2004年MBA联考模拟试卷

综合能力分册

逻辑部分编著者　韩鹏杰　　审稿　柴生秦

写作部分编著者　谷衍奎

数学部分编著者　王式安　胡金德

赵达夫　郑家俊

机械工业出版社

2004年MBA联考综合能力考试模拟试卷

数 学 部 分

参考答案及详解

模拟试卷(一)参考答案及详解

一、条件充分性判断

1. 答案是：(A).

分析 因为方程 $x^4-2x^2+k=0$ 有 4 个相异的实数根，

所以以 x^2 为未知数的一元二次方程必有两个相异的正根.

即方程 $t^2-2t+k=0$ 的两根 $t_1,t_2\in \mathbf{R}^+$ 且 $t_1\neq t_2$.

$\therefore \begin{cases}\Delta=4-4k>0\\ k>0\end{cases}$ 解得 $0<k<1$.

条件(1)：因为 $k\in\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$ 是 $(0,1)$ 的子集，所以条件(1)充分.

条件(2)：因为 $k\in(0,3)$ 不是 $(0,1)$ 的子集，所以条件(2)不充分.

2. 答案是：(D).

分析 由条件可设甲速度为 u，乙速度为 v.

同时相向匀速行走了 x 小时，在 c 点相遇.

由条件(2)有 $\begin{cases}\dfrac{ux}{v}=\dfrac{8}{3}\\[2mm] \dfrac{vx}{u}=6\end{cases}$ 解之得 $\dfrac{u}{v}=\dfrac{2}{3}$.

再设 $u=2k,v=3k\ (k\neq 0)$，则

$$2k\cdot 6=3k\cdot x\Longrightarrow x=4$$

所以条件(2)充分.

由条件(1) 二人出发 4 小时后相遇.

则有 $4v=6u\Longrightarrow \dfrac{u}{v}=\dfrac{2}{3}$

所以 $4\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{3}$(小时)，即 2 小时 40 分.

即条件(1)也充分.

3. 答案是：(B).

分析 设轻轨时速为 u，机动自行车时速为 v. 由条件(2)有 $\begin{cases}\dfrac{6u}{u-v}=12\\[2mm] \dfrac{6u}{u+v}=4\end{cases}$

$\Longrightarrow u=2v$，即 $\dfrac{u}{v}=2$，条件(2)充分.

由条件(1)有 $\begin{cases}\dfrac{6u}{u-v}=8\\[2mm] \dfrac{6u}{u+v}=4\end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases}u=4v\\ u=2v\end{cases}$ 矛盾无解，所以条件(1)不充分.

4. 答案是：(D).

分析 条件(1)和条件(2)分别代入 $y=a^2-x^2$ 与 $y=\frac{b}{x}$ 中有 $f(x)=3-x^2, g(x)=\frac{2}{x}$. 有 $f(1)=g(1)=2$，并且 $f'(1)=-2, g'(1)=-2$，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x=1$ 处相切.

5. 答案是：(D).

分析 $y=x^3-3x+q, y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，驻点为 $x=\pm1$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	极大	↘	极小	↗

极大值 $y(-1)=2+q$，极小值 $y(1)=-2+q$，此外

$$\lim_{x\to-\infty} y(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} y(x)=+\infty$$

所以当 $q=-2$ 或 $q=2$ 时，方程有两个相异实根.

6. 答案是：(C).

分析 由 $ab=6, a-b=1$ 得 $a=3, b=2$. 所以

$$\int_0^1 \frac{dx}{a^2-b^2x^2}=\int_0^1 \frac{dx}{9-4x^2}=\frac{1}{6}\int_0^1\left(\frac{1}{3-2x}+\frac{1}{3+2x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{12}\left[\ln\frac{3+2x}{3-2x}\right]_0^1=\frac{1}{12}\ln 5$$

评注 本题主要考查定积分的计算.

7. 答案是：(A).

分析 因为面积

$$A=\int_0^{2a}|a^2-x^2|dx=\int_0^a(a^2-x^2)dx+\int_a^{2a}(x^2-a^2)dx=2a^3$$

当 $a=2$ 时，$A=2a^3=16$.

