共轭曲面原理

中册

陈 志 新

科 学 出 版 社

共轭曲面原理

中册

陈志新

科学出版社

1977

内 容 简 介

本书主要是论述初等共轭曲率问题．作者从对微分量间的一些内在基本共轭关系着手，运用图解法求解一些共轭曲率问题并讨论了滚动接触点处的共轭曲率问题，然后对四类共轭曲率问题进行了探讨．

本书可供机械原理和机构学方面的基础理论工作者、工程数学工作者以及机械工程人员参考用．

共轭曲面原理

中册

陈志新

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1977年4月第一版　开本：850×1168 1/32

1977年4月第一次印刷　印张：9

印数：0001—6,900　字数：234,000

统一书号：15031·140

本社书号：787·15—3

定价：1.10元

几 点 说 明

一、随着我国社会主义建设事业的蓬勃发展，特别是无产阶级文化大革命以来，我国的机械制造工业高速度地扩大和提高，为《共轭曲面原理》的发展提供了愈益丰富的养料．结果，《上册》的初稿虽然早在 1964 年就脱稿，但由于《下册》的内容不断地扩大，使它迄今未能全部完稿．然而，随着我国的精密复杂曲面(尤其是轮齿曲面和精密光学曲面)方面的设计与制造规模日益扩大，又很急需这方面的资料．为了满足这种急需，把已完稿的第三篇“初等共轭曲率问题”先作为《中册》出版．余下的第四篇“高等共轭曲率问题”和第五篇“有控制的点接触共轭曲面问题”待完稿后，再作为《下册》出版．

二、第三篇“初等共轭曲率问题”由第十至第十七共八章组成．第十章是对微分量间的一些内在的基本共轭关系的论述．第十一章通过用图解法求解一些共轭曲率问题来加深对这些基本关系的理解．第十二章讨论滚动接触点处的共轭曲率问题，作为对四类共轭曲率问题讨论的入门．第十三章是第一类共轭曲率问题的一个特例，鉴于它的应用价值较大，分析过程较简单，适合作为对四类共轭曲率问题展开讨论前的一个引子，因此，单列为一章．第十四章至第十七章分别对四类共轭曲率问题进行了探讨．

三、第三篇内阐述了下述四项学术性成果：

1. 用“共轭曲率关系方程式”(§ 11.1)和第一类共轭曲率问题普遍解内的“同向共轭曲率关系方程式”((14.46)，(14.51)，(14.52)三式)，按可以进行数值计算的方式，表达了两曲面线接触传动时，曲面的法曲率和挠曲率值，与瞬时共轭运动参量值间的关联．在平面等速比传动这种特殊情况下，这些关系方程式中的一部分简化成著名的 Euler-Savary 方程式(§ 14.7)，另一部分蜕变为一恒等

式.

2. 提出了一个齿形设计中的重要新概念,“轮胚节面”(§ 15.5, § 15.6, § 15.7). 它使目前已在广泛使用的一些具有独特轮胚外形的齿轮与以“节面”形状作为轮胚基准的齿轮,在概念上统一起来,并为设计新型特种齿形提供理论基础.

3. 用点接触型第三类共轭曲率问题普遍解的方式(§ 16.1)阐明了任何两曲面点接触传动时,曲面上的接触轨迹曲线以及瞬时传动速比值和加速比值的具体的直接求解方法.

4. 提出了一种利用刀具曲面(或曲线)参量值和共轭运动参量值直接求解曲面曲率值的方法(第十三章和第十四章). 这种方法省略了写出曲面参数方程式和进行微分等不必要的繁琐过程,并且,便于编成计算程序,在电子计算机上进行运算.

四、在解决了求曲面曲率值这项计算技术的基础上,第三篇内提出了一项新的分析技术——“曲率分析”. 它为解决精密复杂曲面(特别是轮齿曲面和复杂的精密光学曲面)的设计与制造中经常遇到的曲率干涉,接触斑痕分析等问题,提供了一种有效的手段. “曲率分析”在复杂精密曲面的设计与制造中的作用,犹如“应力分析”在机械零件强度设计中的作用. 并且,随着激光技术的发展和推广,从原理上讲,可利用激光方向性极好(即发散角小)的特性,对复杂精密曲面进行法向和曲率值的测定,从而为鉴定“曲率分析”的精确性提供了测试工具.

为了较具体地介绍“曲率分析”,第三篇内对几个应用实例作了较详尽的阐述,如圆弧齿轮传动的曲率分析(§ 14.8),锥齿轮齿曲面的曲率分析(§ 14.9, § 14.10),磨削等升距柱螺纹曲面用的砂轮的曲率分析(§ 14.11),迴转轮胚节面的曲率分析(§ 15.7),锥齿轮齿曲面的 V/H 检验法(§ 16.5)等. 此外,还列举了一些常用轨迹曲面的曲率计算公式(第十三章).

