线性代数题解集

杨儒生　朱平天　编著

江苏教育出版社

线性代数题解集

杨儒生　朱平天　编著

责任编辑　王建军

出版发行：江苏教育出版社

（南京中央路165号，邮政编码：210009）

经　　销：江苏省新华书店

照　　排：南京理工大学激光照排公司

印　　刷：扬中市印刷厂

（扬中市前进北路22号　邮政编码：212200）

开本 850×1168 毫米　1/32　印张 12.75　字数 320,000

1996年9月第1版　1999年1月第3次印刷

印数 4031—6060

ISBN　7—5343—2820—9

G·2551　　定价：13.00元

编者的话

这本题解集覆盖了线性代数的全部内容，包括行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、矩阵的特征值与特征向量、线性变换、λ-矩阵与欧氏空间九个部分，共约1000题。这些题分五种类型：选择题、判断题、填充题、计算题与证明题，其中选择题、判断题与填充题约600多题，这是本书的一个特点。标准化题对读者具有启发思维、引导深入理解、掌握线性代数的基本概念与基本理论的作用；计算题与证明题体现了线性代数的基本运算要求与理论证明的基本思想方法。一部分较难的题体现了研究生入学考试线性代数试题的要求。

在编排系统上，力求由浅入深，与高等院校使用的线性代数教材（或高等代数中的线性代数部分）基本上同步。每个题目都给出了解答。它既对正在学习线性代数或高等代数的读者有很好的辅导作用，也是报考研究生的读者复习线性代数很适合的辅导书。由于本书是编者在长期的教学实践中逐渐积累编写而成的，因此它对于从事线性代数课教学的老师提供了现成的富有思考性的课堂教学补充题及考试试题，是一本很实用的教学参考书。

在编写这本书的过程中，南京师范大学原代数教研室的教师提供了许多宝贵的意见，徐新萍同志提供了行列式的部分题目，特在此致谢。

由于我们水平有限，疏漏甚至错误之处，欢迎批评指正。

编　者

1995年11月

目　　录

第一章　行　列　式

一　填充题

1. 排列134782695的逆序数为________，排列2173465的逆序数为________.

2. 由1、2、3、4四个数码组成的四级排列共有________个.

3. 由1、2、3、4、5五个数码组成的五级偶排列共有________个，五级奇排列共有________个.

4. 由1、2、3三个数码组成的所有偶排列为________；所有奇排列为________.

5. 若排列 $1274i56k9$ 是偶排列，则 $i=$ ______，$k=$ ______.

6. 若五级排列 $j_1j_2j_3j_4j_5$ 的逆序数为6，则排列 $j_5j_4j_3j_2j_1$ 的逆序数为________.

7. 如果 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数为 k，那么排列 $j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1$ 的逆序数为________.

8. n 级排列 $n(n-1)(n-2)\cdots 321$ 的逆序数为________，当 n 为________时，这个排列为偶排列，当 n 为________时，这个排列为奇排列.

9. 排列 $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$ 的逆序数为________，排列 $(2k)1(2k-1)2\cdots(k+1)k$ 的逆序数为________.

10. 把排列12435作三个对换________、________、________变为排列25341. 排列35412经过对换________变成排列12345，这些对换并不唯一，但所作对换的次数与逆序数 $\tau(35412)$ 具有相同

的________.

11. 四级行列式 $|a_{ij}|$ 中的项 $a_{34}a_{12}a_{43}a_{21}$ 带的符号应为________, $a_{24}a_{12}a_{43}a_{31}$ 带的符号应为________, $a_{32}a_{14}a_{21}a_{43}$ 带的符号应为________.

12. 已知 $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{24}$ 是四级行列式中的一项，且带负号，则 i = ________, k = ________.

13. 已知 $a_{31}a_{2i}a_{13}a_{5k}a_{44}$ 是五级行列式中的一项且带正号，则 i = ________, k = ________.

14. 已知 $a_{1i}a_{25}a_{3j}a_{41}a_{5k}$ 是五级行列式中的一项，且带正号，其中 $i<j$，则 i = ________, j = ________, k = ________.

15. 利用行列式的定义计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = ________; (2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = ________;

(3) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ = ________;

(4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 4 & 11 & 0 & 12 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ = ________;

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = ________;

(6) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$ ________;

(7) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} =$ ________;

(8) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ ________;

(9) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} =$ ________;

(10) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ ________;

(11) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & d & 0 \end{vmatrix} =$ ________;

(12) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & e \\ 0 & b & f & 0 \\ 0 & g & c & 0 \\ h & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ ________.

16. 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 2 & 1 & x \\ 3 & x & 2 & 1 \\ 2 & 1 & x & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数为 ________, $g(x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 3x \\ -1 & 1 & x & x \\ 1 & x & 5 & 2 \\ x & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 中 x^4 的系数为 ________, x^3 的系数为________.

17. 若 $a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$ 是 n 级行列式 $|a_{ij}|$ 中的一项，则这一项带的符号为________.