评注 本题主要考查，由 $x=a, x=b, x$ 轴和曲线 $y=f(x)$ 所围成图形面积

$$A=\int_a^b|f(x)|dx$$

8. 答案是：(C).

分析 $u=x^2-y^2, v=e^{xy}$ 代入 $z=f(u,v)$ 中有

$$z=f(x^2-y^2, e^{xy}), \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y\frac{\partial f}{\partial u}+xe^{xy}\frac{\partial f}{\partial v}$$

评注 条件(1)单独不成立，条件(2)单独也不成立，但联合起来结论成立. 注意条件(1)，条件(2)联合仅是结论成立的一个充分条件，并不是必要的. 例如取：$u=x^3-y^2, v=e^{xy}+x$ 结论也成立.

9. 答案是：(D).

分析 $x=2$ 时 $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&2\\4&9&4\end{vmatrix}=0$；

$x=3$ 时 $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&3\\4&9&9\end{vmatrix}=0$，

故(1),(2)都是充分条件,应选(D).

10. 答案是:(D).

分析 (1) $\boldsymbol{A}^3=0$, $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E}$,

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E},$$

$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,(1)是充分条件.

(2) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$,

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E},$$

$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 是可逆阵,(2)是充分条件.

故选(D).

11. 答案是:(E).

$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ ax_1+bx_2+cx_3=0,\\ a^2x_1+b^2x_2+cx_3=0\end{cases}$ 惟一零解 $\Longleftrightarrow\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}\neq 0$

$\Longleftrightarrow a\neq b\neq c$.

(1) $a\neq b$ 不是充分条件, (2) $b\neq c$ 不是充分条件.

且 $a\neq b, b\neq c$ 也不是充分条件(因当 $a=c$ 时,有非零解),故选(E).

12. 答案是:(D).

分析 (1)

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a&-b\\-c&\lambda-d\end{vmatrix}&=(\lambda-a)(\lambda-d)-bc\\&=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc\\&=\lambda^2-(a+d)\lambda+|\boldsymbol{A}|=0,\end{aligned}$$

$$\lambda=\frac{(a+d)\pm\sqrt{(a+d)^2-4|\boldsymbol{A}|}}{2},\quad |\boldsymbol{A}|<0,$$

$(a+d)^2-4|\boldsymbol{A}|>0$, $\boldsymbol{A}$ 有两个不同的实特征值.

(2) 同理

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0,$$

$$\lambda=\frac{(a+d)\pm\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2}=\frac{a+d\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}$$

b,c 同号$(a-d)^2+4bc>0$,$\boldsymbol{A}$ 有两个不同的实特征值.

故选(D).

13. 答案是:(D).

分析 条件(1), $AB\subset C$ 成立时, $ABC=AB, AB\subset(C\cup B)$,

所以 $AB(C\cup B)=AB$, $AB(C\cup B)=ABC$.

条件(2), $B\subset C$ 成立时, $C\cup B=C$,

所以 $AB(C\cup B)=ABC$.

故选(D).

14. 答案是:(C).

分析

$$P(B|A\cup\overline{B})=\frac{P(B(A\cup\overline{B}))}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(AB)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}$$
$$=\frac{P(A)-P(A\overline{B})}{P(A)+1-P(B)-P(A\overline{B})}$$
$$=\frac{0.4-0.2}{0.4+1-0.4-0.2}=\frac{0.2}{0.8}=\frac{1}{4}.$$

故选(C).

15\. 答案是:(C).

分析 当(1)成立时,$D(2X)=E(2X)$,即

$$4D(X)=2E(X).$$

由于 $X\sim B(n,p)$,所以 $2npq=np$,得出 $q=\frac{1}{2}$,而 $p=1-q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

当(2)成立时,$D(X-2)=E(X-2)$,即 $D(X)=E(X)-2$.

因而 $npq=np-2$,也就有 $2=np-npq=np(1-q)=np^2$.

