

科學圖書大庫

網路分析

編者 李森源 彭雲將

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人 徐銘信 發行人 王洪鎧

科學圖書大庫

中華民國六十八年九月十日二版

網路分析

基本定價 2.00

編者 李森源 台灣電力公司工程師
彭雲將

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者 財團法人 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686 號
發行者 財團法人 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第 1 5 7 9 5 號
承印者 大原彩色印製企業有限公司 台北市西園路2段396巷19號
電話：3611986・3813998

編輯大意

1. 本書係遵照教育部於民國 65 年頒布之五年制工業專科學校電機工程科四年級上學期或下學期網路分析課程標準所編輯，其目的在使學生對網路分析之基本概念有所瞭解。
2. 本書重要名詞，均以教育部業經公布者為標準，並附英文，以資對照。
3. 本書之編寫，文字力求淺顯通順，盡量避免應用艱深之數學，而以插圖及例題輔助講解，以使學生易於領悟。
4. 本書計分七章，為每週四小時一學期之教材，每章附習題約十則，概括全章內容，學生逐一練習後對於學習將有甚大裨益。
5. 本書之編校多利用公餘課畢之暇，雖力求謹慎，但疏漏之處在所難免，尚祈先進不吝賜教，以便再版時修正。

李森源 謹識
彭雲將

民國六十六年六月

目 錄

編輯大意

第一章 網路模型及立式工具

- 1-1 一般觀念及系統區分 1
- 1-2 網路系統及其信號… 3
- 1-3 古典時域分析：微分方程式…………… 8
- 1-4 頻域分析：變換法… 11
- 1-5 頻域時域分析：狀態變數及方程式………… 15

第二章 微分方程式

- 2-1 元件模型及壓流關係 17
- 2-2 一階微分方程式…… 20
- 2-3 二階微分方程式…… 32
- 2-4 網路初態…………… 47

第三章 拉氏變換法

- 3-1 拉氏變換及其相關定理…………… 50
- 3-2 阻抗函數…………… 76
- 3-3 四端網路…………… 80
- 3-4 頻率反應特性………… 91

第四章 其他變換分析法

- 4-1 富氏級數…………… 100
- 4-2 富氏積分…………… 111

第五章 狀態變數法

- 5-1 狀態變數…………… 114
- 5-2 一般系統之狀態方程式…………… 115
- 5-3 狀態轉移矩陣………… 120
- 5-4 狀態轉移方程式…… 123

第六章 電網路狀態方程式及其分析

- 6-1 網路定理…………… 127
- 6-2 網路狀態方程式之立式…………… 134
- 6-3 轉移函數及脈衝反應 140
- 6-4 特性方程式…………… 145

第七章 網路圖解法

- 7-1 網路拓模分析………… 152
- 7-2 信號流程圖…………… 154
- 7-3 增益公式…………… 161
- 7-4 狀態轉移…………… 164
- 7-5 多變數系統…………… 168

習 題…………… 172

第一章 網路模型及立式工具

1-1 一般觀念及系統區分

網路理論包括網路分析 (Network Analysis) 及網路合成 (Network Synthesis) 兩部份。研究網路理論時有三個關鍵性詞彙必須先予介紹，即激發 (Excitation)，網路 (Network) 及反應 (Response)，而其關係如圖(1)所示。

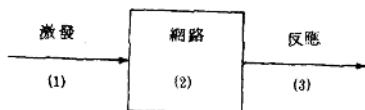


圖 1-1 激發網路及反應之關係

網路分析係網路(2)及其激發(1)均在已知情形下研究其反應(3)。而網路合成則係激發(1)及反應(3)均為已知情形下尋求合乎已知條件之網路(2)。

在尚未正式進入研究網路分析之一般理論及方法前，擬先介紹部份基本定義：

1. 電 源 供應電能所使用之器械稱為電源 (Source)。電源可能為一電壓或為一電流。若電源為一電壓且電壓在某一瞬間之數值不受其負載電流 (Load Current) 影響者，稱為電壓電源 (Potential Source)。若電源為一電流且此電流在某一瞬間之數值不受其負載端電壓 (Load Voltage) 高低影響者稱為電流電源 (Current Source)。

