

同济四版配套辅导

最新线性代数

(第四版)
习题全解

王治军 主编

- 基本知识点窍
- 同步题型精解
- 提高题型精解
- 考研题型精解
- 综合题型精练
- 综合题型解答

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

中国建材工业出版社

最新线性代数(第四版) 习题全解

同济大学《工程数学:线性代数》第四版配套辅导

王治军 主编

中国建材工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

最新线性代数(第四版)习题全解/王治军主编. - 北京:中国建材工业出版社, 2003.8

ISBN - 7 - 80159 - 515 - 7

I. 最… II. 王… III. 线性代数 - 高等学校 - 习题 IV. 0151.2 - 44
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 078161 号

【内容简介】本书是为配合高等教育出版社出版、同济大学编写的《工程数学:线性代数》第四版编写的习题集。本书由基本知识点窍、同步题型精解、提高题型精解、考研题型精解、综合题型精练、综合题型解答等部分组成。书中巧妙地运用了思路点拨,旨在帮助读者掌握课程重点,学会分析方法,提高解题能力。

最新线性代数(第四版)习题全解

王治军 主编

出版发行:中国建材工业出版社

地 址:北京市海淀区三里河路 11 号

邮 编:100831

经 销:全国各地新华书店

印 刷:保定市新世纪印刷厂

开 本:850mm × 1168mm 1/32

印 张:17.25

字 数:350 千字

版 次:2003 年 8 月第 1 版

印 次:2003 年 8 月第 1 版

印 数:1 ~ 10000 册

书 号:ISBN 7 - 80159 - 515 - 7/G · 099

定 价:18.00 元

本书如出现印装质量问题,由我社发行部负责调换。

联系电话:(010)68345931

前 言

线性代数作为高等数学重要组成部分,是理工科学生学习其他课程的基础,也是许多专业研究生入学考试的必考科目,为了帮助广大学生扎实地掌握线性代数的知识精髓和解题技巧,提高解答各种题型的能力,我们特约有经验有实力的教师精心编写了这本书。本书紧扣同济四版《线性代数》教材编写而成,实例丰富,讲解透彻,知识梳理与解题技巧并重,并着重剖析解题规律,归纳总结解题套路,并提供有针对性的练习,是一本具有极高价值的辅导书。

本书共分为六章,分别是:第一章行列式;第二章矩阵;第三章向量及其线性相关性;第四章线性方程组;第五章相似矩阵及二次型;第六章线性空间与线性变换。其中每章又细分为**基本知识点窍、同步题型精解、提高题型精解、考研题型精解、综合题型精练、综合题型解答**等六个模块。各模块具有不同的作用和功能,可以做到以下几点:1. 将各章的知识框架和所要掌握的要点总结梳理;2. 点明各种题型的解题套路;3. 用实例进行思路点拨,给出典型题目以供练习并配答案,使学生做到触类旁通,举一反三;4. 给出同济版教材的课后习题答案,以供参考。总之,本书体例严谨科学,版式清晰美观,内容编写尽量从具体、通俗、易懂入手,逐步深入,最终使学生顺利过关。

本书虽经过较长时间的酝酿编写,但限于作者水平,疏漏与不足之处在所难免,恳请读者批评指正。

编者

2003年8月

目 录

第一章 行列式	(1)
第一节 行列式的两种定义	(1)
【基本知识点窍】	(1)
【同步题型精解】	(2)
【提高题型精解】	(7)
第二节 行列式的性质和计算	(13)
【基本知识点窍】	(13)
【同步题型精解】	(15)
【提高题型精解】	(30)
【考研题型精解】	(43)
第三节 行列式的应用	(46)
【基本知识点窍】	(46)
【同步题型精解】	(46)
【提高题型精解】	(51)
【考研题型精解】	(55)
【综合题型精练】	(56)
【综合题型解答】	(59)
第二章 矩 阵	(69)
第一节 矩阵的运算	(69)