如果(1)和(2)均成立,$\begin{cases}p=q=\frac{1}{2},\\ np^2=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}n=8,\\ p=q=\frac{1}{2}.\end{cases}$

再计算 EX^2,

$$EX^2=DX+(EX)^2=npq+(np)^2=8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{8}{2}\right)^2=18$$

故选(C).

二、问题求解

16\. 答案是:(B).

$$\frac{405+77-2}{2}\times 2.5=600(\text{米})$$

17\. 答案是:(D).

依题意有

$$20\times(1-60\%)+20\times 20\%=8+4=12(\text{万元})$$

18\. 答案是:(B).

分析 因为乘方指数是 9,所以唯有二项式中第二项为 8 次幂时才能得到 x^3 的项,即展开式中第 9 项为所求

$$T_9=C_9^8a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8x^3=\frac{9a}{16}x^3=\frac{9a}{4}x^3$$

所以 $a=4$.

19\. 答案是:(C).

分析 因为 $f(x)$ 定义域为 R,

所以实数 m 须满足条件$\begin{cases}mx^2-1\geqslant 0\\ x^2+4mx+3>0\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}m\geqslant 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}<m<\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow m\in\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

20\. 答案是:(A).

分析 因为 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时，

$$f'(x)=(x-1)(2x+1)<0,\quad f''(x)=4x-1>0$$

所以在 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时 $f(x)$ 单调减少且曲线 $y=f(x)$ 为凹的.

21. 答案是：(D).

分析 当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，

$$\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{x}(1+t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(1+x)^2$$

当 $x\geqslant 0$ 时，

$$\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}(1+t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}(1-t)\mathrm{d}t=1-\frac{1}{2}(1-x)^2$$

评注 本题主要考查变上限积分所确定的函数和被积函数带有绝对值积分.

22. 答案是：(B).

分析 令 $F(x,y,z)=y+z-xf(y^2-z^2)$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{-f}{1+2xzf'}=\frac{f}{1+2xzf'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{1-2xyf'}{1+2xzf'}$$

所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial y}=y$.

23. 答案是：(A).

分析 令 $\frac{y}{x}=u$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y+F\left(\frac{y}{x}\right)+xF'_u\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=y+F\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}F'_u$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1+\frac{1}{x}F'_u-\frac{1}{x}F'_u-\frac{y}{x}F''_{uu}\cdot\frac{1}{x}=1-\frac{y}{x^2}F''_{uu}$$

24. 答案是：(B).

分析 由题设条件 $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$，两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得

$$\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}0&0&3\\0&2&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&-9\\0&-4&0\\-3&0&2\end{bmatrix}.$$

故选(B).

25. 答案是：(C).

分析 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关 $\Longrightarrow\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关.

$\begin{cases}\alpha_1,\alpha_2\text{ 线性无关}\\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\text{ 线性相关}\end{cases}\Longrightarrow\alpha_4$ 可由 α_1,α_2 线性表出(且表出法惟一)

$\Longrightarrow\alpha_4$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，故(C)成立.

(D) 显然不成立，(A)，(B)，(E)，由(C)知 α_4 可由 α_1,α_2 线性表出，故(A) α_1 由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出，(B) α_2 由 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出，(E) α_3 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性表出，相当于要求 α_1 由 α_2,α_3 线性表出，α_2 由 α_1,α_3 线性表出，α_3 由 α_1,α_2 线性表出，而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以

上述表出都不可能.

26. 答案是：(B).

分析 (C),(D),(E)是对角阵、上三角阵、下三角阵，其特征值均是对角元素$-1,2,3$,可排除.

又(A)

$$\left|\lambda E-\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&0\\-2&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda-3)$$
$$=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda+1)$$

有特征值$-1,2,3$.

(B) $$\left|\lambda E-\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&3\\0&3&1\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-1&-3\\0&-3&\lambda-1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda-8)$$
$$=(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda+1)$$

有特征值$-1,2,4$.

故选(B).

27. 答案是：(B).

分析 X_1和X_2相互独立，均服从$N(1,1)$,所以

$$(X_1-X_2)\sim N(0,2),$$
$$E[(X_1-X_2)^2]=D(X_1-X_2)+[E(X_1-X_2)]^2=2.$$

28. 答案是：(E).