2 網路分析

2. 網路、電路元件、分支節點、網目 若將任意數目之電阻器 (Resistor)、電感器 (Inductor) 與電容器 (Capacitor) 接成一複雜之系統其中並可能包括任意數目之電源, 此一系統即組成一網路。組成網路之電阻器、電感器、電容器及電源均係假定利用完全導體 (Perfect conductor) 連接。此等電阻器、電感器或電容器稱為網路之電路元件 (Circuit element)。一個或多個電路元件在網路中組成一分支或支路 (Branch)。兩個或兩個以上分支或支路連接於一共同點, 則此共同點稱為節點 (Node) 或接點 (Junction)。兩個以上分支或支路組成之閉合電路稱為網目 (Mesh) 或環路 (Loop)。

3. 被動性分支與被動性元件 分支或支路中不包含任何電源者稱為被動性分支 (Passive Branch), 不構成電源之電路元件稱為被動性元件 (Passive element)。

4. 主動性支路與主動性元件 分支或支路中包含一個或一個以上電源者稱為主動性支路 (Active Branch)。主動性支路可以有被動性元件存在。

獨立之電壓電源或電流電源稱為主動性元件 (Active element)。真空管及電晶體亦為主動元件。

5. 線性電源、線性元件與線性支路 若電源之電壓與其電流關係可利用一直線方程式表示者稱為線性電源 (Linear source)。

凡通過某一電路元件之電流與施於其兩端點之電壓成一直線關係者稱為線性元件 (Linear element)。

凡流過任一支路之電流與其兩端點之電壓的關係能以一線性微分方程式 (Linear differential equation) 表示者稱為線性支路 (Linear Branch)。

6. 線性網路 任一網路若能合乎下述兩個性質者稱為線性網路 (Linear network)。(a)滿足重疊原理, (b)滿足比例原理。

重疊原理謂: 設任一網路激發 $e_1(t)$ 時反應為 $r_1(t)$, 激發 $e_2(t)$ 時其反應為 $r_2(t)$ 。激發若為 $e(t)$, 且 $e(t) = e_1(t) + e_2(t)$ 時其反應必為 $r(t)$, 且 $r(t) = r_1(t) + r_2(t)$ 。

比例原理謂: 設任一網路激發 $e(t)$ 時其反應為 $r(t)$, 激發若為 $ke(t)$

時其反應必為 $kr(t)$ 。

另一說法謂，任一網路若其激發及反應關係可以利用一線性微分方程式表示者稱為線性網路。

7. 雙向元件與單向元件，雙向支路與單向支路 任一電路元件其大小不因電流方向之不同而有所改變者謂之雙向元件 (Bilateral element)。換言之，電路元件之數值與電流方向無關者稱為雙向元件。反之，則為單向元件 (Unilateral element)。一般電阻器、電感器及電容器均為雙向元件。電晶體、真空管、二極體為單向元件之範例。由上可知任一線性元件必為雙向元件，但雙向元件並不一定即為線性元件。同理，任一支路其電流與電壓關係不因電流方向之不同而有所改變者稱為雙向支路 (Bilateral Branch)。任一支路若其電流與電壓關係因電流方向之不同而改變者謂之單向支路 (Unilateral Branch)。

8. 集總網路及分佈網路 組成網路之各電路元件實質上為可以完全分開之電阻器、電感器或電容器表示者稱為集總網路 (Lumped network)。但有時組成網路之電阻、電感及電容係混調在一起，分析時無法將其完全分開。則此網路稱為分佈網路 (Distributed network)。

9. 互易性、互易網路 任一網路若其激發及反應關係為已知，當其輸出端之反應改為激發時，則原輸入端之反應必定與原激發相同，此性質稱為網路之互易性 (Reciprocal)。

凡具備此種性質之網路稱為互易網路。

1-2 網路系統及其信號

一組具有相關的裝置，元件或事件得視為一整體或其表現可視為同一整體者稱為系統 (System)。網路系統之分類法有很多，然較為熟悉的分類係按電路元件之特性共分為四大類型。

1. 線性網路系統與非線性網路系統 網路系統之特性可用一組線性微分方式描述者稱為線性網路系統。反之，網路系統之特性無法以線性微分方程式描述者稱為非線性網路系統。

4 網路分析

2. 非時變性網路系統與時變性網路系統 網路系統各組成元件之特性與時間變化無關者稱為非時變性網路系統。反之，網路系統各組成元件之特性若與時間變化有關者，則稱為時變性網路系統。