作　者

1974 年 12 月

目　　录

第三篇　初等共轭曲率问题
——共轭曲面微分邻域几何学(一)

第十章　微分量间的基本共轭关系

§10.1　三个基本微分量间的共轭关系式

设两共轭曲面在初始位置时，已共轭接触于 P 点，并设当时第一共轭曲面上 P 点的点向量为 $\vec{R}_{1P}=\vec{r}_{1P}$，第二共轭曲面上 P 点的点向量为 $\vec{R}_{2P}=\vec{r}_{2P}$. 又设当时 P 点处的两共轭曲面的单位公共法线向量(由实体指向空域)为 $\vec{N}_{1P}=\vec{n}_{1P}=-\vec{n}_{2P}=-\vec{N}_{2P}$. 由于 P 点为共轭接触点，公共法线向量 $\vec{N}_{1P}=\vec{n}_{1P}$ 必然满足条件 (4.3) 式，即

$$\left\{(\Omega_1\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{1P})+\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}\Omega_1\vec{\omega}_1-\left[(\Omega_2\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2P})+\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1}\Omega_1\vec{\omega}_2+\frac{d(l\vec{p})}{d\varepsilon_1}\Omega_1\right]\right\}\cdot\vec{n}_{1P}=0.$$

现设于第一共轭曲面上，在 P 点的微分邻域内任选一点 P'，它的点向量为 $\vec{R}_{1P}+d\vec{R}_{1P}$，如图 53 所示. 该点处的单位法线向量设为 $\vec{N}_{1P}+d\vec{N}_{1P}$. 在第二共轭曲面上，对应于 P' 点，必定有一对应的共轭点 $\bar{P}'$，设它的点向量为 $\vec{R}_{2P}+d\vec{R}_{2P}$，如图 54 所示. 该点处的单位法线向量设为 $\vec{N}_{2P}+d\vec{N}_{2P}$.

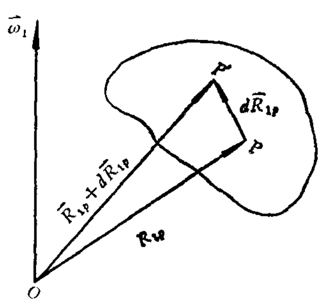

图 53　在第一共轭曲面上，共轭接触点 P 的微分邻域

若当 P' 点进入到共轭接触位置时，第一共轭曲面绕 $\vec{\omega}_1$ 轴迴转

过 $d\varepsilon_{1P}$ 转角，则那时的对应共轭接触点 P'' 的点向量，亦即在啮合曲面上对应于 P' 的点向量 $\vec{r}_{1P}+d\vec{r}_{1P}$ 将为：

$$\vec{r}_{1P}+d\vec{r}_{1P}=(d\varepsilon_{1P}\vec{\omega}_1)\otimes(\vec{R}_{1P}+d\vec{R}_{1P})+\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}d\varepsilon_{1P}\vec{\omega}_1,$$

如图 55 所示.

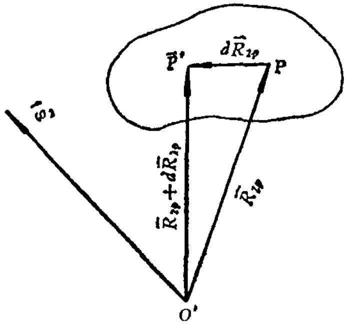

图 54　在第二共轭曲面上，共轭接触点 P 的微分邻域

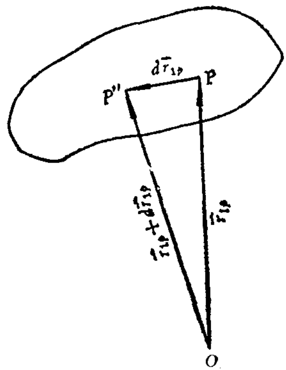

图 55　在啮合曲面上，共轭接触点 P 的微分邻域

利用向量迴转特性 V (2.11) 式，上式可展开成：

$$\vec{r}_{1P}+d\vec{r}_{1P}=\vec{\omega}_1\times(\vec{R}_{1P}+d\vec{R}_{1P})d\varepsilon_{1P}+\vec{R}_{1P}+d\vec{R}_{1P}+\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}d\varepsilon_{1P}\vec{\omega}_1.$$

忽略高于一阶的微分量，并考虑到 $\vec{R}_{1P}=\vec{r}_{1P}$，得：

$$d\vec{r}_{1P}=\vec{\omega}_1\times\vec{R}_{1P}d\varepsilon_{1P}+d\vec{R}_{1P}+\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}d\varepsilon_{1P}\vec{\omega}_1,$$

即

$$d\vec{r}_{1P}=d\vec{R}_{1P}+\vec{v}_P d\varepsilon_{1P} \tag{10.1}$$

式中

$$\vec{v}_P=\vec{\omega}_1\times\vec{R}_{1P}+\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}\vec{\omega}_1 \tag{10.2}$$

(10.2)式的运动学意义是：$\vec{v}_P$ 代表在第一共轭曲面上的 P 点的绝对运动速度向量.

