初级自学科学技术丛书

几何证明题与作图题

赵 华 季家修 编著

江苏人民出版社

·内容提要·

本书内容分兩部分：第一部分說明几何定理为什麼要証明和怎样証明，并介紹各种主要証法及証題的思考途徑；第二部分介紹几何作图的意义和作图題的解法，对於怎样由分析得到作法以及如何进行討論，都作了說明。可供初学平面几何的干部、工人、農民閱讀。

新知自学科学技术丛书

几何証明題与作图題

赵　华　李家修　編著

*

江苏省书刊出版業营業許可証出〇〇一号

江苏人民出版社出版

南京湖南路十一号

新華书店江苏分店發行　苏州印刷厂印刷

*

开本787×1092耗1/32　印張 3 7/16　字數76,000

一九五六年八月第一版

一九五八年六月南京第三次印刷

印數 33,001—64,000

統一书号：7100·317

定　价(7)三角二分

目　　录

几何証明題

几 何 証 明 題

一、什么是几何証明題

几何学是研究几何图形性質的科学。我們在几何学書上，可以看到很多用来显示几何图形性質的叙述，如：

1. 等腰三角形底角相等。

2. 一个三角形的兩边和它們所夾的角，与另一个三角形的兩边和它們所夾的角对应相等，則兩个三角形全等。

3. 三角形的任意一个外角大于和它不相鄰的任意一个內角。

4. 兩条直綫和第三条直綫相交，如果一对同位角相等，則这兩条直綫平行。

5. 如果一条直綫和一个圓的一条半徑垂直，并且垂綫足在圓上，那末这条直綫和这圓相切。

这些用来显示图形性質的每一个叙述，必須經过証明，才能确定它的正确，这許多具有正确性的叙述，叫做几何定理。

有些定理，在証明別的定理时，是要用它作为根据的。例如，在証明“一个三角形的三边与另一个三角形的三边对应相等，則兩个三角形全等”时，就可以根据“等腰三角形底角相等”以及“一个三角形的兩边和它們所夾的角与另一个三角形的兩边和它們所夾的角对应相等，則兩个三角形全等”来証明。这些常被用来証明其他定理的定理，叫做“基本定理”，簡称“定理”。又有許多定理，在証明別的定理时，用不到或很少

用到，几何書上把它們列入习題，由讀者自己去証明，这許多定理通常叫做"証明題"，証明題实际上也就是定理。

上面已經講过，定理必須經过証明，才能确定它的正确性。所謂"証明"，就是用邏輯推理的方式，表明这个定理所以成立的理由。也就是說明为什么在一定的条件下（假設），必然产生一定的結論（終結）。

也許有人問道："图形的性質既是指它的形狀、位置和大小，那么，对于定理可不可以只用观察、实測或实驗来肯定它的正确呢？"我們說不可以。因为有些时候用眼睛来观察会发生錯覚，这样就容易作出不正确的判断。

請用眼睛直观回答下列問題：

（1）图 1 中的兩綫段 a 和 b 等長嗎？

（2）图 2 中的几条直綫互相平行嗎？

（3）图 3 中的兩个矩形全等嗎？

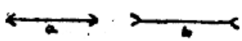

图 1

图 2

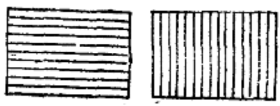

图 3

請实际測量一下，再回答上面的問題。

对于上面三个图，用眼睛直观出来的結果是：图 1 中的綫段 a 比 b 短；图 2 中的几条直綫不平行；图 3 中左边的矩形比右边矩形寬些，而右边的矩形比左边的矩形長些。但实測的結果是：图 1 中的兩条綫段相等；图 2 中的几条直綫互相平行；图 3 中的兩个矩形全等。从这里会知道，用眼睛直观沒有实測精确。那么对于定理，可不可以只用实际測量或实际繪图的方法来判断呢？也不可以。因为不論測量或画图都要用

仪器，而仪器的精确度是有一定的限度的。譬如，用量角器来量三角形的三个角，再求它們的和，不一定每次都能刚好得到180°，可能有些誤差。即使量得$\triangle ABC$的三个角的和正好是180°，这只能判定所有三角形中的一个三角形ABC是这样，其余的三角形究竟怎样，是无从知道的。因为沒有量过它們，就不能知道它們是否与$\triangle ABC$具有同样的結果(三內角和等于180°)。那么多量几个三角形怎样呢？这样还是不行，尽管一量再量，量来量去，还只是量了所有三角形中的某些个，而不是它們的全体。如果仅根据个别情形的正确就来判定全体的正确，这是片面的、不科学的。