分析 由已知

$$P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$$
$$\Rightarrow P(A|B)=1-P(\overline{A}|\overline{B})=P(A|\overline{B}),$$

即事件A和B相互独立.

所以选(E).

29. 答案是：(E).

分析 设$X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 个元件故障,}\\0, & \text{其他,}\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,2n.$

显然，$DX_i=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$, $i=1,2,\cdots,2n$, X_i相互独立.

$$D(X_1+X_2+\cdots+X_{2n})=2n\cdot\frac{2}{9}=4,$$

解得$n=9$,即有18个元件.

$$E(X_1+X_2+\cdots+X_{18})=\frac{1}{3}\cdot9+\frac{2}{3}\cdot9=9.$$

故选(E).

30. 答案是：(B).

分析 由分布函数性质 $F(+\infty)=1$，得 $A=1$.

又根据 $F(x)$在 $x=0$ 处右连续，得 $A+Be^{-\lambda\cdot 0}=0$，即 $1+B=0$，$B=-1$.

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases} \quad (\lambda>0)$$

$$P(-1\leqslant X\leqslant 1)=F(1)-F(-1)=1-e^{-\lambda}.$$

所以选(B).

模拟试卷(二)参考答案及详解

一、条件充分性判断

1. 答案是:(C).

分析 条件(1)只能知道买进时情况,而条件(2)只知售出价位.故两条件单独均不充分,可能的选项只有(C)或(E).

两条件联合起来:

由条件(1) B 股买入 $20\times\frac{4}{5}=16$(万元),A 股买入 $20\times\frac{1}{5}=4$(万元).

由条件(2) $\frac{16}{8}(9-8)-\frac{4}{4}(4-3)=1$(万元).

即条件(1)与(2)联合起来充分.

2. 答案为(B).

分析 方程若有实根,则判别式的值必非负值,即 $\Delta_1=p^2-4q\geqslant0,\Delta_2=m^2-4n\geqslant0$

若 $\Delta_1+\Delta_2$ 的值非负!

则两方程中至少有一个方程有实根.

$$\Delta_1+\Delta_2=p^2+m^2-4(q+n)$$

由条件(2) $pm=2(q+n)$,所以

$$\Delta_1+\Delta_2=p^2+m^2-2pm=(p-m)^2\geqslant0$$

即条件(2)是充分的.

但由条件(1)将不可能得到上述结论.

所以条件(1)充分.

3. 答案是:(D).

分析 设优秀职工为 x 人,先进工作者为 y 人.

由条件(2)有$\begin{cases}x+y=22\\2000x+500y=200000\end{cases}$

$\Longrightarrow\begin{cases}x+y=22\\4x+y=40\end{cases}$解出 $x=6$(人),条件(2)充分.

由条件(1) $\frac{x}{y}=37.5\%=\frac{3}{8}$

设 $x=3k,y=8k\ (k\neq0)$,则有

$$3k\times2000+8k\times500=200000$$
$$k=2$$

即 $x=3\times2=6$(人),就是说条件(1)也是充分的.

4. 答案是:(C).

分析 条件(1)单独不充分,如 $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\x+1, & x\geqslant0\end{cases}$ $x<0$ 时,$f'(x)=-1<0$;$x>0$ 时,$f'(x)=1>0$,但 $x=0$ 不是 $f(x)$的极值点.

条件(2)单独也不充分，如 $f(x)=x^3$，$f''(0)=0$，但 $x=0$ 也不是 $f(x)$ 的极值点.

条件(1)和条件(2)联合起来充分. 由条件(2) $f''(x_0)=0$，所以 $f'(x)$ 在 x_0 点连续，再由条件(1) $f'(x)$ 在 x_0 两侧异号，不妨设 $x>x_0$ 时 $f'(x)>0$；$x<x_0$ 时 $f'(x)<0$. 所以有

$$\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = f'(x_0) \geqslant 0, \quad \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = f'(x_0) \leqslant 0$$

故 $f'(x_0)=0$，所以此时 x_0 是 $f(x)$ 的极值点.

5. 答案是：(A).