18. 若 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 是 n 级行列式 $|a_{ij}|$ 中的一项，则这一项带的符号为________.

19. 计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 503 & 201 & 298 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$ ________;

(2) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 196 & 203 & 199 \end{vmatrix} =$ ________;

(3) $\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a+3 \\ b+1 & b+2 & b+3 \\ c+1 & c+2 & c+3 \end{vmatrix} =$ ________;

(4) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} =$ ________；　　(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ ________；

(6) $\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & b_1 - c_1 & c_1 - a_1 \\ a_2 - b_2 & b_2 - c_2 & c_2 - a_2 \\ a_3 - b_3 & b_3 - c_3 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} =$ ________；

(7) $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} =$ ________(其中 ω 是 1 的立方虚根)；

(8) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$

$=$ ________.

20. 计算行列式：

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_2 & -b_1 & 0 & c_1 & c_2 \\ -a_3 & -b_2 & -c_1 & 0 & d \\ -a_4 & -b_3 & -c_2 & -d & 0 \end{vmatrix} = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_}.$$

21. 已知

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix},$$

D 的元素 -1、0、4 的代数余子式分别为________，________，

________.

22. 已知

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix},$$

用 A_{ij} 表示 D 的元素 a_{ij} 的代数余子式(i、$j=1,2,3$)，则 $2A_{13}+A_{23}-4A_{33}=$ ________，$-2A_{21}-3A_{22}+A_{23}=$ ________，$3A_{21}-A_{22}+2A_{23}=$ ________，$3A_{11}-3A_{22}-4A_{33}=$ ________.

23. 已知

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

用 A_{ij} 表示 D 的元素 a_{ij} 的代数余子式($i,j=1,2,3$)，则行列式

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

24. 行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 8 & -5 & 7 \end{vmatrix}$$

中子式

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix},$$

的代数余子式依次为________，________，________，利用拉普拉斯定理，D 按前两行展开得 $D=$ ________.

25. 行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

的前两行的所有二阶子式的代数余子式共有________个，对 D 按前两行展开行列式得 $D=$ ________.

26. 如果线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解，那么 $a=$ ________.

27. 方程

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7-x^2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 8 & 15-x^2 \end{vmatrix}=0$$

的全部根为________________.

28. 方程

$$\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix}=0$$

的全部根共有________个（重根按重数计算），这些根为________.

29. 计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}=$ ________；

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 8 & 6 & 2 \\ 5^2 & 8^2 & 6^2 & 2^2 \\ 5^3 & 8^3 & 6^3 & 2^3 \end{vmatrix} =$ ________;

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 180 & 79 & 1 & 2 & 0 \\ 87 & 43 & 0 & 3 & 4 \\ 968 & 508 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$ ________.

30. 若行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k$,则行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & 3(a_1 + a_3) & \frac{1}{2}a_2 \\ b_1 & 3(b_1 + b_3) & \frac{1}{2}b_2 \\ c_1 & 3(c_1 + c_3) & \frac{1}{2}c_2 \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

· **31.** 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sin a & \sin b & \sin c & \sin d \\ \cos 2a & \cos 2b & \cos 2c & \cos 2d \\ \sin 3a & \sin 3b & \sin 3c & \sin 3d \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

答案与提示

1. 10、6;　　**2.** 24;

3. 60、60;　　**4.** 123、231、312;132、213、321;

5. $i = 8, k = 3$;　**6.** 4;

7. 对于每个数码 j_i 来说,比 j_i 大的数码有 $n - j_i$ 个,所以,由 j_i

与比它大的各个数码在两个排列中所构成的逆序数的和为 $n-j_i$. 因此，两个排列的逆序总数为

$$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

从而排列 $j_n j_{n-1}\cdots j_2 j_1$ 的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2}-k$.

8. 排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2}$，当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，这个排列为偶排列，当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，这个排列为奇排列；

9. $\frac{n(n-1)}{2}$，k^2；

10. $(1,2)$，$(1,5)$，$(3,4)$；$(1,3)$，$(2,5)$，$(3,4)$，奇偶性；

11. $+$、$-$、$-$；

12. $i=3$，$k=1$；

13. $i=5$，$k=2$；

14. $i=2$，$j=4$，$k=3$；

15. (1)24；

(2)120；

(3) -24；

(4)120；

(5)$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$；

(6)$(-1)^{n-1}n!$；

(7)$(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$；

(8)0；

(9)$a^n+(-1)^{n+1}b^n$；

(10)a^3；

(11) $-abcd$；

(12)$abcd-afgd+efgh-ebch$.

16. -3、3、1；

17. $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}$；

18. $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$；

19. (1) -70；

(2)8；

(3) 将第3列减第2列，第2列减第1列，即得第2、3两列成比例，行列式为0；

(4)$(a+2)(a-1)^2$；

(5) $-(\lambda+2)(\lambda-1)^2$；

(6)0；

(7) 将前两行加到第 3 行上去，由于 $1+\omega+\omega^2=0$，这时第 3 行变为零行，故行列式为 0；

(8) 将第 1 行加到第 2 行上去，再将第 2 行加到第 3 行上去，依次进行这样的变换，直到最后为把第 n 行加到第 $n+1$ 行上去，这样 就得到一个主对角线上元素全是 1 的上三角形行列式，故行列式的值为 1.