3. 主動性網路系統與被動性網路系統 任意時刻供給網路系統之能量均不得為負值者稱為被動性網路系統。反之，任意時刻供給網路系統之能量若有負值者稱為主動性網路系統。

4. 集總式網路系統與分佈式網路系統 本書主要之趣旨在於線性且被動性網路之分析。

網路系統之激發及反應，一般皆以電壓或電流之時間函數表示。此等時間函數稱為信號（Signals）。電機工程界描述信號通常有兩種方式，即時間與頻率。雖然信號為一時間函數，但事實上信號亦可利用頻率（Frequency）或頻譜（Frequency Spectra）表示。正如同人類溝通兩種不同語言一樣，時間與頻率間之連繫必須藉助於富氏級數（Fourier series）、富氏變換（Fourier transform）及拉氏變換（Laplace transform）。

首先研究各種類型之信號如何利用時間函數描述：

1. 直流信號 信號之大小不因時間變化而變者稱為直流信號，如圖1-2所示。其數學表示法則為：

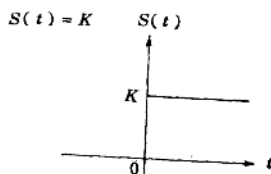


圖 1-2 直流信號

2. 振動信號 信號之大小隨時間作交替且不規則之變化者稱為振動信號（Oscillating signal）。如圖1-3所示。此種信號很難使用數學式予以正確表示。

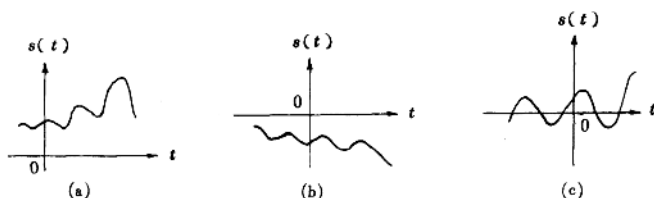


圖 1-3 振動信號

3. 週期信號 振動信號其變化情形每經歷一定期間即週而復始的重復者稱為週期信號 (Periodic signal)。週期信號按其變化情形又可區分為兩類：

(a) 脈動信號 週期信號之大小恒為正值或恒為負值者稱為脈動信號 (Pulsating signal)，如圖 1-4(a)及(b)所示。

(b) 交變信號 週期信號其大小係正負交替變化者稱為交變信號 (Alternating signal)，如圖 1-4(c)及(d)所示。

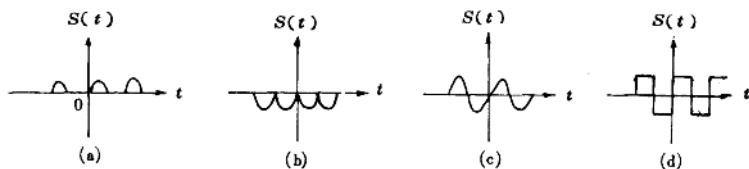


圖 1-4 (a)及(b)脈動信號, (c)及(d)交變信號

週期信號每重復一次所需經歷之最短時間稱為該週期信號之週期 (Period)，一般均以 T 表之，單位為秒。若 $S(t)$ 為一週期信號，且其週期為 T ，則有

$$S(t) = S(t \pm T) = S(t \pm 2T) = \dots = S(t \pm KT)$$

K 為一整數。週期信號經歷一週期後即週而復始，在一週期中信號之各瞬時值組成為一週 (Cycle)。週期信號在一秒鐘內所有之週數稱為此一週期信

6 網路分析

號之頻率，一般均以 f 表之單位為赫 (Hertz)。由週期信號週期 T 及頻率 f 之定義即得

$$f = \frac{1}{T} \quad T = \frac{1}{f}$$

4. 暫時信號 實際上一歷時短暫之信號稱為暫時信號 (Transient Signal)，如圖 1-5 所示之脈波信號及脈衝信號。

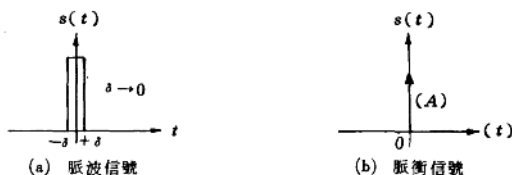


圖 1-5 暫時信號

其次，研究信號以時間函數表示後所顯現之特性。此等特性包括週期性、對稱性及連續性。關於信號之週期性前文已研究過茲從略。現在讓我們研究信號之對稱性。對稱性有兩種基本的形式即一般所謂的奇對稱及偶對稱 (Odd and Even Symmetry)。任一信號可為奇對稱，亦可為偶對稱，或既不為奇對稱亦不為偶對稱。然而任一偶對稱函數必定要合乎如下之關係式：