分析 设 $f(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$，定义域 $x>-1$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=0$，而 $f(0)=0$. 当 $x\neq 0$ 时 $f'(x)>0$，即 $f(x)$ 是单调增加的，所以当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<f(0)=0$. 即不等式 $x-\dfrac{x^2}{2}>\ln(1+x)$.

评注 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，不等式 $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)$ 成立.

6. 答案是：(B).

分析 当 $x=0$ 和 $x=a$ 时，$y=0$. 面积

$$S(a) = \int_0^a \left[-\frac{2}{3}x(x-a)-(4-a)x(x-a)\right]\mathrm{d}x = -\frac{1}{18}a^3(3a-14)$$

令 $S'(a)=-\dfrac{1}{3}a^2(2a-7)$，驻点 $a=\dfrac{7}{2}$. 显然当 $a=\dfrac{7}{2}$ 时，S 有最大值.

7. 答案是：(E).

分析 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x = -\frac{1}{k}\mathrm{e}^{-kx}\Big|_0^{+\infty}$，

当 $k>0$ 时，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-kx}=0$，由于 k 在分母，所以 $k\neq 0$.

即当 $k>0$ 时，积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x=\frac{1}{k}$ 收敛.

所以条件(1)，条件(2)单独都不充分，联合起来也不充分.

8. 答案是：(A).

分析 **解法一** 设

$$F(x,y,z) = \mathrm{e}^{yz} - xyz, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -yz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = y\mathrm{e}^{yz} - xy$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{yz}{y\mathrm{e}^{yz} - xy}$$

解法二 将方程 $\mathrm{e}^{yz}=xyz$ 两边对 x 求偏导，其中 $z=z(x,y)$. $\mathrm{e}^{yz}\cdot y\dfrac{\partial z}{\partial x}=yz+xy\dfrac{\partial z}{\partial x}$，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz}{y\mathrm{e}^{yz}-xy}$.

所以条件(1)是充分的.

当条件(2)满足时 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz-z\mathrm{e}^{xz}}{x\mathrm{e}^{xz}-xy}$，故条件(2)不充分.

9. 答案是：(D).

分析 (1) 当 $x=\pm 1$ 时，

$$f(x)|_{x=1}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\\3&4&1&2\\3&4&1&5\mp1\end{vmatrix}=0\quad(\text{一、二行相等}).$$

(2) 当 $x=\pm\sqrt{3}$ 时,

$$f(x)|_{x=\pm\sqrt{3}}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&3\mp3&3&4\\3&4&1&2\\3&4&1&2\end{vmatrix}=0\quad(\text{三、四行相等}).$$

故(1),(2)都是充分条件,应选(D).

10. 答案是:(D).

分析 (1) $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=0$,即$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 是可逆阵.

(2) $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=0$,即$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 是可逆阵.

(1),(2)分别均是充分条件,故应选(D).

11. 答案是:(A).

分析 (1) $r(\boldsymbol{A})=m$ 时,$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关,增广矩阵是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组增加一列成 $[\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b}]$,行数并不增加,故有 $r(\boldsymbol{A})=r[\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b}]$,$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解,(1)是充分条件.

(2) $r(\boldsymbol{A})=n$ 时,$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关,增广矩阵增加一列,有可能不能被 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表出,即可能 $r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})$,故(2)不是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分条件.

12. 答案是:(A).

分析 (1) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 有特征值 4,即有

$$|4\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})|=|5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 有 $\lambda=5$,故(1)是充分条件.

(2) 5^2 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值,即有

$$|5^2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2|=|(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(5\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})|=|5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}||5\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0.$$

$\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=5$ 或 $\lambda=-5$,不能确定,故(2)不是充分条件.

13. 答案是:(C).

分析 $$(\overline{A\cup B})C=\overline{A}\,\overline{B}C.$$

而 $\overline{A}C\cup\overline{B}C=C-ABC$,

当 $C\subset\overline{A}\,\overline{B}$ 时,$ABC=0$,$\overline{A}\,\overline{B}C=C-ABC$.

所以条件(1),条件(2)联立时,即 $C\subset\overline{A}\,\overline{B}$ 时成立.

