\sqrt{\frac{S}{\pi}}$，周长就是$2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}}$；若正方形的面积是S，边长就是$\sqrt{S}$，周长就是$4\sqrt{S}$。要确认上面的论点，就需要证明

$$2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}}<4\sqrt{S}, \qquad ①$$

对于任意正数S都成立。

也许有的同学会问，管道的横截面若制成长方形或正三角形会不会比圆形省材料呢？这个问题的回答和上面的问题是类似的，建议你学完§1.4以后，自己来解决它。

再来看例(ii)。设施放后t秒钟气球位于海拔500米～～600米的高空，则有

$$500<200+\frac{3}{2}t<600, \qquad ②$$

欲求时刻t，就应当去解不等式②。

不等式的问题，主要分为两大类：一是绝对不等式的证明，就是论证不等式在字母取值的范围内永远成立的问题。如证明上面的不等式①对任意正数S都成立等。二是条件不等式的求解，就是解不等式。如解上面的不等式②等。但是不论解决哪一类问题都需要建立不等式的系统的严密的理论体系（见后面几节）。有了科学的理论体系作指南，我们去解决实际问题才能方向明，方法对，对作出的结果才能有把握。同时，不等式在高等数学中的作用远比在初等数学中要大得

多，因此学好不等式是我们今后继续深入学习高等数学和现代科学的桥梁之一。

§1.2 不等式的概念

因为复数没有建立大小顺序，所以本章内容均限定在实数集合中。因此所有的字母都表示实数。

1. 两实数比大小的定义

在初中阶段，我们是借助于几何直观，用两实数所对应的数轴上的点的左、右顺序来规定它们的大小的。现在我们给它下一个严格的定义：

定义 1 对于两实数 a，b，

(i) 若 $a-b>0$，则称 a 大于 b，记作 $a>b$；

(ii) 若 $a-b=0$，则称 a 等于 b，记作 $a=b$；

(iii) 若 $a-b<0$，则称 a 小于 b，记作 $a<b$。

注意

1° 对一个数学定义的理解，应当抓住两个方面。例如，定义 1 的(i)：由 $a-b>0$ 可以判断出 $a>b$；反过来，由 $a>b$ 可以推出 $a-b>0$。这两个方面一般称为数学定义的二重性。根据数学定义的二重性，定义 1 又可以写成：

$$a-b>0 \Longleftrightarrow a>b;$$

$$a-b=0 \Longleftrightarrow a=b;$$

$$a-b<0 \Longleftrightarrow a<b.$$

这使我们看到，定义 1 的实质是用"a 与 b 的差"来规定 a 与 b 的大小。因此，要比较 a 与 b 的大小，只要研究 $a-b$ 的符号就行了。

2° 这个定义是不等式理论的基石。这一点请同学们在

往下学的时候要认真体会。

例 1 若 $c > a > b > 0$，证明 $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$。

分析 根据定义 1，只须研究左与右的差（我们今后把它记成 A）的符号就行了。

证 $\because A = \frac{a}{c-a} - \frac{b}{c-b} = \frac{a(c-b)-b(c-a)}{(c-a)(c-b)}$

$$= \frac{c(a-b)}{(c-a)(c-b)},$$

而 $c > a > b > 0$，

$\therefore$ $c-a > 0$，$c-b > 0$，$a-b > 0$，

于是 $A > 0$。

$\therefore$ 原式成立。

练习

用定义 1 证明：

1. 若 $a > b$，$e > f$，$c > 0$，则 $f - ac < e - bc$。
2. 若 $a > b > 0$，$c < d < 0$，$e < 0$，则

$$\frac{e}{a-c} > \frac{e}{b-d}。$$

关于两实数比大小，我们还可以得出下面的

定理 对于任意两个实数 a、b，下列三种关系

$$a > b；\quad a = b；\quad a < b$$

有且只有一种成立。

证 根据正、负数的定义，实数 $(a-b)$ 或为正数，或为负数，或为零，三者必居其一且仅居其一。再由定义 1，立刻知道本定理成立。