利用共轭基本条件(4.1)式，还可推导得：

$$d\vec{r}_{1P}-d\vec{r}_{2P}=d(l\vec{p}),$$

即

$$d\vec{r}_{2P}=d\vec{r}_{1P}-d(l\vec{p})=d\vec{R}_{1P}+\left[\vec{v}_P-\frac{d(l\vec{p})}{d\varepsilon_1}\right]d\varepsilon_{1P}\quad(10.3)$$

由于 P'、$\bar{P}'$ 假定为一对相互对应的共轭点，并共轭接触于 P'' 点处，从而有：

$$\vec{R}_{2P}+d\vec{R}_{2P}=(-Md\varepsilon_{1P}\vec{\omega}_2)\otimes(\vec{r}_{2P}+d\vec{r}_{2P})-\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1}d\varepsilon_{1P}\vec{\omega}_2.$$

利用向量迴转特性 V(2.11)式，上式可展开成：

$$\vec{R}_{2P}+d\vec{R}_{2P}=-M\vec{\omega}_2\times(\vec{r}_{2P}+d\vec{r}_{2P})d\varepsilon_{1P}$$

$$+\vec{r}_{2P}+d\vec{r}_{2P}-\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1}d\varepsilon_{1P}\vec{\omega}_2.$$

忽略高于一阶的微分量，并考虑到 $\vec{R}_{2P}=\vec{r}_{2P}$ 及(10.3)式，得：

$$d\vec{R}_{2P}=-M\vec{\omega}_2\times\vec{R}_{2P}d\varepsilon_{1P}+d\vec{R}_{1P}+\vec{v}_Pd\varepsilon_{1P}$$

$$-\frac{d(l\vec{p})}{d\varepsilon_1}d\varepsilon_{1P}-\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1}d\varepsilon_{1P}\vec{\omega}_2,$$

即

$$d\vec{R}_{2P}=d\vec{R}_{1P}+\vec{\lambda}_Pd\varepsilon_{1P}\quad(10.4)$$

式中

$$\vec{\lambda}_P=\vec{v}_P-M(\vec{\omega}_2\times\vec{R}_{2P})-\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1}\vec{\omega}_2-\frac{d(l\vec{p})}{d\varepsilon_1}$$

$$=(\vec{\omega}_1\times\vec{R}_{1P})-M(\vec{\omega}_2\times\vec{R}_{2P})+\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}\vec{\omega}_1$$

$$-\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1}\vec{\omega}_2-\frac{d(l\vec{p})}{d\varepsilon_1}.\quad(10.5)$$

(10.5)式的运动学意义是：$\vec{\lambda}_P$ 代表 P 点处，第一共轭曲面相对于第二共轭曲面的相对运动速度向量.

当 P'、$\bar{P}'$ 两共轭点进入共轭接触位置 P'' 点时，对应的两单位法线向量应共线，即：

$$(d\varepsilon_{1P}\vec{\omega}_1)\otimes(\vec{N}_{1P}+d\vec{N}_{1P})=-(Md\varepsilon_{1P}\vec{\omega}_2)\otimes(\vec{N}_{2P}+d\vec{N}_{2P}).$$

利用向量迴转特性 V(2.11)式，将上式展开，并忽略高于一

阶的微分量，得:

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{N}_{1P} d\varepsilon_{1P} + \vec{N}_{1P} + d\vec{N}_{1P} = -M\vec{\omega}_2 \times \vec{N}_{2P} d\varepsilon_{1P} - \vec{N}_{2P} - d\vec{N}_{2P}.$$

考虑到 $\vec{N}_{1P} = -\vec{N}_{2P}$，得:

$$d\vec{N}_{2P} = -(d\vec{N}_{1P} + \vec{\eta}_P d\varepsilon_{1P}). \qquad (10.6)$$

式中

$$\vec{\eta}_P = \vec{\omega}_1 \times \vec{N}_{1P} + M\vec{\omega}_2 \times \vec{N}_{2P} = (\vec{\omega}_1 - M\vec{\omega}_2) \times \vec{N}_{1P}. \qquad (10.7)$$

(10.7) 式的运动学意义是：$\vec{\eta}_P$ 代表单位向量 $\vec{N}_{1P}$ 按第一共轭曲面相对于第二共轭曲面的相对转动角速度向量 $(\vec{\omega}_1 - M\vec{\omega}_2)$ 转动时，$\vec{N}_{1P}$ 端点的运动速度向量.

