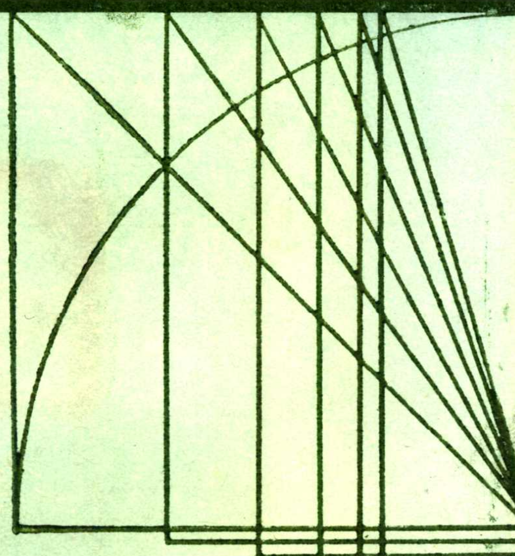
上

高等数学导论

GAODENG SHUXUE DAOLUN



中国科学技术大学
高等数学教研室 编

中国科学技术大学出版社

高等数学导论

上　册

中国科学技术大学高等数教研室　编

中国科学技术大学出版社

1988·合肥

高 等 数 学 导 论

上 册

中国科学技术大学高等数教研室 编

责任编辑：刘卫东 封面设计：盛琴琴

*

中国科学技术大学出版社出版

（安徽省合肥市金寨路96号）

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行 各地新华书店经售

*

开本：850×1168/32 印张：9.625 字数：248千

1988年9月第1版 1988年9月第1次印刷

印数：1—5000册

ISBN7-312-00042-8/O·15

书号：13474·15 定价：2.10元

内 容 提 要

本书是中国科学技术大学非数学专业通用的讲义，在三十年的使用过程中，经过不断的修订、充实而成的．与同类书相比，其广度有所拓宽，论证定理、公式逻辑严谨，编排内容循序渐进，阐述概念联系实际，深入浅出．为加深对概念、定理等的理解和掌握，书中编有丰富的例题．

本书分三册出版．上册讲述单变量函数微积分，中册讲述空间解析几何、多变量函数微积分，下册讲述级数与常微分方程．本书另配习题集一册．

上册内容包括函数的极限，单变量函数的微分学，单变量函数的积分学，可积微分方程共四章．

本书可作理工科院校非数学专业或师范类院校数学专业的教材或教学参考书，也可供具有一定数学基础的读者自学．

序

我怀着喜悦的心情，期待着“高等数学导论”的出版。

每当我和我的同事们在修订这部“导论”时，不免回忆起那些为“导论”的诞生和发展作出过卓越贡献的专家、教授和学者，他们的名字将永远銘刻在我们的心中。

“导论”的前身是“高等数学讲义”。早在中国科学技术大学成立的初期，在原数学系系主任华罗庚教授，原高等数学教研室主任关肇直教授，副主任艾提教授及龚昇教授的亲切关怀和直接指导下，就已成立了以曾肯成教授为主笔的“讲义”编写小组。他们根据当时高教部所颁发的高等数学大纲，结合我校的特点，陆续地编写出了供除数学系外其它各系通用的“高等数学讲义”。这部讲义文笔生动，语言简练，深入浅出，通俗易懂，所以它一出现，就得到了外系师生的热烈欢迎和一致好评。

1977年，中国科学技术大学重新恢复了招生。“讲义”又先后经过了徐澄波教授、蔡宗熹教授、钟立敏副教授、夏宗威副教授以及高等数学教研室许多教师的试教、修订、充实，逐渐形成了现在的“导论”。

这次出版的“导论”共分上、中、下三册和一本配套的习题集。各册的内容分别为：单变量函数微积分；空间解析几何、多变量函数微积分及场论；级数与常微分方程。

尽管现在已经有了很多物理型的高等数学教程，但是“导论”仍有其独特之处。

由于高级中学的数学教材已经改革，函数的概念、极限论及微积分的计算法作为教学内容之一已有比较详尽的叙述。考虑到这些因素，“导论”已把现行教材的极限论补充得更加完善，使

其不再是中学极限论的简单重复，而是它的深化和发展。具体做法是：删去传统的初等函数一节，并以单调有界数列必有极限为公理建立起极限论。凡所涉及的定理如柯西收敛准则，闭区间连续函数的性质等都给以严格的论证。

高等数学的概念及方法都是从研究各种物质形态及各种运动形式的数量关系而产生的。例如，导数或积分的概念就是从速度、切线或曲边梯形的面积引入的；而第二型面积分，线积分各是从流体流过闭曲面的流量，力场对沿曲线运动的质点所作的功抽象而成的。“导论”除了注意从实际问题引入这些概念外，还对所涉及的各种定理及公式，例如勾通微分学与积分学的牛顿—莱布尼兹公式、高斯定理、重积分的计算公式等的物理背景或几何直观都作了说明，以消除微积分的神秘感。