$$S(t) = S(-t)$$

任一奇對稱函數亦必有如下之關係式：

$$S(t) = -S(-t)$$

圖 1-6(a) 所示者為一方形脈波信號並為偶對稱函數，而圖 1-6(b) 所示者為一三角形脈波信號亦為奇對稱函數。雖然信號未必一定屬於奇對稱函數或偶對稱函數中的一種，但是任何信號皆可分解成一奇對稱成分 (Odd symmetric component) 及一偶對稱成分 (Even symmetric component) 之和表示。即

$$S(t) = S_o(t) + S_e(t)$$

$$\begin{aligned} \text{且} \quad S(-t) &= S_o(-t) + S_e(-t) \\ &= -S_o(t) + S_e(t) \end{aligned}$$

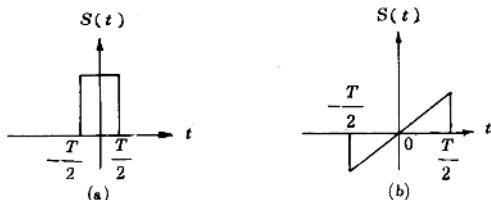


圖 1-6 (a)偶對稱函數, (b)奇對稱函數

故任意信號之奇對稱成分及其偶對稱成分可表示為：

$$S_e(t) = \frac{1}{2} \{ S(t) + S(-t) \}$$

$$S_o(t) = \frac{1}{2} \{ S(t) - S(-t) \}$$

任意信號分解成奇對稱成分及偶對稱成分情形，詳如圖 1-7 與圖 1-8 所示。

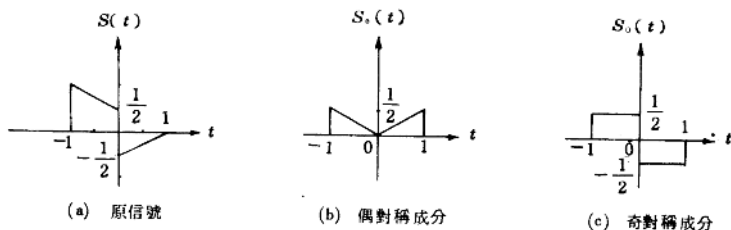


圖 1-7 任意信號分解為奇對稱成分及偶對稱成分情形

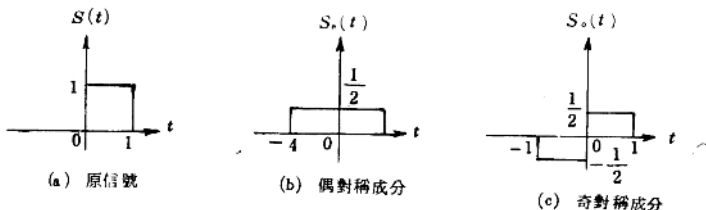


圖 1-8 任意信號分解為奇對稱成分及偶對稱成分情形

最後，再研究信號之連續性。試考慮圖1-9所示之信號，時間 $t = T$ 時此信號產生不連續現象，其差距為

$$S(T_+) - S(T_-) = K$$

$$\text{且} \quad S(T_+) = \lim_{\delta \rightarrow 0} S(T + \delta)$$

$$S(T_-) = \lim_{\delta \rightarrow 0} S(T - \delta)$$

δ 為一正實數。在電機工程應用方面特別關心的當然是在 $t = 0$ 附近發生之不連續情形，亦即 $S(0_+)$ 及 $S(0_-)$ 為

$$S(0_+) = \lim_{\delta \rightarrow 0} S(\delta)$$

$$S(0_-) = \lim_{\delta \rightarrow 0} S(-\delta)$$

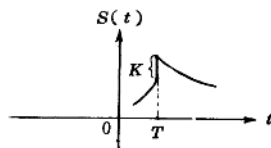


圖1-9 不連續之信號

1-3 古典時域分析：微分方程式

網路分析中對實體之物理元件常使用理想化之數學模型。最基本之電路元件有電阻 R ，其單位為歐姆，電感 L ，單位為亨利（Henry），電容 C ，單位為法拉（Farad）。電路元件之起始點稱為端點（Terminal），任意二端點稱為一端點對（Terminal pair）。網路分析中主要的問題即是尋求網路各端點對之電壓及其電流關係。時域（Time domain）中，即以時間為獨立變數，網路之各電路元件其電壓及電流關係可利用微分方程式表示。假定電壓及電流皆以時間函數表示，則電路元件 R, L, C 如圖1-10所示。其電壓及電流關係式為：