故选(C).

14. 答案是:(D).

分析 AB 与 C 相互独立,所以 $P(ABC)=P(AB)P(C)$.又因为 A,B,C 是两两独立,故 $P(AB)=P(A)P(B)$.总之在条件(1)成立时有 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$,因此 A,B,C 相互独立.

A,B,C 是两两独立,所以 $\overline{A},\overline{B},C$ 也是两两独立,如果条件(2)成立,根据条件(1)的结论,就有 $\overline{A},\overline{B},C$ 相互独立,也就有 A,B,C 相互独立,故选(D).

15. 答案是:(B).

分析 因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1$,

$f(x)$配方可得：$\mu=\frac{1}{4},\sigma=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

即 $A=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{16}}$.

故选(B).

二、问题求解

16. 答案是：(C).

分析 原不等式即

$$|x|^2-4|x|+3>0$$

即
$$(|x|-1)(|x|-3)>0$$

上式可化为(1) $\begin{cases}|x|>1\\|x|>3\end{cases}$ 或 (2) $\begin{cases}|x|<1\\|x|<3\end{cases}$

$$X_{(1)}=(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)\quad X_{(2)}=(-1,1)$$

原不等式的解集

$$X=X_{(1)}\cup X_{(2)}=(-\infty,-3)\cup(-1,1)\cup(3,+\infty)$$

17. 答案是：(D).

分析 二项式两项指数之比是$\frac{3}{2}$：4＝3：8，按其反比分配指数 11.

可知后一项 3 次方时为常数项，即 T_4 为常数

$$T_4=C_{11}^3(-1)^3=-165$$

18. 答案是：(E).

分析 所给的 m 个数中，其最大的数与其他各数之差不大或很大时，结论将必然不同. 所以只需举一反例可推翻前 4 个答案.

例如 6,5,4,3,1 $a=\frac{19}{5}$

依题意可得 5,4,3 $b=4$

此时 $b>a$，当 m 个数成 $A\cdot P$ 时 $b=a$

又 12,5,4,3,1 $a=5$

去掉最大与最小 5,4,3 $b=4$

$b<a$，当 m 个数成 $A\cdot P$ 时 $a=b$.

19. 答案是：(A).

分析 只需$(x-2m)^2+\frac{m^2-m+1}{m-1}$为正值，

因为$(x-2m)^2\geqslant0, m^2-m+1>0$，所以 $m-1>0$，即 $m>1$ 时，$f(x)$定义域为 R.

20. 答案是：(D).

分析 在 $f(1+x)=af(x)$中，令 $x=0$ 得 $f(1)=af(0)$.

$$f'(1)=\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{af(x)-af(0)}{x}=af'(0)=ab$$

评注 本题主要考查导数的定义.

21. 答案是：(B).

分析 将 $x=0,y=1$ 代入 $y=ax^3+bx^2+c$ 中得 $c=1$. 将(B)中 $a\neq0,b=0,c=1$ 代入 $y=ax^3+bx^2+c$ 中有 $y=ax^3+1$, $y''(x)=6ax$ 在 $x=0$ 左右两侧 $y''(x)$ 符号改变,所以 $a\neq0$, $b=0,c=1$ 时(0,1)是曲线 $y=ax^3+bx^2+c$ 的拐点.

22. 答案是:(C).

分析 $I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)\mathrm{d}x\xlongequal{令\ tx=u}\int_0^s f(u)\mathrm{d}u.$

由此可知, I 的值只与 s 有关,不依赖于 t,应选(C).

评注 本题主要考查定积分的概念和定积分的换元法.

23. 答案是:(D).

分析 对 x 求偏导时,把 y 看成是常数,所以$\frac{\partial z}{\partial x}=y(\ln y)^{xy}\ln(\ln y)$.

24. 答案是:(B).

分析 $A=\begin{bmatrix}1 & a & \cdots & a\\ a & 1 & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a & \cdots & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & a & \cdots & a\\ a-1 & 1-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a-1 & 0 & \cdots & 1-a\end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}1+(n-1)a & a & \cdots & a\\ 0 & 1-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1-a\end{bmatrix},$$

当 $1+(n-1)a=0$, $a=-\frac{1}{n-1}=\frac{1}{1-n}$时,有 $r(A)=n-1$,故选(B).