20. 将原式记为 D，把 D 的每一行提出一个 (-1) 得

$$D=-\begin{vmatrix} 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_1 & 0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ a_2 & b_1 & 0 & -c_1 & -c_2 \\ a_3 & b_2 & c_1 & 0 & -d \\ a_4 & b_3 & c_2 & d & 0 \end{vmatrix}=-D'=-D,$$

$2D=0$，故 $D=0$；

21. 11、-11、-11；　　**22.** 37、37、0、113；

23. 利用行列式的乘法法则计算得

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{vmatrix}=D^3,$$

$$\therefore \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}=D^2=3^2=9.$$

24. 22、20、29；-81.

25. 6，$D=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+2+4}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}=20.$

26. $a=-2$ 或 1.

27. 把方程左边的行列式记为 D，由于 D 是四次多项式，所以方程有且只有四个根. 由于 $7-x^2=3$ 时，D 的前两行相同，$D=0$，从而得到原方程的两个根：$x_1=2, x_2=-2$. 又当 $15-x^2=6$ 时，$D=0$，于是原方程还有两个根：$x_3=3, x_4=-3$. 原方程的全部根为 2、−2、3、−3.

28. ∵

$$D=\begin{vmatrix}1+x & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2+x & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3+x & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4+x\end{vmatrix}$$

$$=(1+2+3+4+x)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2+x & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3+x & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4+x\end{vmatrix}$$

$$=(x+10)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & x & 0 & 0\\ 0 & 0 & x & 0\\ 0 & 0 & 0 & x\end{vmatrix}=(x+10)x^3.$$

∴ 原方程为$(x+10)x^3=0$.

全部根共有 4 个. 它们是 $x_1=-10, x_2=x_3=x_4=0$.

29. (1)12;(2)432;(3)154.

30. $-\frac{3}{2}k$.

31. $8(\sin a-\sin b)(\sin a-\sin c)(\sin a-\sin d)\cdot(\sin b-\sin c)(\sin b-\sin d)(\sin c-\sin d)$

二　判断题

1. 排列 2431 必定经过偶数次对换变为排列 1234.　　(　　)

2. 排列 217986354 必定经过奇数次对换变为排列 123456789.
( )

3. 排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n$ 与排列 $j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1$ 的奇偶性相反.
( )

4. 如果 $i_1i_2i_3i_4i_5i_6$ 是奇排列，那么 $i_1i_6i_2i_4i_5i_3$ 是偶排列. ( )

5. $a_{13}a_{24}a_{31}a_{43}a_{55}$ 是五级行列式中的一项. ( )

6. $a_{21}a_{13}a_{34}a_{55}a_{42}$ 是五级行列式中的一项且带有“－”号.
( )

7. 四级行列式中的项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 与 $a_{3j_3}a_{2j_2}a_{1j_1}a_{4j_4}$ 带的符号是互为相反的. ( )

8. 把三级行列式的第一列减去第二列，同时把第二列减去第一列，这样得到的新行列式与原行列式相等，亦即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-a_1 & c_1 \\ a_2-b_2 & b_2-a_2 & c_2 \\ a_3-b_3 & b_3-a_3 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (\quad)$$

9. 把三级行列式的第一行减去第二行的 2 倍，同时把第一行的 3 倍加到第二行上去，所得的新行列式与原行列式相等. 亦即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-2a_2 & b_1-2b_2 & c_1-2c_2 \\ a_2+3a_1 & b_2+3b_1 & c_2+3c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (\quad)$$

10. 如果 $x \neq 0$，那么行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (\quad)$$

11. $$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (\quad)$$

12. $\begin{vmatrix} a_1+la_2+ma_3 & a_2+na_3 & a_3 \\ b_1+lb_2+mb_3 & b_2+nb_3 & b_3 \\ c_1+lc_2+mc_3 & c_2+nc_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

( )

13. $\begin{vmatrix} c & a & b & d \\ a & c & b & d \\ a & c & d & b \\ c & a & d & b \end{vmatrix} = 0$. ( )

14. $\begin{vmatrix} a+b & l \\ k & c+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & l \\ k & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix}$. ( )

15. $\begin{vmatrix} a_1+a_1' & b_1+b_1' & c_1+c_1' \\ a_2+a_2' & b_2+b_2' & c_2+c_2' \\ a_3+a_3' & b_3+b_3' & c_3+c_3' \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix}$. ( )

16. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. ( )

17. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & e \\ 0 & b & f & 0 \\ 0 & g & c & 0 \\ h & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd - efgh$. ( )

18. 已知

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

用 A_i、B_i、C_i 分别表示元素 a_i、b_i、c_i 的余子式($i=1,2,3$)，则 a_3A_3