现令

$$d\vec{R}_{1P} = \vec{\tau} ds_1, \qquad d\vec{R}_{2P} = \vec{\tau}' ds_2, \qquad d\vec{r}_{1P} = \vec{t} ds;$$

其中 $\vec{\tau}$ 为在第一共轭曲面上，过 P 点的任一单位切向向量，ds_1 为沿 $\vec{\tau}$ 方向的线段长度；$\vec{\tau}'$ 为在第二共轭曲面上，过 P 点的与 $\vec{\tau}$ 相对应的单位切向向量，ds_2 为沿 $\vec{\tau}'$ 方向的对应线段长度；$\vec{t}$ 为在啮合曲面上，过 P 点的与 $\vec{\tau}$ 相对应的单位切向向量，ds 为沿 $\vec{t}$ 方向的对应线段长度. 并设第一共轭曲面在 P 点处沿 $\vec{\tau}$ 方向的法曲率为 $K_{1\tau}$，挠曲率（或称短程挠率）为 $G_{1\tau}$ 及第二共轭曲面在 P 点处沿 $\vec{\tau}'$ 方向的法曲率[1)]为 $K_{2\tau'}$，共轭挠曲率（即以 $\vec{N}_{1P}$ 为基准法线来确定正负号的挠曲率，它和对应的挠曲率是同值异号）为 $G_{2\tau'}$，则根据 (3.1) 式，有

$$(d\vec{N}_{1P})_{\vec{\tau}} = [K_{1\tau}\vec{\tau} + G_{1\tau}(\vec{N}_{1P} \times \vec{\tau})] ds_1,$$

$$(d\vec{N}_{2P})_{\vec{\tau}'} = [K_{2\tau'}\vec{\tau}' + G_{2\tau'}(\vec{N}_{1P} \times \vec{\tau}')] ds_2.$$

将这些关系式代入 (10.4)、(10.1) 和 (10.6) 三式，得:

$$\vec{\tau}' ds_2 = \vec{\tau} ds_1 + \vec{\lambda}_P d\varepsilon_{1P}, \qquad (10.8)$$

$$\vec{t} ds = \vec{\tau} ds_1 + \vec{v}_P d\varepsilon_{1P}, \qquad (10.9)$$

$$[K_{2\tau'}\vec{\tau}' + G_{2\tau'}(\vec{N}_{1P} \times \vec{\tau}')] ds_2 = -[K_{1\tau}\vec{\tau} + G_{1\tau}(\vec{N}_{1P} \times \vec{\tau})] ds_1 - \vec{\eta}_P d\varepsilon_{1P}. \qquad (10.10)$$

---

1) 由于共轭法曲率和对应的法曲率是同值同号，因此，统称为法曲率，不另用“共轭法曲率”这个名词.

式中的 $\vec{\lambda}_P$、$\vec{v}_P$、$\vec{\eta}_P$ 分别按(10.5)、(10.2)、(10.7)式确定.

(10.8)、(10.9)、(10.10)三式合在一起,称为共轭接触点微分邻域内的三个基本微分量间的共轭关系式.

§ 10.2 转角增量 $d\varepsilon_{1P}$ 及共轭接触点处曲面曲率两者间的关系式

若已知共轭运动及第一共轭曲面上的 $d\vec{R}_{1P}=\vec{\tau}ds_1$,和 $(d\vec{N}_{1P})_{\vec{\tau}}=[K_{1\tau}\vec{\tau}+G_{1\tau}(\vec{N}_{1P}\times\vec{\tau})]ds_1$,则要根据上节内的三个基本微分量间的共轭关系式(10.8)、(10.9)、(10.10)求得第二共轭曲面和啮合曲面上的对应的 $d\vec{R}_{2P}=\vec{\tau}'ds_2$,$(d\vec{N}_{2P})_{\vec{\tau}'}=[K_{2\tau'}\vec{\tau}'+G_{2\tau'}(\vec{N}_{1P}\times\vec{\tau}')]ds_2$ 和 $d\vec{r}_{1P}=\vec{t}ds$,必须首先求解得对应的转角增量 $(d\varepsilon_{1P})_{\vec{\tau}}$,这是求解过程中最关键的一步.