上面的話，并不是說研究图形的性質不可以或不需要用眼睛来观察，用仪器来测量和画图，而是說只凭这些方法是不够的。

我們学习几何定理的过程，便是由直接观察和测量，进而到抽象的推理。整个几何学也是从感性認識发展到理性認識的。几何概念的形成是人类在長期的生产斗爭里，从許多具体事物中，經过亿万次的观察，然后从許多具体事物中，剔除其物質屬性（如顏色、質地、硬度……），把它們抽象化。这样从現实而抽象，不但能与現实密切結合，而且能更好的反映現实和指导現实。

略知几何学发展的人都知道，自紀元前二千年左右，由于测地的需要，人們必須在地上画綫、作角以及計算地积，当时的人从实踐中建立起許多实际的規則，这些規則有的是正确的，例如用3、4、5为边作三角形得出直角来。然而，也有的只是近似的，例如当时以为等腰三角形的面积等于腰与底的乘积之半。这个时期的几何学只是一些感性知識的累积。自紀元前六、七世紀，埃及人的几何知識傳入希臘，經过希臘学者

(其中以欧几里得功績最大)进一步的研究，將丰富的感覚材料，加以去粗取精，去伪存眞，由此及彼，由表及里的改造制作，造成概念和理論的系統，最后由欧几里得总結出几条最基本的原則，就是我們現在所說的"公理"。以这些公理作基础，經过邏輯推理，得到許多定理。这时几何学才初步的由感性認識跃进到理性認識。

二、証題前必要的准备

几何定理必須經过邏輯証明来肯定其正确，那么怎样証明，在証題前应該注意什么，这是必須知道的。

証題前必須做到下列各点：

1．明白題意：一題到手，首先应該明白題意，对于題中的名詞的定义，必須了解。

例如：梯形中綫平行于它的底边。

要明白这題的意思，必須首先了解这題中的名詞定义。

(1) 梯形：只有兩边平行的四边形。

(2) 梯形的底：梯形中互相平行的兩条边叫梯形的底。

(3) 梯形的中綫：梯形中不平行的兩条边的中点的連綫。

在学习几何时，对于名詞概念必須确切領会，不仅应該能用自己的語言，严格的說出它們的定义，还应該能用图形来表示它們，能举出它的正反兩面的例子，也就是能說出一些几何事实，幷指出它們适合或不适合这个定义。

2．分淸題中的假設(已知)和終結(求証)：在任何一个定理中，假設都是推得終結的充分理由，終結都是在这个定理假設下的必然結果。

例如：(1) 凡直角皆相等。改成下面的叙述形式便易于

分清：

$$\underbrace{\text{兩个角都是直角}}_{\text{假設}}\text{則}\underbrace{\text{这兩个角相等}}_{\text{終結}}$$

$$\text{(2)}\ \underbrace{\text{四边形对角互补}}_{\text{假設}}\text{則}\underbrace{\text{这个四边形可内接于圓}}_{\text{終結}}$$

象上面举的兩个例子，若写出它們的一般形式，可写作：

$$\text{設}\quad \underbrace{A\text{为}B}_{\text{已知}}\text{則}\underbrace{P\text{为}Q}_{\text{求証}}$$

这些定理的已知和求証比較簡單，易于分清。下面再举几个已知和求証較为复杂的例子：

(3) 角的平分綫上一点，与其兩边的距离相等。

$$\underbrace{\left.\begin{array}{l}\text{一直綫为角的平分綫}\\ \text{兩綫段为自角平分綫上一点到角的兩}\\ \text{边的垂綫}\end{array}\right\}}_{\text{已知}}\underbrace{\text{則此兩綫段相等}}_{\text{求証}}$$

若写出它的一般形式，可写作：

$$\text{設}\quad \underbrace{\left.\begin{array}{l}A\text{为}B\\ C\text{为}D\\ \cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}}_{\text{已知}}\text{則}\underbrace{P\text{为}Q}_{\text{求証}}$$

(4) 垂直于弦的直徑平分这弦，并且平分这弦所对的兩条弧。

$$\underbrace{\left.\begin{array}{l}\text{一直綫通过圓心}\\ \text{这直綫垂直于圓的弦}\end{array}\right\}}_{\text{已知}}\text{則}\underbrace{\left\{\begin{array}{l}\text{这直綫平分这弦}\\ \text{这直綫平分这弦所对的弧}\end{array}\right.}_{\text{求証}}$$