25. 答案是:(C).

分析 $\xi_i,i=1,2,\cdots,s$ 是原无关向量中将第一个分量变为零,相等于减少向量的分量,向量组可能变成线性相关,故选(C).

其中(A),(B),(E)均是初等变换,不改变向量组的秩,必保持线性无关,(D)增加分量,必保持线性无关,故(A),(B),(E),(D)均不成立.

26. 答案是:(C).

因 $|\lambda E-A|=|(\lambda E-A)^{\mathrm{T}}|=|\lambda E-A^{\mathrm{T}}|$,即 A 和 A^{T} 有相同的特征方程,故它们有相同的特征值,应选(C). 若 A 有特征值 λ,则 A^{-1}有特征值$\frac{1}{\lambda}$; A^2 有特征值 λ^2, A^* 有特征值$\frac{|A|}{\lambda}$; E 的特征值为 $\lambda=1$.

故(A),(B),(D),(E)均不成立.

27. 答案是:(D).

分析 设 A 表示"取出的第一个球是黑球"; B 表示"取出的第二个球是黑球"; C 表示"取出的第三个球是白球". 则

$$P(A)=\frac{b}{a+b},\quad P(B|A)=\frac{b+c}{a+b+c},$$

$$P(C|AB)=\frac{a}{a+b+2c},$$

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b+c}{a+b+c}\cdot\frac{a}{a+b+2c}$$

$$= \frac{ab(b+c)}{(a+b)(a+b+c)(a+b+2c)}.$$

所以选(D).

28. 答案是:(A).

分析 由于 $P(C)=0$,所以

$$P(AC) = 0 = P(A)P(C),$$
$$P(BC) = 0 = P(B)P(C),$$
$$P(ABC) = 0 = P(A)P(B)P(C).$$

题设条件 $P(AB)=P(A)P(B)$,故 A,B,C 相互独立.

显然 $A,\overline{B},C$ 也相互独立,故选(A).

29. 答案是:(B).

分析 $X-E(X)=D(X)\cdot X$,即 $X=\dfrac{X-E(X)}{D(X)}$,因而 $E(X)=0,D(X)=1$.

由于 X 是在$[a,b]$上均匀分布,所以

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

总之$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2}=0, \\ \dfrac{(b-a)^2}{12}=1, \end{cases}$ 解得 $a=-\sqrt{3}$.

30. 答案是:(C).

分析 设 A_i 表示第 i 次取的是合格品, $i=1,2$.

因是有放回的抽取,所以 A_1,A_2 相互独立,且

$$P(A_1) = P(A_2) = 0.9, \quad P(A_1A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2) = 0.81.$$

该批产品被拒收的概率是

$$P(\overline{A_1A_2}) = 1 - P(A_1A_2) = 1 - 0.81 = 0.19.$$

所以选(C).

模拟试卷(三)参考答案及详解

一、条件充分性判断

1. 答案是:(C).

分析 从 A 到 20 米外的 B,甲走了 $\dfrac{20}{\frac{2}{3}}=30$(步),乙走了 $\dfrac{20}{\frac{5}{6}}=24$(步).

条件(1),(2)单独显然都不充分,联合起来有

$$20 \div \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)=40(\text{步}) \quad 20 \div \left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right)=20(\text{步})$$

所以联合起来充分.

2. 答案是:(D).

分析 设客车时速为 V 公里,则货车时速为 $3V/5$ 公里.

由条件(1)有

$$(1.2+0.6) \div \left(V-\frac{3V}{5}\right)=2 \div 60$$

解之得 $V=108$ 公里/小时.

由条件(2)有 $(1.2+0.8) \div \left(V-\dfrac{3V}{5}\right)=\dfrac{20}{9} \div 60$

解之得 $V=135$ 公里/小时

当两列车时速已知,车长已知的条件下,相向而行的错车时必定可以求出,所以条件(1),(2)都充分.

