同济四版配套辅导

最新线性代数

（第四版）

习题全解

王治军　主编

- 基本知识点窍
- 同步题型精解
- 提高题型精解
- 考研题型精解
- 综合题型精练
- 综合题型解答

中国建材工业出版社

最新线性代数（第四版）习题全解

同济大学《工程数学：线性代数》第四版配套辅导

王治军　主编

中国建材工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

最新线性代数(第四版)习题全解/王治军主编. - 北京:中国建材工业出版社,2003.8

ISBN - 7 - 80159 - 515 - 7

Ⅰ.最… Ⅱ.王… Ⅲ.线性代数 - 高等学校 - 习题 Ⅳ.0151.2 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 078161 号

【内容简介】本书是为配合高等教育出版社出版、同济大学编写的《工程数学:线性代数》第四版编写的习题集。本书由基本知识点窍、同步题型精解、提高题型精解、考研题型精解、综合题型精练、综合题型解答等部分组成。书中巧妙地运用了思路点拨,旨在帮助读者掌握课程重点,学会分析方法,提高解题能力。

最新线性代数(第四版)习题全解

王治军 主编

出版发行:中国建材工业出版社

地　　址:北京市海淀区三里河路 11 号

邮　　编:100831

经　　销:全国各地新华书店

印　　刷:保定市新世纪印刷厂

开　　本:850mm × 1168mm　1/32

印　　张:17.25

字　　数:350 千字

版　　次:2003 年 8 月第 1 版

印　　次:2003 年 8 月第 1 版

印　　数:1 ~ 10000 册

书　　号:ISBN 7 - 80159 - 515 - 7/G·099

定　　价:18.00 元

前　言

线性代数作为高等数学重要组成部分，是理工科学生学习其他课程的基础，也是许多专业研究生入学考试的必考科目，为了帮助广大学生扎实地掌握线性代数的知识精髓和解题技巧，提高解答各种题型的能力，我们特约有经验有实力的教师精心编写了这本书。本书紧扣同济四版《线性代数》教材编写而成，实例丰富，讲解透彻，知识梳理与解题技巧并重，并着重剖析解题规律，归纳总结解题套路，并提供有针对性的练习，是一本具有极高价值的辅导书。

本书共分为六章，分别是：第一章行列式；第二章矩阵；第三章向量及其线性相关性；第四章线性方程组；第五章相似矩阵及二次型；第六章线性空间与线性变换。其中每章又细分为**基本知识点窍、同步题型精解、提高题型精解、考研题型精解、综合题型精练、综合题型解答**等六个模块。各模块具有不同的作用和功能，可以做到以下几点：1. 将各章的知识框架和所要掌握的要点总结梳理；2. 点明各种题型的解题套路；3. 用实例进行思路点拨，给出典型题目以供练习并配答案，以使学生做到触类旁通，举一反三；4. 给出同济版教材的课后习题答案，以供参考。总之，本书体例严谨科学，版式清晰美观，内容编写尽量从具体、通俗、易懂入手，逐步深入，最终使学生顺利过关。

本书虽经过较长时间的酝酿编写，但限于作者水平，疏漏与不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

编者

2003 年 8 月

目　　录

第一章　行列式

第一节　行列式的两种定义

【基本知识点穷】

1. 定义Ⅰ：n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

其中 $M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

叫做 a_{1j} 的余子式，$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$，叫做 a_{1j} 的代数余子式。

2. 排列及其逆序数：由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数字组成的一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 称为一个 n 级排列；在一个排列中，如果有一个大的数排在一个小的数之前，则称这两个数构成该排列的一个逆序数，

记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$;逆序数为偶数的排列称为偶排列,逆序数为奇数的排列称为奇排列。

3. 定义Ⅱ:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

即等于 n 项的代数和,其中每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积,其符号为 $(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}$,$j_1j_2\cdots j_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的任一种排列。

【同步题型精解】

例 1-1:按自然数从小到大为标准次序,求下列各排列的逆序数:

(1)1234;　(2)4132;　(3)3421;　(4)2413;

(5)$13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$;　(6)$13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots42$