最新线性代数(第四版)习题全解

【基本知识点窍】	(69)
【同步题型精解】	(70)
【提高题型精解】	(76)
【考研题型精解】	(80)
第二节 方阵的求逆运算	(81)
【基本知识点窍】	(81)
【同步题型精解】	(82)
【提高题型精解】	(85)
【考研题型精解】	(89)
第三节 矩阵的初等变换与初等矩阵	(92)
【基本知识点窍】	(92)
【同步题型精解】	(94)
【提高题型精解】	(98)
【考研题型精解】	(100)
第四节 分块矩阵	(102)
【基本知识点窍】	(102)
【同步题型精解】	(103)
【提高题型精解】	(109)
【考研题型精解】	(111)
【综合题型精练】	(113)
【综合题型解答】	(116)
第三章 向量及线性相关性	(128)
第一节 向量的线性相关性	(128)
【基本知识点窍】	(128)
【同步题型精解】	(130)

【提高题型精解】	(140)
【考研题型精解】	(145)
第二节 矩阵的秩	(147)
【基本知识点窍】	(147)
【同步题型精解】	(148)
【提高题型精解】	(153)
【考研题型精解】	(157)
第三节 向量空间	(158)
【基本知识点窍】	(158)
【同步题型精解】	(159)
【提高题型精解】	(165)
【考研题型精解】	(170)
【综合题型精练】	(172)
【综合题型解答】	(175)
第四章 线性方程组	(187)
第一节 齐次线性方程组	(187)
【基本知识点窍】	(187)
【同步题型精解】	(188)
【提高题型精解】	(201)
【考研题型精解】	(208)
第二节 非齐次线性方程组	(211)
【基本知识点窍】	(211)
【同步题型精解】	(212)
【提高题型精解】	(227)
【考研题型精解】	(234)

【综合题型精练】	(237)
【综合题型解答】	(240)
第五章 相似矩阵及二次型	(255)
第一节 相似矩阵	(255)
【基本知识点窍】	(255)
【同步题型精解】	(258)
【提高题型精解】	(274)
【考研题型精解】	(284)
第二节 二次型	(288)
【基本知识点窍】	(288)
【同步题型精解】	(290)
【提高题型精解】	(300)
【考研题型精解】	(305)
【综合题型精练】	(308)
【综合题型解答】	(310)
第六章 线性空间和线性变换	(321)
第一节 线性空间	(321)
【基本知识点窍】	(321)
【同步题型精解】	(323)
【提高题型精解】	(333)
【考研题型精解】	(341)
第二节 线性变换	(343)
【基本知识点窍】	(343)
【同步题型精解】	(344)
【提高题型精解】	(352)

目 录

【考研题型精解】	(359)
【综合题型精练】	(361)
【综合题型解答】	(363)
附 录	(376)
【同济四版第一章课后习题精解】	(376)
【同济四版第二章课后习题精解】	(398)
【同济四版第三章课后习题精解】	(424)
【同济四版第四章课后习题精解】	(453)
【同济四版第五章课后习题精解】	(485)
【同济四版第六章课后习题精解】	(529)

第一章 行列式

第一节 行列式的两种定义

【基本知识点窍】

1. 定义 I: n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j}$$

$$\text{其中 } M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做 a_{1j} 的余子式, $A_{1j} = (-1)^{1+j} M_{1j}$, 叫做 a_{1j} 的代数余子式。

2. 排列及其逆序数: 由 $1, 2, \dots, n$ 这 n 个数字组成的一个排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 称为一个 n 级排列; 在一个排列中, 如果有一个大的数排在一个小的数之前, 则称这两个数构成该排列的一个逆序数,

记为 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$; 逆序数为偶数的排列称为偶排列, 逆序数为奇数的排列称为奇排列。

3. 定义 II:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

即等于 n 项的代数和, 其中每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积, 其符号为 $(-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)}$, $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的任一种排列。

【同步题型精解】

例 1-1: 按自然数从小到大为标准次序, 求下列各排列的逆序数:

(1) 1234; (2) 4132; (3) 3421; (4) 2413;

(5) $13 \cdots (2n-1)24 \cdots (2n)$; (6) $13 \cdots (2n-1)(2n)(2n-2) \cdots 42$

【思路点拨】 一个排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数等于每个数字 j_k 的逆序数之和, 如排列 4132 中 2 前比它本身大的数有 2 个, 则 2 的逆序数为 2, 3 前比它本身大的数字有 1 个, 则 3 的逆序数为 1, 1 前比它本身大的数字有 1 个, 则 1 的逆序数为 1, 4 前没有比它本身大的数字, 则 4 的逆序数为 0, 于是排列 4132 的逆序数为 $2+1+1+0=4$ 。