在讲述微分方程时，一旦解已求得，“导论”又引导去讨论解的物理意义，以使读者认识到数学不仅是一些符号、公式的堆积，而且是解决物理、力学中所遇到的问题之有力武器。

关于场论的处理，“导论”则引进哈密顿算符∇和外微分形式，这就使得梯度、散度、旋度及其各种公式统一于一体，便于记忆。

为了紧密配合“导论”，在“讲义”原有习题的基础上，又从历届研究生的试题，国内外高等数学竞赛题中精选了一批有意义的题目，进行分类、加工、充实，自成一习题集。

“导论”的其它特点在此就不一一赘述了。

正是由于“导论”保持了原有“讲义”的特色，而且还进行了切合实际的改革，所以它也受到兄弟院校师生的青睐。如有的院校采用这套教材进行教学，效果良好。因此“导论”的出版就是有价值的。

在使用这一教材的过程中，史济怀，常庚哲，何琛，陶懋颀等教授；陈龙玄，杜锡录，顾新身，王天威，陈祖墀，张鄂堂，周永佩，张声雷，杨孝先，吴肇曼，李金平等副教授；缪柏其博

士；曾宪立，尹业富，汪惠迪，陈群标，徐俊民，奚宏生等讲师，提出了许多建设性的意见，这些意见我在定稿时已加以利用。

配套的习题集是由高等数学教研室陈秋桂讲师在校正了全部答案，并作了重新编排后完成的；我还要指出的是高等数学教研室的薛春华讲师，她也参加了“讲义”的修订工作。

由于水平所限，謬误与不妥之处实属难免，敬请读者批评指正。

陈 登 远

1987 年 9 月于合肥

目　　录

第一章　函数的极限

极限理论是微积分学的基础，它是研究函数性质的有力工具。本章主要用精确的数学语言来讨论数列极限，函数极限，并引出在数学分析中有着广泛应用的一类重要的连续函数。

第一节　数列极限

1.1.1　数与绝对值

在人们长期的生产实践中，逐渐形成了各种各样的数。例如为了记一群羊的头数，就产生了自然数；如果用正方形的边长去度量对角线的长度就得到了无理数等等。一切有理数和无理数统称为实数。

设取定一数轴 L，我们知道，任一实数 a 都对应着数轴 L 上唯一的一点 A；反之，数轴 L 上的每一点 A 也唯一地表示一个实数 a（图 1.1）。即全体实数和数轴上的点存在着一一对应的关系。正是由于这种对应关系，所以在今后的许多场合中，将不严格区分数轴上的一点与其对应的数，常把数 a 称为点 a。

任给一个数 a，在数轴上对应的点为 A，考察点 A 到原点 O 的距离 OA。若 a 非负，这个距离就是数 a，$OA=a$；若 a 小于零，则 $OA=-a$。因此无论数 a 有怎样的符号，即无论点 A 在原点 O 的左方或右方，距离 OA 总是一个非负实数（图 1.2）。我们将这个与数 a 相对应的非负实数称为数 a 的绝对值，记为 $|a|$，即

定义

$$|a|=\begin{cases} a & a\geqslant 0, \\ -a & a<0. \end{cases}$$

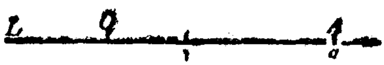


图 1.1

图 1.2

数的绝对值具有以下性质：

1° 设 a，b 是二实数，且 $|a|\leqslant b$，则 $-b\leqslant a\leqslant b$；反之亦真。

证 设 $|a|\leqslant b$，由绝对值的定义得 $a\leqslant b$ 和 $-a\leqslant b$。后一不等式可写成 $a\geqslant -b$，从而得到

$$-b\leqslant a\leqslant b.$$

反之由 $-b\leqslant a\leqslant b$ 得 $a\leqslant b$ 和 $-a\leqslant b$。但 a 与 $-a$ 之一是 a 的绝对值，故有

$$|a|\leqslant b.$$

从数轴上看，这个性质说明适合不等式 $|a|\leqslant b$ 的点必落在点 $-b$ 和点 b 之间。

2° 设 a，b 是二实数，则

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

就是二数和的绝对值不大于它们各自绝对值的和，不小于各自绝对值的差。

证 因为

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|,$$
$$-|b|\leqslant b\leqslant|b|,$$