【思路点拨】 一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数等于每个数字 j_k 的逆序数之和,如排列 4132 中 2 前比它本身大的数有 2 个,则 2 的逆序数为 2,3 前比它本身大的数字有 1 个,则 3 的逆序数为 1,1 前比它本身大的数字有 1 个,则 1 的逆序数为 1,4 前没有比它本身大的数字,则 4 的逆序数为 0,于是排列 4132 的逆序数为 $2+1+1+0=4$。

解 (1)此排列不存在着逆序数,所以其逆序数为 0;

(2)因为 4 的逆序数为 0,1 的逆序数为 1,3 的逆序数为 1,2 的逆序数为 2,所以此排列的逆序数为 $0+1+1+2=4$;

(3)因为 3 的逆序数为 0,4 的逆序数为 0,2 的逆序数为 2,1 的逆序数为 3,所以此排列的逆序数为 $0+0+2+3=5$;

(4)因为 2 的逆序数为 0,4 的逆序数为 0,1 的逆序数为 2,3 的逆序数为 1,所以此排列的逆序数为 $0+0+2+1=3$;

(5)因为前 n 个数的逆序数都为 0,后 n 个数的逆序数分别为$(n-1),(n-2),\cdots,1,0$,所以此排列的逆序数为$(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0=\dfrac{n(n-1)}{2}$;

(6)因为前 n 个数的逆序数都为 0,后 n 个数的逆序数分别为 $0,2,4,\cdots,(2n-2)$,所以此排列的逆序数为 $0+2+4+\cdots+(2n-2)=n(n-1)$。

例 1-2: 如果排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 I,问排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 的逆序数为多少?

【思路点拨】 排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 中 x_n 前比它本身大的数设为 a_1,则比它本身小的数就是 $n-1-a_1$,所以在排列 $x_nx_1\cdots x_{n-1}$后 $n-1$ 个数字中比 x_n 小的数的逆序数都要增加 1,比 x_n 大的数的逆序数都要减小 1,于是排列 $x_nx_1\cdots x_{n-1}$的逆序数应为 $I+(n-1-a_1)-a_1$,同理,设排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 中 x_{n-1}前比它本身大的数设为 a_2,则排列 $x_nx_{n-1}x_1\cdots x_{n-2}$的逆序数应比排列 $x_nx_1\cdots x_{n-1}$的逆序数多$(n-2-a_2)-a_2$,故排列 $x_nx_{n-1}x_1\cdots x_{n-2}$的逆序数为 $I+(n-1-a_1)-a_1+(n-2-a_2)-a_2$,依此类推,$x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 的逆序数为 $I+(n-1-a_1)-a_1+(n-2-a_2)-a_2+\cdots+1-a_n-a_n$,又知 $a_1+a_2+\cdots+a_n=I$,可求解此题。

解 $x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 的逆序数为

$$I+(n-1-a_1)-a_1+(n-2-a_2)-a_2+\cdots+1-a_n-a_n$$

$= \frac{n(n-1)}{2} - I$。

例 1-3:写出 4 阶行列式 $D_4 = |a_{ij}|$ 展开式中含有因子 $a_{23}a_{42}$ 且带负号的所有项。

【思路点拨】 利用行列式的第二种定义,四阶行列式展开式中每一项的一般形式为 $(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,对于本题可取 $j_2=3, j_4=2$,又所求项是带负号,可得 $j_1=4, j_3=1$。

解 设这样的项为 $-a_{1j_1}a_{23}a_{3j_3}a_{42}$,其中行标已成自然排列,而列标组成 4 级排列 $(j_1,3,j_3,2)$,故 j_1,j_3 只能分别取 1,4,或 4,1,由于

$$(-1)^{\tau(1,3,4,2)}=(-1)^2=1,(-1)^{\tau(4,3,1,2)}=(-1)^5=-1$$

所以列标组成的排列为(4,3,1,2),则所求的项为 $-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$。

例 1-4:证明

$$D_5=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

【思路点拨】 由定义知,n 阶行列式共有 $n!$ 项,每一项的一般形式为 $(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,若 n 个元素的乘积中有零因子,则该项为零,所以只须找出不为零的项可计算行列式的值。本题行列式展开式中每一项在取自后三行的元素中,必有一个取自后三列,即每一项都含有零因子,所以行列式值为零。

证明 行列式展开式中的每项的一般形式为 $(-1)^{\tau(j_1,j_2,j_3,j_4,j_5)}$ $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 其中 j_3,j_4,j_5 中至少有一个数列取到 3,4,5 中的

某一个,即 $a_{3j_3},a_{4j_4},a_{5j_5}$ 中至少一个数为零,故行列式的展开式中任何一项都为零,因此 $D_5=0$.

