高等学校公共必修课教材

线性代数

XIANXING DAISHU

杨奇 孟道骥

学出版社

高等学校公共必修课教材

线性代数

杨　奇　孟道骥

南开大学出版社

·天津·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/杨奇,孟道骥.—天津:南开大学出版社,2003.8

ISBN 7-310-01934-2

Ⅰ.线... Ⅱ.①杨...②孟... Ⅲ.线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 042078 号

出版发行	南开大学出版社 地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮编:300071 营销部电话:(022)23508339 23500755 营销部传真:(022)23508542 邮购部电话:(022)23502200
出版人	肖占鹏
承 印	南开大学印刷厂印刷
经 销	全国各地新华书店
版 次	2003 年 8 月第 1 版
印 次	2003 年 8 月第 1 次印刷
开 本	880mm × 1 230mm 1/32
印 张	11.875
字 数	342 千字
印 数	1—6 000
定 价	20.00 元

内容提要

本书系统地介绍了线性代数的基本理论和方法，注意代数与几何的结合与联系．在提供几何背景的基础上，加强了线性空间及其线性变换的教学，并把它们作为核心内容放到书中较前位置来讲授，让读者尽早接触公理化定义与方法，为学习现代数学打下基础．本书共分7章：复习与推广、方阵的行列式·线性方程组、矩阵及其运算、线性空间、线性变换、欧几里得空间、二次型．其中第一章介绍了数域以及 n 元有序数组的向量空间，它是全书的基础．除第一章外，本书每章之后都有小结．本书各章都配有一定数量的习题，其中含有填空选择题以及近年来的考研试题．

本书可作为综合性大学、工科大学、师范院校、经济类院校以及自学考试的线性代数课程的教材．本书深入浅出，适应不同的读者以及分层次教学的需要．本书还可以与高等数学一起作为大学数学的入门课程在一年级同时开设．

前　言

线性代数是一门将理论、应用和计算融合起来的完美课程.近年来,由于众多学科和科学技术的迅速发展,特别是由于计算机的普遍使用,使得线性代数得到更加广泛的应用.线性代数的重要性在于它考虑了一类简单的数学模型,而大量的理论及应用问题,可以通过“线性化”变成线性代数的问题.作为基础训练,熟练掌握线性代数的理论与方法是十分必要的.与微积分一样,线性代数已是大学数学教育中一门主要的基础课程.

本书是编者在天津大学和南开大学进行多年教学实践和改革探索的基础上编写的,其基本内容符合《理工科数学课程教学基本要求》,并适当地做了一些改革的尝试.其目的是希望学生通过这门课程的学习,打下一个良好的数学基础,提高数学素质以及分析问题、解决问题的能力.

按照现行的国际标准,线性代数是通过公理化来表述的.它是第二代数学模型,其根源来自欧几里得几何、解析几何以及线性方程组理论.现在,线性代数已多用矩阵运算以及线性空间的线性变换的理论来陈述.基于这一认识,我们仍以矩阵为主线,以矩阵的运算和各种等价关系(如相抵、相似、相合、正交相似)为重点,讲授一些基本的计算技巧和处理方法;另一方面,我们加强了线性空间和线性变换的教学,并把它们作为核心内容放在书中较前的位置来讲授,让读者尽早接触公理化定义和方法.由于它们比较抽象,初学者往往不能很快地适应和掌握,只有通过反复运用,才能逐渐熟练.读者一旦掌握其中的要领,对今后学习现代数学新知识是大有裨益的.

代数学的研究对象是各种代数系统及其相互关系.代数学在数学与其他学科(如理论物理、计算机科学、通信理论、系统工程等)中的影响与应用日益扩大,它的一些观点和方法也为越来越多的人所掌握和运用.而线性代数只是代数学中一个较初等的分支,它研究一类较简单

的代数系统——线性空间及其线性变换.我们采用现代数学的观点来阐述线性代数的理论是想让读者最终能较好和较深入地掌握线性代数的内容,为以后学习现代数学新知识打好基础.

本书虽然比较崇尚理性思维的培养,但起点并不高,尽量注意与中学数学以及解析几何内容的衔接,时刻想到该书是一本大学数学的入门教材.其理论的阐述、概念的引入力求符合人们的认识规律.我们采用由具体事物抽象出一般概念,再从一般概念回到具体事物去的辩证观点.既注重立论的准确和证明的严谨,也注意讲清想法和思路.在不需要增加较多新知识的前提下,多介绍一些应用,多举一些实例.

数学家华罗庚生前曾多次教导青年学生,要真正打好基础,必须经过“由薄到厚”和“由厚到薄”的过程.“由薄到厚”是学习、接受的过程,“由厚到薄”是消化、提炼的过程.遵照华先生的教导,在每章结束之后,我们作了一个小结,归纳其中的要点和解题的思考方法,希望对读者的学习和复习有所帮助.另外也想引导读者注意培养自己作小结的习惯和能力.读者可以根据自己的学习体会,试着写出自己的小结.