于是得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|.$$

由性质 1° 这个不等式就是

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

又因

$$|a| = |(a+b)+(-b)| \leqslant |a+b| + |-b|,$$

而$|-b| = |b|$，移项即得

$$|a| - |b| \leqslant |a+b|.$$

若以$-b$代替性质2°中的不等式之b又得

$$|a| - |b| \leqslant |a-b| \leqslant |a| + |b|.$$

就是二数差的绝对值不大于它们各自绝对值的和，不小于各自绝对值的差。

3° **设a，b是二实数，则**

$$|ab| = |a||b|.$$

就是二数积的绝对值等于它们各自绝对值的积。

4° **设a，b是二实数，且b不为零，则**

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

就是二数商的绝对值等于它们各自绝对值的商。

作为练习我们把这两个性质的证明留给读者。

1.1.2 数列极限的定义

设有定义在全体自然数上的函数$a_n = f(n)$，当自变量顺次取自然数的值时，函数a_n的值可以排列成先后有序的一串实数

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots,$$

这样的有序数串称为数列，简记为$\{a_n\}$，其中的每一个数叫做数列的**项**，第n项a_n叫做数列的**通项**。例如

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{n}{n+1}\right\}, \left\{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}, \{(-1)^{n-1}\}$$

就分别表示数列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots,$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots,$$

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{(-1)^{n-1}}{n},\ \cdots,$$

$$1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^{n-1},\ \cdots.$$

在所列举的这些数列中容易看出，前三个数列随着 n 无限增大时无限接近于定数0，1，0，或者说0，1，0各是它们的极限；而最后一个数列正好相反，当 n 无限增大时它始终在1和－1这两点来回跳动不接近于任何定数，或者说这个数列不以任何数为它的极限。

一般说来，如果数列$\{a_n\}$当 n 无限增大时无限接近于定数a，就称$\{a_n\}$的极限是 a。为了精确地给出数列极限的定义，我们再深入地分析**无限接近**的数学含义。

设想在数轴上标出定数 a 和数列的项 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，既然随 n 不断增大，a_n要无限接近于 a，那末从直观上看来，就是当 n 相当大后，点 a_n 都要落在点 a 的附近，与 a 的距离很小。现在任意给定一个正数 ε，作一个以 a 为中心的开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$，并称它为点 a 的 ε 邻域。于是凡落在这个邻域中的那些点 a_n 与点 a 的距离都必小于 ε。对于任意给定的 ε 邻域，我们顺次地观察数列$\{a_n\}$中的各项，它们中的每一个或者落在邻域 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 中，或者留在这个邻域外。但是，如果有无限多项留在邻域$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$之外，就是无论在数列多么靠后的地方，总要遇到这样的项，它与点 a 的距离大于 ε。这时当然不能说 a_n 无限接近于 a 了。故若 a_n 无限接近于 a，那末留在邻域$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$外的项一定只有有限多个。设这有限多个项的最大下标是N，于是下标大于N的所有各项，亦即从第 $N+1$ 项开始的各项 a_n $(n>N)$都统统落在 ε 邻域$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$中了（图1.3）；用数学式子表示，就是满足了不等式

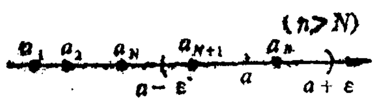


图 1.3

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon,$$

即

$$|a_n-a|<\varepsilon\ (n>N).$$

也就是说所有这些 $a_n (n>N)$ 与点 a 的距离小于 ε。但是要 a_n 能无限接近于 a，就不应该仅对某一固定的 ε，找到如上所述的 N，而应该是对任意的正数 ε 都能相应地找到 N。

综上所述，所谓数列 $\{a_n\}$ 无限接近于 a，就是对任意给定的正数 ε，都可找到这样一个下标 N（它通常与 ε 有关，记为 $N(\varepsilon)$），使 a_N 以后所有的项全部落在区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 中。将这个结论用数学语言表达时，就有

定义　设有数列 $\{a_n\}$ 与定数 a。若对任意给定的正数 ε，总存在这样的自然数 $N(\varepsilon)$，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

成立，则称 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限，记成

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{或} \quad a_n \to a \ (n\to\infty).$$

数列 $\{a_n\}$ 以 a 为极限也说成数列 $\{a_n\}$ **收敛**于 a。

这个定义用 ε，N 的简练语言把数列极限的概念完全精确地刻画出来，称之为**极限的 ε-N 定义**。

下面考察几个简单的例子。

例 1　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$。

证　对于任意给定的正数 ε，要使 $\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$ 成立，只须 $n>\frac{1}{\varepsilon}$。若用记号 $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 表示不超过 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的最大整数，并取自然数 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 时就有 $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$。这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$。

同样可以证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=0$，因为 $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}-0\right|=\frac{1}{n}$。

例 2　证明对任意的正数 α 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0$。