若写出它的一般形式，可写作：

$$\text{設}\quad \underbrace{\left.\begin{array}{l} A\text{为}B \\ C\text{为}D \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}}_{\text{已知}} \text{則} \underbrace{\left\{\begin{array}{l} P\text{为}Q \\ M\text{为}N \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right.}_{\text{求証}}$$

3. 依題意作图要有普遍性和精确性：就我們所学的几何来講，証明定理时，某些地方是要依靠图形的显明性的。因此，在証題时，若所画的图形沒有普遍性，无形中就增加了一些假設条件，这样会失去原来的題意，还会产生不合理的終結，也就是会产生一些錯誤的"定理"。

〔例〕 一个三角形的兩边和其中一边上的高，与另一个三角形的兩边和其中一边上的高对应相等，則兩个三角形全等。

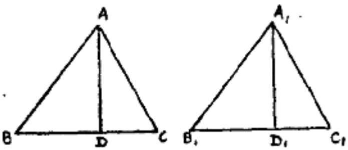

图 4

〔已知〕 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 中：$AB=A_1B_1$，$BC=B_1C_1$

又BC上的高AD等于B_1C_1上的高A_1D_1。

〔求証〕 $\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$

〔証明〕 $\because AB=A_1B_1$，$AD=A_1D_1$，

$\angle ADB=\angle A_1D_1B_1=90^\circ$；

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle A_1B_1D_1$， $\therefore \angle B=\angle B_1$。

$\because AB=A_1B_1$，$\angle B=\angle B_1$，$BC=B_1C_1$，

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$。

粗看还会認为这个題是正确的，但如图 5 所示的兩个三角形ABC和$A_1B_1C_1$中，$AB=A_1B_1$，$BC=B_1C_1$，BC上的高

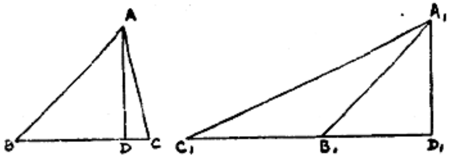

图 5

AD 等于 B_1C_1 上的高 A_1D_1，然而 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$，并不全等。从这里自会知道这题的錯誤所在，图 4 中所画的兩个三角形都是銳角三角形，这仅是特殊情形，用特例来判断一般情况是会引起錯誤的。

証題时作图要力求精确，精确的作图能帮助我們思考；而不正确的作图，不但无助于思考，有时还会产生一些錯誤的終結。

〔例〕　凡三角形都是等腰三角形。

〔已知〕　$\triangle ABC$ 是任意三角形

〔求証〕　$AB=AC$

〔証明〕　作 $\angle A$ 的平分綫 AO，BC 的垂直平分綫 DO，交于 O。自 O 引 $OE\perp AC$，$OF\perp AB$，連 OB、OC，

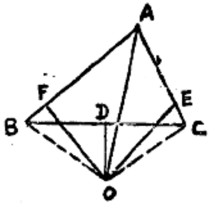

图 6

$\because \angle AFO=\angle AEO=90^\circ$，$\angle FAO=\angle EAO$，$AO=AO$；

$\therefore \triangle AFO\cong\triangle AEO$，$AF=AE$。又 $OB=OC$，$OF=OE$，$\angle BFO=\angle CEO$；

$\therefore \triangle BFO\cong\triangle CEO$，$FB=EC$，$AB=AF+FB$，$AC=AE+EC$；$\therefore AB=AC$。

凡三角形都是等腰三角形，这显然是錯誤的，但是上面的

証明却条条有理，錯誤发生在哪里呢？問題在于作图不正确。若能精确的作图，則过O引AB和AC的垂綫，它們的垂足不会都落在AB和AC上的。而是若F在AB上，則E必在AC的延長綫上；若E在AC上，則F必在AB的延長綫上。

上面已經說过，正确的作图能帮助証題时的思考，但是有时原題附有图形，或是已經精确的作图，从图上仍然得不到半点启发，感不到絲毫帮助，又是什么原因呢？其中的一个原因，是由于我們缺乏看图的能力。下面举出一些例題供大家辨認，希望大家能經常的注意类似这样的問題。