解 (1) 此排列不存在着逆序数, 所以其逆序数为 0;

(2) 因为 4 的逆序数为 0, 1 的逆序数为 1, 3 的逆序数为 1, 2 的逆序数为 2, 所以此排列的逆序数为 $0+1+1+2=4$;

(3) 因为 3 的逆序数为 0, 4 的逆序数为 0, 2 的逆序数为 2, 1 的逆序数为 3, 所以此排列的逆序数为 $0+0+2+3=5$;

(4) 因为 2 的逆序数为 0, 4 的逆序数为 0, 1 的逆序数为 2, 3 的逆序数为 1, 所以此排列的逆序数为 $0+0+2+1=3$;

(5) 因为前 n 个数的逆序数都为 0, 后 n 个数的逆序数分别为 $(n-1), (n-2), \dots, 1, 0$, 所以此排列的逆序数为 $(n-1) + (n-2) + \dots + 1 + 0 = \frac{n(n-1)}{2}$;

(6) 因为前 n 个数的逆序数都为 0, 后 n 个数的逆序数分别为 $0, 2, 4, \dots, (2n-2)$, 所以此排列的逆序数为 $0+2+4+\dots+(2n-2) = n(n-1)$ 。

例 1-2: 如果排列 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 的逆序数为 I , 问排列 $x_n x_{n-1} \cdots x_1$ 的逆序数为多少?

【思路点拨】 排列 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 中 x_n 前比它本身大的数设为 a_1 , 则比它本身小的数就是 $n-1-a_1$, 所以在排列 $x_n x_1 \cdots x_{n-1}$ 后 $n-1$ 个数字中比 x_n 小的数的逆序数都要增加 1, 比 x_n 大的数的逆序数都要减小 1, 于是排列 $x_n x_1 \cdots x_{n-1}$ 的逆序数应为 $I + (n-1-a_1) - a_1$, 同理, 设排列 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 中 x_{n-1} 前比它本身大的数设为 a_2 , 则排列 $x_n x_{n-1} x_1 \cdots x_{n-2}$ 的逆序数应比排列 $x_n x_1 \cdots x_{n-1}$ 的逆序数多 $(n-2-a_2) - a_2$, 故排列 $x_n x_{n-1} x_1 \cdots x_{n-2}$ 的逆序数为 $I + (n-1-a_1) - a_1 + (n-2-a_2) - a_2$, 依此类推, $x_n x_{n-1} \cdots x_1$ 的逆序数为 $I + (n-1-a_1) - a_1 + (n-2-a_2) - a_2 + \dots + 1 - a_n - a_n$, 又知 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = I$, 可求解此题。

解 $x_n x_{n-1} \cdots x_1$ 的逆序数为

$$I + (n-1-a_1) - a_1 + (n-2-a_2) - a_2 + \dots + 1 - a_n - a_n$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} - 1.$$

例 1-3: 写出 4 阶行列式 $D_4 = |a_{ij}|$ 展开式中含有因子 $a_{23}a_{42}$ 且带负号的所有项。

【思路点拨】 利用行列式的第二种定义, 四阶行列式展开式中每一项的一般形式为 $(-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, 对于本题可取 $j_2 = 3, j_4 = 2$, 又所求项是带负号, 可得 $j_1 = 4, j_3 = 1$ 。

解 设这样的项为 $-a_{1j_1} a_{23} a_{3j_3} a_{42}$, 其中行标已成自然排列, 而列标组成 4 级排列 $(j_1, 3, j_3, 2)$, 故 j_1, j_3 只能分别取 1, 4, 或 4, 1, 由于

$$(-1)^{\tau(1,3,4,2)} = (-1)^2 = 1, (-1)^{\tau(4,3,1,2)} = (-1)^5 = -1$$

所以列标组成的排列为 $(4, 3, 1, 2)$, 则所求的项为 $-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 。

例 1-4: 证明

$$D_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

【思路点拨】 由定义知, n 阶行列式共有 $n!$ 项, 每一项的一般形式为 $(-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, 若 n 个元素的乘积中有零因子, 则该项为零, 所以只须找出不为零的项可计算行列式的值。本题行列式展开式中每一项在取自后三行的元素中, 必有一个取自后三列, 即每一项都含有零因子, 所以行列式值为零。

证明 行列式展开式中的每项的一般形式为 $(-1)^{\tau(j_1, j_2, j_3, j_4, j_5)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5}$ 其中 j_3, j_4, j_5 中至少有一个数列取到 3, 4, 5 中的

某一个,即 $a_{3j_3}, a_{4j_4}, a_{5j_5}$ 中至少一个数为零,故行列式的展开式中任何一项都为零,因此 $D_5 = 0$.