$$v(t) = R i(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{R} v(t)$$

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} v(t) dt$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(t) dt$$

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

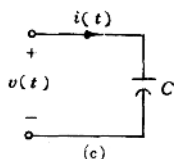
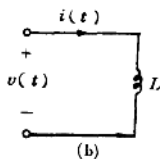
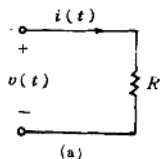


圖 1-10 (a)電阻, (b)電感, (c)電容

網路在時域分析中，通常均先以克希荷夫電流定律或電壓定律列出其網路之微分方程式，其次再根據網路特定條件及數學原理尋求微分方程式之解答。一般而言，可利用兩種基本方法寫出網路之微分方程式；一為環路電流法，另一則為節點電位法。環路電流方程式係依據克希荷夫電壓定律寫成。若網路之分支數為 B ，節點數為 N ，則獨立環路電流方程式之數目為 $B - N + 1$ 。節點電位方程式係依據克希荷夫電流定律寫成，若網路之節點數為 N ，則求解所需之獨立節點電位方程式的數目為 $N - 1$ 。

例題 1-1 試寫出圖 1-11 之網路方程式。

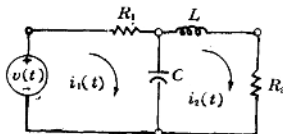


圖 1-11

【解】：由圖 1-11 得知，分支 $B = 5$ 、節點 $N = 4$

$$\begin{aligned}\text{故所需之獨立網路方程式數} &= B - N + 1 \\ &= 5 - 4 + 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

根據克希荷夫電壓定律得

$$R_1 i_1(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} [i_1(t) - i_2(t)] dt = v(t)$$

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} [i_2(t) - i_1(t)] dt + L \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t) = 0$$

例題 1-2 試寫出圖 1-12 之網路方程式。

【解】：由圖 1-12 得知，節點 $N = 4$

$$\begin{aligned}\text{故所須之獨立網路方程式數爲} &N - 1 = 4 - 1 \\ &= 3\end{aligned}$$

並假定流出節點之電流為正，則根據克希荷夫電流定律得

$$\frac{1}{R_1} v_1(t) + c_1 \frac{d}{dt} \{v_1(t) - v_2(t)\} = i(t)$$

$$\begin{aligned}c_1 \frac{d}{dt} \{v_2(t) - v_1(t)\} + \frac{1}{R_2} v_2(t) + c_2 \frac{d}{dt} \{v_2(t) \\ - v_3(t)\} = 0\end{aligned}$$