对应转角增量 $d\varepsilon_{1P}$ 可根据共轭的基本条件,即相对运动速度垂直于公共法线这个条件求得如下:

当 P' 点进入到共轭接触位置 P'' 点时,该点处两共轭曲面间的相对运动速度 $\vec{\lambda}_P+d\vec{\lambda}_P$ 为:

$$\begin{aligned}\vec{\lambda}_P+d\vec{\lambda}_P=&[\vec{\omega}_1\times(\vec{r}_{1P}+d\vec{r}_{1P})]\\&-\left(M+\frac{dM}{d\varepsilon_1}d\varepsilon_{1P}\right)[\vec{\omega}_2\times(\vec{r}_{2P}+d\vec{r}_{2P})]\\&+\left(\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}+\frac{d^2\sigma_1}{d\varepsilon_1^2}d\varepsilon_{1P}\right)\vec{\omega}_1-\left(\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1}+\frac{d^2\sigma_2}{d\varepsilon_1^2}d\varepsilon_{1P}\right)\vec{\omega}_2\\&-\left[\frac{d(l\vec{p})}{d\varepsilon_1}+\frac{d^2(l\vec{p})}{d\varepsilon_1^2}d\varepsilon_{1P}\right].\end{aligned}$$

利用(10.1)、(10.3)、(10.5)三式,并考虑到 $\vec{R}_{1P}=\vec{r}_{1P}$、$\vec{R}_{2P}=\vec{r}_{2P}$,再忽略高于一阶的微量,上式可简化为:

$$\begin{aligned}\vec{\lambda}_P+d\vec{\lambda}_P=&\vec{\lambda}_P+\vec{\omega}_1\times(d\vec{R}_{1P}+\vec{v}_Pd\varepsilon_{1P})-M\vec{\omega}_2\\&\times\left\{d\vec{R}_{1P}+\left[\vec{v}_P-\frac{d(l\vec{p})}{d\varepsilon_1}\right]d\varepsilon_{1P}\right\}-\frac{dM}{d\varepsilon_1}\vec{\omega}_2\times\vec{R}_{2P}d\varepsilon_{1P}\\&+\frac{d^2\sigma_1}{d\varepsilon_1^2}\vec{\omega}_1d\varepsilon_{1P}-\frac{d^2\sigma_2}{d\varepsilon_1^2}\vec{\omega}_2d\varepsilon_{1P}-\frac{d^2(l\vec{p})}{d\varepsilon_1^2}d\varepsilon_{1P}.\end{aligned}$$

于是,得

$$d\vec{\lambda}_P = (\vec{\omega}_1 - M\vec{\omega}_2) \times d\vec{R}_{1P} + \left\{\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_P - M\vec{\omega}_2 \times \left[\vec{v}_P - \frac{d(l\vec{p})}{d\varepsilon_1}\right]\right.$$
$$\left. - \frac{dM}{d\varepsilon_1}\vec{\omega}_2 \times \vec{R}_{2P} + \frac{d^2\sigma_1}{d\varepsilon_1^2}\vec{\omega}_1 - \frac{d^2\sigma_2}{d\varepsilon_1^2}\vec{\omega}_2 - \frac{d^2(l\vec{p})}{d\varepsilon_1^2}\right\} d\varepsilon_{1P}. \tag{10.11}$$

同时,在 P'' 点处,第一共轭曲面的单位法线向量 $\vec{n}_{1P} + d\vec{n}_{1P}$ 为:

$$\vec{n}_{1P} + d\vec{n}_{1P} = (d\varepsilon_{1P}\vec{\omega}_1) \otimes (\vec{N}_{1P} + d\vec{N}_{1P}).$$

利用向量迴转特性 V (2.11) 式, 并忽略高于一阶的微量及考虑到 $\vec{n}_{1P} = \vec{N}_{1P}$, 则由上式,可得:

$$d\vec{n}_{1P} = \vec{\omega}_1 \times \vec{N}_{1P} d\varepsilon_{1P} + d\vec{N}_{1P}. \tag{10.12}$$

P'' 点既然假定为共轭接触点, 则根据共轭的基本条件 (4.4) 式,有 $(\vec{\lambda}_P + d\vec{\lambda}_P) \cdot (\vec{n}_{1P} + d\vec{n}_{1P}) = 0$,

即 $\vec{\lambda}_P \cdot \vec{n}_{1P} + \vec{\lambda}_P \cdot d\vec{n}_{1P} + \vec{n}_{1P} \cdot d\vec{\lambda}_P + d\vec{\lambda}_P \cdot d\vec{n}_{1P} = 0$.