本书各章末都配有适量的习题,其中一部分是近年来的考研试题.学数学的最好方法是“做数学”.希望读者通过这些习题的练习,巩固和掌握所学的基本理论和方法.

使用本教材所需学时大约为50.为了适应分层次教学的需要,我们对书中部分内容加了星号“*”,在学习时数不够时,读者可根据实际情况缓读或不读这些内容,这对全书的学习无甚影响.

使用本教材时倘若能与高等数学课程的教学相协调,也可以把线性代数与高等数学一起作为大学数学的入门课程在一年级同时开设.这样做可以使学生从大学一年级开始就逐步培养把代数与几何、微积分联系起来的能力.另外,提前开设线性代数课程,既利于高等数学的教学,也为高等数学课程中多元微积分内容的更新、线性微分方程组内容的引入提供了可能.

书中不妥之处,恳请读者多提宝贵意见.

编　者

2003年5月

符 号 说 明

$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{C}$	复数域
$\mathbf{P}$	数域(通常指 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$)
$\mathbf{R}^n$	实 n 维(列)向量空间
$\mathbf{C}^n$	复 n 维(列)向量空间
$\mathbf{P}^n$	(域 $\mathbf{P}$ 上)分量取自 $\mathbf{P}$ 的 n 维(列)向量空间
$\mathbf{R}^{m\times n}$	实 $m\times n$ 矩阵的集合
$\mathbf{C}^{m\times n}$	复 $m\times n$ 矩阵的集合
$\mathbf{P}^{m\times n}$	元素取自 $\mathbf{P}$ 的 $m\times n$ 矩阵的集合
$\mathbf{0}$	零向量或线性空间的零元素
$\boldsymbol{O}$	零矩阵或零变换
$\boldsymbol{E}_n$	n 阶单位矩阵
D_n	n 阶行列式
$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$ 或 $\det\boldsymbol{A}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$ 或 $r(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹
$\widetilde{\boldsymbol{A}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的增广矩阵
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$\boldsymbol{A}^{*}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵
$\overline{\boldsymbol{A}}$	$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$ 的各元素取复共轭的矩阵
$\boldsymbol{E}_{ij}$	第 i 行 j 列元素为 1,其余元素为 0 的矩阵
$\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$	以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为对角元的对角矩阵
$\boldsymbol{\varepsilon}_i$	第 i 个单位坐标向量,即第 i 个分量为 1,其余分量为 0 的向量

$\lvert\boldsymbol{\alpha}\rvert$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度
$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积
$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角
$\mathbf{R}[x]_n$	次数不超过 n 的一元实系数多项式连同零多项式组成的集合
$\dim V$	线性空间 V 的维数
$W_1\cap W_2$	子空间 W_1 与 W_2 的交
W_1+W_2	子空间 W_1 与 W_2 的和
I	单位变换(或恒等变换)
$\sigma(V)$或 $\mathrm{im}\ \sigma$	线性变换 σ 的像集(或像空间)
$\sigma^{-1}(V)$或 $\ker\sigma$	线性变换 σ 的核
$\det\sigma$	线性变换 σ 的行列式
$\mathrm{rank}\ \sigma$	线性变换 σ 的秩
$\mathrm{tr}(\sigma)$	线性变换 σ 的迹
$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$	由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 生成的子空间
$L(V)$	线性空间 V 上所有线性变换的集合
$V_{\lambda_0}(\sigma)$	线性变换 σ 的属于 λ_0 的特征子空间
$W_{\lambda_0}(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的特征子空间
$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵(或等价)
$\boldsymbol{A}\backsim\boldsymbol{B}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似
$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同(或相合)
$V\cong V'$	线性空间 V 与 V' 同构
$A\Rightarrow B$	若 A 成立,则 B 成立;即 A 是 B 的充分条件;也即,B 是 A 的必要条件
$A\Leftrightarrow B$	A 是 B 的充分必要条件;即 A 成立当且仅当 B 成立;也即,A 等价于 B
$\cdots$	省略号,表示未写出或不便一一写出的类似元素
$\square$	表示一个命题的表述或证明已完毕

目　录

第 1 章 复习与推广

本章的目的是想从代数的观点简要地介绍与本书有关的一些概念和结果.所介绍的内容大部分以某种形式包括在中学数学课程中或空间解析几何课程中,这里就不再给出证明.另外,还对某些内容作了推广,这对以后的学习是有益的.本章是全书的基础,它包括数域、二阶与三阶行列式,n 维向空间 $\mathbf{P}^n$.