例 1-5: 在函数 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中,求 x^3 的系数.

【思路点拨】 由行列式的一种定义,行列式的每一项都是取自不同行不同列的元素,所以只有 $a_{12}, a_{21}, a_{33}, a_{44}$ 相乘可得 x^3 项,于是可得 x^3 项的系数。

解 由于仅当 $a_{12}, a_{21}, a_{33}, a_{44}$ 四个元素相乘才会出现 x^3 项,这时该项列下标的排列的逆序数为 $\tau(2134) = 1$,故含 x^3 的项的系数为 -1 .

例 1-6: 证明:

$$(1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

$$(2) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

【思路点拨】 根据行列式定义

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{l+j} a_{lj} M_{lj}$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{lj} A_{lj},$$

找出不为零的项,判断出符号,可此类特殊的上或下三角行列式的值,此结论有助于求其他一些复杂的行列式的值。

证明 对上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据行列式的定义,展开项的一般形式为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

在行列式中第 n 行的元素除去 a_{nn} 以外全为零,因之,只要考虑 $j_n = n$ 的那些项。在第 $n-1$ 行中,除去 $a_{n-1,n-1}, a_{n-1,n}$ 外,其余的项全为零,因之 j_{n-1} 只有 $n-1, n$ 这两个可能。由于 $j_n = n$, 所以 j_{n-1} 就不能等于 n 了,从而 $j_{n-1} = n-1$ 。这样逐步推上去,不难看出,除去 $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ 这一项外,其余的项全是零。而这一项的列下标所成的排列是一个偶排列,所以这一项带正号。于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

对下三角形行列式,同理有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

【提高题型精解】

例 1-7: 证明: 在 n 级排列中, 奇偶排列各半。

【思路点拨】 利用对换的性质: 在排列 $i_1i_2\cdots i_l\cdots i_s\cdots i_n$ 中, 交换任意两数 i_l 和 i_s 的位置, 称为一次对换。对换改变排列的奇偶数。任意一个 n 排列与排列 $12\cdots n$ 都可以经过一系列对换互变, 并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性。

证明 由于对换一个排列的任两位上的数后, 其排列的奇偶性改变, 故, 对每一个偶排列实施对换 1, 2 位数的操作后, 均成为奇排列, 所以有 $k \leq 1$, 同样每个奇排列经对换 1, 2 位数后成为偶排列, 即有 $1 \leq k$, 故

$$k=1=\frac{n!}{2}。$$

例 1-8: 设 $f_{ij}(x)$, $j=1, 2, \cdots, n$ 都是 x 的可微函数, 证明

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{in}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

【思路点拨】 这道证明题是一个与自然数 n 有关的命题,所以可尝试用数学归纳法。等式的左边是一个由 n 阶行列式定义的函数关于自变量 x 求导,等式的右边是 n 个 n 阶行列式之和,利用导数的运算性质和行列式的定义证明。

证明 (1)当 $n=1$ 时,等式显然成立;

(2)假设对于 $n-1$ 时,命题成立,则对于 $n+1$ 时,

$$\begin{aligned} \text{左边} & \xrightarrow{\text{按展开公式}} \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^n f_{1i}(x) \\ & \begin{vmatrix} f_{21}(x) & \cdots & f_{2,i-1}(x) & f_{2,i+1}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & \cdots & f_{n,i-1}(x) & f_{n,i+1}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{\text{求导公式}} \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dx} f_{1i}(x) \right] \cdot \\ & \begin{vmatrix} f_{21}(x) & \cdots & f_{2,i-1}(x) & f_{2,i+1}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & \cdots & f_{n,i-1}(x) & f_{n,i+1}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \\ & \sum_{i=1}^n f_{1i}(x) \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{21}(x) & \cdots & f_{2,i-1}(x) & f_{2,i+1}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & \cdots & f_{n,i-1}(x) & f_{n,i+1}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} \end{aligned}$$