考虑到 P 点也是一共轭接触点, 即 $\vec{\lambda}_P \cdot \vec{n}_{1P} = 0$, 并忽略高于一阶的微量,则由上式,可得:

$$\vec{\lambda}_P \cdot d\vec{n}_{1P} + \vec{n}_{1P} \cdot d\vec{\lambda}_P = 0.$$

将(10.11)、(10.12)两式代入上式,并考虑到 $\vec{n}_{1P} = \vec{N}_{1P}$, 得:

$$(\vec{\omega}_1 \times \vec{N}_{1P}) \cdot \vec{\lambda}_P d\varepsilon_{1P} + \vec{\lambda}_P \cdot d\vec{N}_{1P} + (\vec{\omega}_1 - M\vec{\omega}_2) \times d\vec{R}_{1P} \cdot \vec{N}_{1P}$$
$$+ \left\{\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_P - M\vec{\omega}_2 \times \left[\vec{v}_P - \frac{d(l\vec{p})}{d\varepsilon_1}\right] - \frac{dM}{d\varepsilon_1}\vec{\omega}_2 \times \vec{R}_{2P}\right.$$
$$\left. + \frac{d^2\sigma_1}{d\varepsilon_1^2}\vec{\omega}_1 - \frac{d^2\sigma_2}{d\varepsilon_1^2}\vec{\omega}_2 - \frac{d^2(l\vec{p})}{d\varepsilon_1^2}\right\} \cdot \vec{N}_{1P} d\varepsilon_{1P} = 0,$$

即

$$\vec{J}_P \cdot \vec{N}_{1P} d\varepsilon_{1P} = \vec{\lambda}_P \cdot d\vec{N}_{1P} - (\vec{\omega}_1 - M\vec{\omega}_2) \times \vec{N}_{1P} \cdot d\vec{R}_{1P},$$

亦即

$$d\varepsilon_{1P} = \frac{\vec{\lambda}_P \cdot d\vec{N}_{1P} - \vec{\eta}_P \cdot d\vec{R}_{1P}}{\vec{J}_P \cdot \vec{N}_{1P}}. \tag{10.13}$$

式中 $\vec{\eta}_P$ 按 (10.7) 式确定,

$$\vec{J}_P = -\vec{\omega}_1 \times (\vec{v}_P - \vec{\lambda}_P) + M\vec{\omega}_2 \times \left[\vec{v}_P - \frac{d(l\vec{p})}{d\varepsilon_1}\right] + \frac{dM}{d\varepsilon_1}\vec{\omega}_2$$
$$\times \vec{R}_{2P} - \frac{d^2\sigma_1}{d\varepsilon_1^2}\vec{\omega}_1 + \frac{d^2\sigma_2}{d\varepsilon_1^2}\vec{\omega}_2 + \frac{d^2(l\vec{p})}{d\varepsilon_1^2}. \tag{10.14}$$

(10.14)式的运动学意义是：$\vec{J}_P$ 代表 P 点处，第二共轭曲面相对于第一共轭曲面的相对运动加速度向量，并且等号右侧的头两项代表相对牵连加速度向量.

现令 $d\vec{R}_{1P}=\vec{\tau}ds_1$，其中 $\vec{\tau}$ 为在第一共轭曲面上，过 P 点的任一单位切向向量，ds_1 为沿 $\vec{\tau}$ 方向的线段长度；并设第一共轭曲面在 P 点处沿 $\vec{\tau}$ 方向的法曲率为 $K_{1\tau}$，挠曲率为 $G_{1\tau}$，则根据(3.1)式，有

$$(d\vec{N}_{1P})_{\vec{\tau}}=[K_{1\tau}\vec{\tau}+G_{1\tau}(\vec{N}_{1P}\times\vec{\tau})]ds_1.$$

将它们代入(10.13)式，则得沿 $\vec{\tau}$ 方向的转角增量 $(d\varepsilon_{1P})_{\vec{\tau}}$ 为：

$$(d\varepsilon_{1P})_{\vec{\tau}}=\frac{\vec{\lambda}_P\cdot[K_{1\tau}\vec{\tau}+G_{1\tau}(\vec{N}_{1P}\times\vec{\tau})]ds_1-\vec{\eta}_P\cdot\vec{\tau}ds_1}{\vec{J}_P\cdot\vec{N}_{1P}},$$

即

$$(d\varepsilon_{1P})_{\vec{\tau}}=\frac{(K_{1\tau}\vec{\lambda}_P+G_{1\tau}\vec{\lambda}_P\times\vec{N}_{1P}-\vec{\eta}_P)\cdot\vec{\tau}ds_1}{\vec{J}_P\cdot\vec{N}_{1P}}. \tag{10.15}$$

(10.15)式即为所要求的转角增量与曲面曲率间的关系式；式中的 $\vec{\lambda}_P$、$\vec{\eta}_P$、$\vec{J}_P$ 分别按(10.5)、(10.7)、(10.14)式确定.