$$\frac{1}{R_3} v_3(t) + c_2 \frac{d}{dt} \{v_3(t) - v_2(t)\} = 0$$

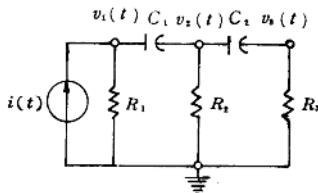


圖 1-12

1-4 頻域分析：變換法

前文提及任意信號可利用時間函數表示，亦可利用頻率或頻譜表示。現在讓我們研究一下如何利用頻率或頻譜表示任意信號。試以正弦信號為例簡單說明於后。

$$S(t) = A_0 \sin(\omega_0 t - \theta_0)$$

A_0 為正弦信號之振幅， θ_0 為正弦信號之相位數， ω_0 為正弦信號之角頻率，

且
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

頻域 (Frequency domain)，即以角頻率 ω 為獨立變數，此時正弦信號之振幅、相角與角頻率關係如圖 1-13 (a) 及 (b) 所示。

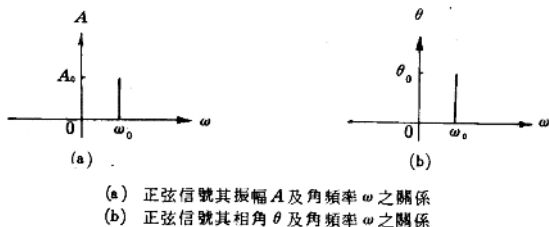


圖 1-13

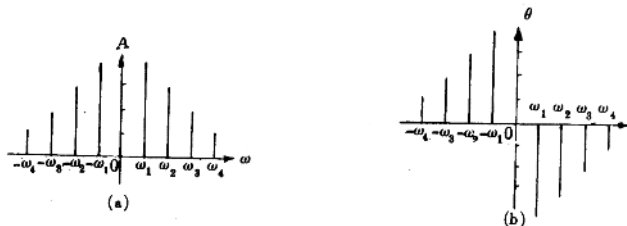


圖 1-14 (a) 振幅頻譜圖, (b) 相角頻譜圖

假設有一信號係由 $2n + 1$ 個正弦成分組成，即

$$S(t) = \sum_{i=-n}^n A_i \sin(\omega_i t + \theta_i)$$

則此信號振幅 A 及角頻率 ω 、相角 θ 及角頻率 ω 之關係——頻譜圖必定包括 $2n + 1$ 個線段，且分別位於 $\pm\omega_1$ 、 $\pm\omega_2$ 、 $\pm\omega_3$ 、……、 $\pm\omega_n$ ，如圖 1-14 所示。仔細觀察圖 1-14 (a) 及 (b) 所示之頻譜，不難發現其為分立之線段頻譜。若頻譜線段之數目增至無限多時，則線段間之距離將趨近於零。此時頻譜線段合成一連續頻譜如圖 1-15 (a) 及 (b) 所示。且

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \sin\{\omega t + \theta\} d\omega$$

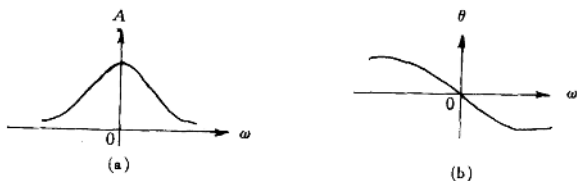


圖 1-15 (a) 振幅之連續頻譜，(b) 相角之連續頻譜

我們將會發現週期信號可利用富氏級數將其以分立頻譜線段表示，而非週期信號則可利用富氏積分將其以連續頻譜表示之。

繼而令複頻率 (Complex frequency) S 為

$$S = \sigma + j\omega$$

實部 σ 代表信號振幅增減，虛部 ω 即一般所謂之角頻率，則網路各電路元件 R 、 L 及 C 之電壓與電流關係可參閱圖 1-16 所示，分別為：

$$\begin{aligned} V(s) &= RI(s) & I(s) &= \frac{1}{R} V(s) \\ V(s) &= sL I(s) & I(s) &= \frac{1}{sL} V(s) \end{aligned}$$

$$V(s) = \frac{1}{SC} I(s) \quad I(s) = SC V(s)$$

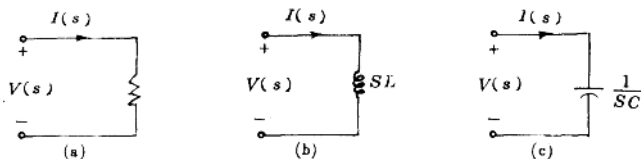


圖 1-16 (a)電阻, (b)電感, (c)電容

由上列諸方程式得知頻域中網路各電路元件之電壓及電流關係，恒能以簡單之代數方程式表示。一般而言，代數方程式之運算遠較微分方程式容易。

例題 1-3 試寫出圖 1-17 之網路方程式。

【解】： 根據克希荷夫電壓定律得

$$\begin{cases} (R_1 + \frac{1}{SC}) I_1(s) - \frac{1}{SC} I_2(s) = V(s) \\ (R_2 + SL + \frac{1}{SC}) I_2(s) - \frac{1}{SC} I_1(s) = 0 \end{cases}$$

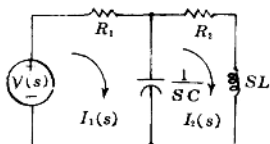


圖 1-17

例題 1-4 試寫出圖 1-18 之網路方程式。

【解】： 根據克希荷夫電流定律得