1.1 数域

我们知道,数是数学的一个最基本的概念,一切计算最后都归结为数的代数运算.数的概念经历了一个长期的发展过程.从逻辑上讲,数的扩充是从自然数集 $\mathbf{N}$ 到整数集 $\mathbf{Z}$,然后是有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$、复数集 $\mathbf{C}$,即

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}.$$

数的扩充与数的运算有关,其中加、减、乘、除四种运算是最基本的代数运算,它们有许多好用的运算律.概括地说,代数学的基本思想就是设法有效地运用运算律去谋求各种类型代数问题的通用解法,即以通性求通解.这些通性正是有理数、实数、复数的全体所共有的.具有这些通性的集合对于以后一些问题的讨论是重要的.为此,我们引入一个一般的概念.

定义 1.1 设 $\mathbf{P}$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的一个子集.如果满足以下两个条件:

1) $0,1 \in \mathbf{P}$;

2) 任意 $a,b \in \mathbf{P}$,都有 $a \pm b, ab \in \mathbf{P}$,并且当 $b \neq 0$ 时,有 $\frac{a}{b} \in \mathbf{P}$.

则称 $\mathbf{P}$ 为一个**数域**.

性质 2)称为 $\mathbf{P}$ 对于加、减、乘、除四种运算**封闭**.

有理数集 **Q**、实数集 **R**、复数集 **C** 对加、减、乘、除四种运算都封闭，都是数域.它们分别称为**有理数域**、**实数域**、**复数域**.

自然数集 **N** 对加法与乘法封闭，但对减法与除法不封闭；整数集 **Z** 对加法、减法与乘法封闭，但对除法不封闭.所以 **N** 和 **Z** 不是数域.

除了 **Q**,**R**,**C** 外还有许多数域.其中，有理数域 **Q** 是最小的数域.

最后，我们把"人人都懂，到处有用"的数域 **P** 中的运算律罗列如下：任意 $a,b,c\in\mathbf{P}$.

一、关于加法

1) $a+b=b+a$ （交换律）；

2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ （结合律）；

3) $a+0=0+a=a$ （0 的特征）；

4) 有惟一的 $-a\in\mathbf{P}$，使得

$a+(-a)=(-a)+a=0$ （加法的逆元素）.

二、关于乘法

5) $ab=ba$ （交换律）；

6) $(ab)c=a(bc)$ （结合律）；

7) $a\cdot 1=1\cdot a=a$ （1 的特征）；

8) 若 $a\neq 0$，则有惟一的 $a^{-1}\in\mathbf{P}$，使得

$aa^{-1}=a^{-1}a=1$ （乘法的逆元素）.

三、加法与乘法的联系

9) $a(b+c)=ab+ac$ 及 $(a+b)c=ab+bc$ （分配律）.

利用运算律可以简化计算，而且以后所有代数系统的研究都是以数域的运算律为基础的.本书常用的数域是实数域 **R**.

1.2 二阶与三阶行列式

在空间解析几何中读者已经用到了 2 阶与 3 阶行列式.行列式起源于二元和三元线性方程组的求解.例如，二元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2.\end{cases}\tag{1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，用加减消元法求得(1)的惟一解是

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{2}$$

式(2)中的分子、分母都是四个数分成两对数相乘再相减而得.其中分母是由方程组(1)的四个系数确定的.为了简化我们的结果，引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{3}$$

称之为**2 阶行列式**，它是方程组(1)的**系数行列式**，含有两行两列.横写的称为**行**，竖写的称为**列**.数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式(3)的**元素**. a_{ij} 就是位于第 i 行第 j 列处的元素.

上述行列式的定义可用对角线法来记忆.参看 1.1，即 2 阶行列式等于它的**主对角线**(由左上至右下的对角线)上的元素的乘积减去它的**次对角线**(由右上至左下的对角线)上的元素的乘积.

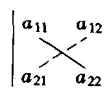

图 1.1

根据定义，式(2)中的两个分子可以分别写成

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则方程组(1)的惟一解(2)就可以简写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}.$$

对于三元线性方程组也有相仿的结论.设三元线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{4}$$

我们引入**3阶行列式**,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{5}$$

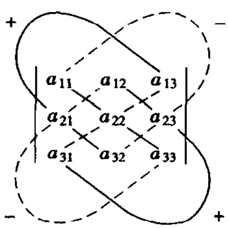

图 1.2

称之为方程组(4)的**系数行列式**.式(5)是由方程组(4)的 $3^2=9$ 个系数确定的.它有 $3!=6$ 项,其中正负项各半,每项均为不同行、列的三个元素的乘积.其规律遵循图 1.2 所示的对角线法则:三条实线是平行于主对角线的连线,三条虚线是平行于次对角线的连线;实线上的三元素的乘积冠以正号,虚线上三元素的乘积冠以负号.

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

那么,当 $D \neq 0$ 时,方程组(4)的惟一解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}. \tag{6}$$

请读者用消元法验证式(6)是成立的.

3 阶行列式也可以用 2 阶行列式来计算,即它可以按第 1 行(列)展开.