§10.3 转角增量与曲面曲率间关系的图解表示法

设 $\vec{q}$ 为在第一共轭曲面上，过 P 点的一单位切向向量，它与 $\vec{\tau}$ 垂直，即 $\vec{\tau}\cdot\vec{q}=0$，并其方向是如此确定的，即 $\vec{\tau}\times\vec{q}=\vec{N}_{1P}$，亦即 $\vec{q}=\vec{N}_{1P}\times\vec{\tau}$. 现令第一共轭曲面在 P 点处沿 $\vec{q}$ 方向的法曲率为 K_{1q}，挠曲率为 G_{1q}，亦即

$$(d\vec{N}_{1P})_{\vec{q}}=K_{1q}\vec{q}ds_1+G_{1q}(\vec{N}_{1P}\times\vec{q})ds_1.$$

由于 P 点为共轭接触点，该点处两共轭曲面间的相对运动速度必然与公共法线相垂直，即 $\vec{\lambda}_P\cdot\vec{N}_{1P}=0$. 因此，$\vec{\lambda}_P/|\vec{\lambda}_P|$ 必然也是在第一共轭曲面上，过 P 点的一单位切向向量. 现设第一共轭曲面在 P 点处沿 $\vec{\lambda}_P/|\vec{\lambda}_P|$ 方向的法曲率为 $K_{1\lambda}$，挠曲率为 $G_{1\lambda}$，即

$$(dN_{1P})_{\vec{\lambda}}=K_{1\lambda}\frac{\vec{\lambda}_P}{|\vec{\lambda}_P|}ds_1+G_{1\lambda}\left(\vec{N}_{1P}\times\frac{\vec{\lambda}_P}{|\vec{\lambda}_P|}\right)ds_1.$$

另设以 $\vec{N}_{1P}$ 为轴线，由单位切向向量 $\vec{\lambda}_P/|\vec{\lambda}_P|$ 转至单位切向向

量 $\vec{\tau}$ 的转角为 $\theta_{\lambda\tau}$（包括符号），亦即

$$\vec{\tau} = (\theta_{\lambda\tau}\vec{N}_{1P}) \otimes \frac{\vec{\lambda}_P}{|\vec{\lambda}_P|}.$$

利用向量迴转的展开式（2.6）式，并考虑到 $\vec{\lambda}_P \cdot \vec{N}_{1P} = 0$，上式可展开成：

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{\lambda}_P}{|\vec{\lambda}_P|}\cos\theta_{\lambda\tau} + \left(\vec{N}_{1P} \times \frac{\vec{\lambda}_P}{|\vec{\lambda}_P|}\right)\sin\theta_{\lambda\tau}.$$

于是，得：

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\lambda}_P = |\vec{\lambda}_P| \cos\theta_{\lambda\tau},$$

即

$$\cos\theta_{\lambda\tau} = \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\lambda}_P}{|\vec{\lambda}_P|}, \tag{10.16}$$

及

$$\vec{\tau} \cdot \left(\vec{N}_{1P} \times \frac{\vec{\lambda}_P}{|\vec{\lambda}_P|}\right) = \sin\theta_{\lambda\tau},$$

即

$$\sin\theta_{\lambda\tau} = \frac{(\vec{N}_{1P} \times \vec{\lambda}_P) \cdot \vec{\tau}}{|\vec{\lambda}_P|}. \tag{10.17}$$

显然，以 $\vec{N}_{1P}$ 为轴线，由单位切向向量 $\vec{\tau}$ 转至单位切向向量 $\vec{\lambda}_P/|\vec{\lambda}_P|$ 的转角为 $\theta_{\tau\lambda} = -\theta_{\lambda\tau}$.

于是，利用关系式（3.4）式，可得：

$$\begin{aligned} K_{1\lambda} &= K_{1\tau}\cos^2\theta_{\tau\lambda} + K_{1q}\sin^2\theta_{\tau\lambda} + G_{1\tau}\sin 2\theta_{\tau\lambda} \\ &= K_{1\tau} - (K_{1\tau} - K_{1q})\sin^2\theta_{\lambda\tau} - 2G_{1\tau}\sin\theta_{\lambda\tau}\cos\theta_{\lambda\tau}, \end{aligned}$$

即

$$K_{1\tau} - K_{1\lambda} = [(K_{1\tau} - K_{1q})\sin\theta_{\lambda\tau} + 2G_{1\tau}\cos\theta_{\lambda\tau}]\sin\theta_{\lambda\tau}. \tag{10.18}$$

又利用关系式（3.5）式，可得：

$$\begin{aligned} G_{1\lambda} &= -\frac{(K_{1\tau} - K_{1q})}{2}\sin 2\theta_{\tau\lambda} + G_{1\tau}\cos 2\theta_{\tau\lambda} \\ &= (K_{1\tau} - K_{1q})\sin\theta_{\lambda\tau}\cos\theta_{\lambda\tau} + G_{1\tau}(2\cos^2\theta_{\lambda\tau} - 1), \end{aligned}$$