例 1-5:在函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中,求 x^3 的系数.

【思路点拨】 由行列式的一种定义,行列式的每一项都是取自不同行不同列的元素,所以只有 $a_{12},a_{21},a_{33},a_{44}$ 相乘可得 x^3 项,于是可得 x^3 项的系数。

解 由于仅当 $a_{12},a_{21},a_{33},a_{44}$ 四个元素相乘才会出现 x^3 项,这时该项列下标的排列的逆序数为 $\tau(2134)=1$,故含 x^3 的项的系数为 -1.

例 1-6:证明:

$$(1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

$$(2)\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

【思路点拨】 根据行列式定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j},$$

找出不为零的项,判断出符号,可此类特殊的上或下三角行列式的值,此结论有助于求其他一些复杂的行列式的值。

证明 对上三角形行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

根据行列式的定义,展开项的一般形式为

$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

在行列式中第 n 行的元素除去 a_{nn} 以外全为零,因之,只要考虑 $j_n=n$ 的那些项。在第 $n-1$ 行中,除去 $a_{n-1,n-1}$,$a_{n-1,n}$ 外,其余的项全为零,因之 j_{n-1} 只有 $n-1$,n 这两个可能。由于 $j_n=n$,所以 j_{n-1} 就不能等于 n 了,从而 $j_{n-1}=n-1$。这样逐步推上去,不难看出,除去 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项外,其余的项全是零。而这一项的列下标所成的排列是一个偶排列,所以这一项带正号。于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

对下三角形行列式,同理有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

【提高题型精解】

例 1-7:证明:在 n 级排列中,奇偶排列各半。

【思路点拨】 利用对换的性质:在排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中,交换任意两数 i_t 和 i_s 的位置,称为一次对换。对换改变排列的奇偶数。任意一个 n 排列与排列 $12\cdots n$ 都可以经过一系列对换互变,并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性.

证明 由于对换一个排列的任两位上的数后,其排列的奇偶性改变,故,对每一个偶排列实施对换 1,2 位数的操作后,均成为奇排列,所以有 $k\leqslant l$,同样每个奇排列经对换 1,2 位数后成为偶排列,即有 $l\leqslant k$,故 $k=l=\frac{n!}{2}$。

例 1-8:设 $f_{ij}(x)\,i,j=1,2,\cdots,n$ 都是 x 的可微函数,证明

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$
= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}
$$

【思路点拨】 这道证明题是一个与自然数 n 有关的命题,所以可尝试用数学归纳法。等式的左边是一个由 n 阶行列式定义的函数关于自变量 x 求导,等式的右边是 n 个 n 阶行列式之和,利用导数的运算性质和行列式的定义证明。

证明 (1)当 n = 1 时,等式显然成立;

(2)假设对于 n - 1 时,命题成立,则对于 n + 1 时,

$$
\text{左边} \xlongequal{\text{按展开公式}} \frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{n} f_{1i}(x)
\begin{vmatrix} f_{21}(x) & \cdots & f_{2i-1}(x) & f_{2,i+1}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & \cdots & f_{n,i-1}(x) & f_{n,i+1}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{\text{求导公式}} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d}{dx}f_{1i}(x)\right] \cdot
\begin{vmatrix} f_{21}(x) & \cdots & f_{2,i-1}(x) & f_{2,i+1}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & \cdots & f_{n,i-1}(x) & f_{n,i+1}(x) & \cdots & f_{nn(x)} \end{vmatrix} +
$$

$$
\sum_{i=1}^{n} f_{1i}(x) \frac{d}{dx}
\begin{vmatrix} f_{21}(x) & \cdots & f_{2,i-1}(x) & f_{2,i+1}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & \cdots & f_{n,i-1}(x) & f_{n,i+1}(x) & \cdots & f_{nn(x)} \end{vmatrix}
$$