3. 答案是:(B).

分析 方程的判别式 $\Delta=(m-2)^2+4(m+3)=m^2+16>0$ 必为二实数根,设为 x_1,x_2.

由条件(2)

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2 &= (x_1+x_2)^2-x_1x_2 \\ &= (m-2)^2+2(m+3) \\ &= (m-1)^2+9 \end{aligned}$$

当且仅当 $m=1$ 时 $x_1^2+x_2^2$ 有最小值 9,条件充分.

显然条件(1)必然不充分.

4. 答案是:(A).

分析 令 $\varphi(x)=|f(x)|$.

$$\varphi'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\left|\frac{f(x)}{x-a}\right|=|f'_+(a)|=|f'(a)|$$

$$\varphi'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=-\lim_{x\to a^-}\left|\frac{f(x)}{x-a}\right|=-|f'_-(a)|=-|f'(a)|$$

因为 $f'(a)\neq 0$,所以 $\varphi'_+(a)\neq\varphi'_-(a)$. 故 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 不可导.

评注 本题主要考查 $f(x)$ 与 $|f(x)|$ 在一点可导性之间的关系,条件(2)是 $|f(x)|$ 在 $x=a$

处可导的一个充分条件.

5. 答案是：(E).

分析 $y=x\sqrt{ax-x^2}$的定义域为$ax-x^2\geqslant 0$. 因为$a>0$,所以$0\leqslant x\leqslant a$为函数定义域.

$$y'(x)=\sqrt{ax-x^2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{a-2x}{\sqrt{ax-x^2}}=\frac{3ax-4x^2}{2\sqrt{ax-x^2}}=0$$

得驻点$x=\frac{3}{4}a$. 显然$y=x\sqrt{ax-x^2}$在$\left(0,\frac{3}{4}a\right)$单调增加,在$\left(\frac{3}{4}a,a\right)$函数单调减少. 故条件(1),(2)单独都不充分,联合起来也不充分.

评注 函数在$\left(0,\frac{3}{4}a\right)$是单调增加的.

6. 答案是：(A).

分析 被积函数为分段函数表示的变上限定积分,在被积函数的分段点处,如果$f(x)$连续,则变上限函数的积分(本题$F(x)$)在分段点可导.

本题当$a=\frac{3}{2}$时,$f(x)$在$x=1$连续,所以$F(x)$在$x=1$处可导,并且

$$F'(1)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)'\bigg|_{x=1}=f(1)$$

当$a=2$时,$f(x)$在$x=1$不连续,所以$F(x)$在$x=1$不可导.

7. 答案是：(D).

分析 此题如直接比较I_1,I_2的大小有困难,但如将I_1,I_2同除$x_1\cdot x_2(>0)$,即可比较$\frac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}$与$\frac{\mathrm{e}^{x_1}}{x_1}$的大小.

令$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$,$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$,当$x<0$或$0<x<1$时$f'(x)<0$,所以$f(x)$单调递减.

由于$x_1<x_2<0$时有$f(x_1)>f(x_2)$,即$\frac{\mathrm{e}^{x_1}}{x_1}>\frac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}$,两边同乘$x_1\cdot x_2$,得$I_1<I_2$.

当$0<x_1<x_2<1$时也有$f(x_1)>f(x_2)$,即$I_1<I_2$.

所以条件(1),条件(2)单独都充分.

8. 答案是：(C).

分析 将$u=xy,v=x+y$代入有

$$f(u,v)=f(xy,x+y)=x^2+y^2+xy=(x+y)^2-xy$$

即$f(u,v)=v^2-u$,即$f(x,y)=y^2-x$,故$\frac{\partial f}{\partial x}=-1,\frac{\partial f}{\partial y}=2y$.

9. 答案是：(A).

分析

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{bmatrix}=2\boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}^2=2^2\boldsymbol{A},\quad\cdots,\quad\boldsymbol{A}^n=2^{n-1}\boldsymbol{A},$$

$$f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n,$$

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{A})&=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^n\\&=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}+2^2\boldsymbol{A}+\cdots+2^{n-1}\boldsymbol{A}\end{aligned}$$