即

$$G_{1\tau} + G_{1\lambda} = [(K_{1\tau} - K_{1q})\sin\theta_{\lambda\tau} + 2G_{1\tau}\cos\theta_{\lambda\tau}]\cos\theta_{\lambda\tau}. \tag{10.19}$$

由 (10.18)、(10.19) 两式，并利用 (10.16)、(10.17) 两式，可得：

$$\frac{K_{1\tau}-K_{1\lambda}}{G_{1\tau}+G_{1\lambda}}=\frac{\sin\theta_{\lambda\tau}}{\cos\theta_{\lambda\tau}}=\frac{\dfrac{(\vec{N}_{1P}\times\vec{\lambda}_P)\cdot\vec{\tau}}{|\vec{\lambda}_P|}}{\dfrac{\vec{\tau}\cdot\vec{\lambda}_P}{|\vec{\lambda}_P|}}=\frac{(\vec{N}_{1P}\times\vec{\lambda}_P)\cdot\vec{\tau}}{\vec{\lambda}_P\cdot\vec{\tau}},$$

即

$$[K_{1\tau}\vec{\lambda}_P-G_{1\tau}(\vec{N}_{1P}\times\vec{\lambda}_P)]\cdot\vec{\tau}=[K_{1\lambda}\vec{\lambda}_P+G_{1\lambda}(\vec{N}_{1P}\times\vec{\lambda}_P)]\cdot\vec{\tau},$$

或

$$\begin{aligned}&[K_{1\tau}\vec{\lambda}_P+G_{1\tau}(\vec{\lambda}_P\times\vec{N}_{1P})]\cdot\vec{\tau}\\&=[K_{1\lambda}\vec{\lambda}_P+G_{1\lambda}(\vec{N}_{1P}\times\vec{\lambda}_P)]\cdot\vec{\tau}.\end{aligned}\tag{10.20}$$

利用 (10.20) 关系式，(10.15) 关系式可以表达成为

$$(d\varepsilon_{1P})_{\vec{\tau}}=\frac{[K_{1\lambda}\vec{\lambda}_P+G_{1\lambda}(\vec{N}_{1P}\times\vec{\lambda}_P)-\vec{\eta}_P]\cdot\vec{\tau}ds_1}{\vec{J}_P\cdot\vec{N}_{1P}}.\tag{10.21}$$

(10.21)关系式的特点在于其中的 $\dfrac{[K_{1\lambda}\vec{\lambda}_P+G_{1\lambda}(\vec{N}_{1P}\times\vec{\lambda}_P)-\vec{\eta}_P]}{\vec{J}_P\cdot\vec{N}_{1P}}$ 与 $\vec{\tau}$ 的方向无关. 这个特点为转角增量与曲面曲率间关系的图解表示提供了基础.

由(10.7)式，得：$\vec{\eta}_P\cdot\vec{N}_{1P}=[(\vec{\omega}_1-M\vec{\omega}_2)\times\vec{N}_{1P}]\cdot\vec{N}_{1P}=0$, 因此，$\vec{\eta}_P/|\vec{\eta}_P|$ 也是在第一共轭曲面上，过 P 点的一单位切向向量. 于是，$\vec{\eta}_P$ 可表达成为：$\vec{\eta}_P=a_1\vec{\lambda}_P+a_2(\vec{N}_{1P}\times\vec{\lambda}_P)$.

将上式的两侧分别与 $\vec{\lambda}_P$ 及 $(\vec{N}_{1P}\times\vec{\lambda}_P)$ 作数量积，并考虑到 $\vec{\lambda}_P\cdot\vec{N}_{1P}=0$, 得：

$$\vec{\eta}_P\cdot\vec{\lambda}_P=a_1|\vec{\lambda}_P|^2,$$

即

$$a_1=\frac{[(\vec{\omega}_1-M\vec{\omega}_2)\times\vec{N}_{1P}]\cdot\vec{\lambda}_P}{|\vec{\lambda}_P|^2}=\frac{(\vec{\omega}_1-M\vec{\omega}_2)\cdot(\vec{N}_{1P}\times\vec{\lambda}_P)}{|\vec{\lambda}_P|^2},$$

及

$$\vec{\eta}_P\cdot(\vec{N}_{1P}\times\vec{\lambda}_P)=a_2|\vec{\lambda}_P|^2,$$

即

$$a_2=\frac{[(\vec{\omega}_1-M\vec{\omega}_2)\times\vec{N}_{1P}]\cdot(\vec{N}_{1P}\times\vec{\lambda}_P)}{|\vec{\lambda}_P|^2}=-\frac{(\vec{\omega}_1-M\vec{\omega}_2)\cdot\vec{\lambda}_P}{|\vec{\lambda}_P|^2}.$$