（1）在下列图中有多少綫段？

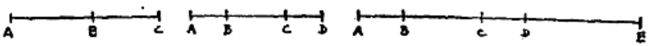

图7

（2）下列图中有多少弧（小于一个圓周的）？

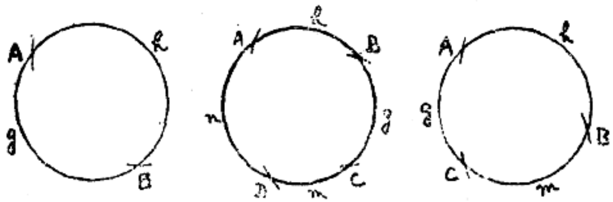

图8

（3）下列图中有多少个角？——讀出来。

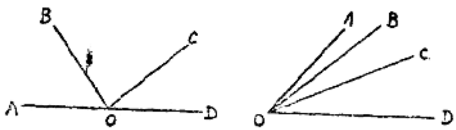

图9

（4） 下列图（10—12）中各有多少个三角形？

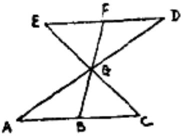

图10

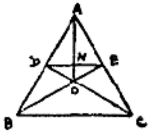

图11

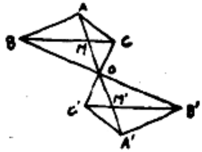

图12

（5）下列图中有多少个三角形？多少个平行四边形？多少个梯形？

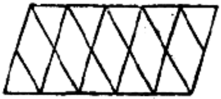

图13

为了借助图形的显明性，便于找到証法，当正确的依題意作图以后，我們也常常在图中适当的作出标記，这样可使我們更清楚辨認出哪些綫段是相等的，哪些角是相等的，哪一对三角形是全等的，哪些角是直角，……这也是有助于思考的。

4．当正确的依題意作图以后，还須把題中的叙述，改换程式，即用符号或极簡短的几何术語，写出題中的已知和求証。

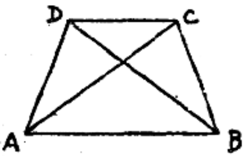

图14

〔例1〕 等腰梯形的对角綫相等。

〔已知〕 梯形 $ABCD$ 中，

$AD=BC$，$AB\parallel CD$

〔求証〕 $AC=BD$。

〔例2〕 三角形内一点到三頂点距离的和小于三角形的周。

〔已知〕 D 为 $\triangle ABC$ 中一点

〔求証〕 $AD+BD+CD$

$<AB+BC+CA$

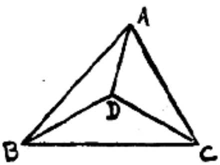

图15

上述的准备工作，既已做好，便可着手証明。証明的思考途徑常常是从題中終結想起，回忆有关公理、定义及已知定理，选擇其中适用的来逐步証明。

〔例〕 角的平分綫上的任意一点到角的兩边的距离相等。

（1）明白題意：

a. 角的平分綫是把这角分成相等的兩个角的射綫。

b. 点到角的兩边的距离，是指由这点到角的兩边所引垂綫的長。

（2）分清題中的假設和終結：

假設是一已知角及其平分綫上一点到兩边的垂綫。

終結是这兩条垂綫相等。

（3）依題意作图，适当的引入标記，并把題中的叙述改变为程式。

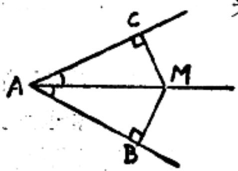

图16

〔已知〕 $\angle BAC$ 为已知角，M 为其平分綫 AM 上的任一点，$MB \perp AB$，$MC \perp AC$。

〔求証〕 $MB = MC$

（4）就題中終結，回忆有关定理，选擇其中适用的来証明。

a. 求証的是兩綫段 MB、MC 相等，回忆全等三角形的对应边相等，而且从图中也可看出 $\Delta ABM \cong \Delta ACM$。

b. 要証明 $\Delta ABM \cong \Delta ACM$，必須从 $s.a.s.$，$a.s.a.$，$s.s.s.$ 或 $a.a.s.$ 其中之一来考虑。由图中及所引的标記可以看出（依据題設）$\angle BAM = \angle CAM$，$\angle ABM = \angle ACM = 90°$，所以不是从 $a.s.a.$ 去考虑，便是从 $a.a.s.$ 去考虑。

c. 由上面可知，要証明 $\Delta ABM \cong \Delta ACM$，必須先証明

$AB=AC$ 或 $AM=AM$。这里 AB 是否等于 AC 还无从知道，而 $AM=AM$ 是恒等的。

我們已經由求証逆推到已知，則这題便不难証明，証明的叙述在邏輯順序上，正好是与上面思考过程相反。

〔証明〕 $\because \angle ABM=\angle ACM=90^\circ$，$\angle BAM=\angle CAM$，

$AM=AM$，

$\therefore \Delta ABM\cong\Delta ACM$， $\therefore MB=MC$。

（4）中 a—c 的思考过程叫做解析。对于証明題怎样去解析，找出証法，下面將較詳細的談到。

习 題 一

1. 試述下列各名詞的定义，并用图形来表示它們：

（1）鈍角；（2）兩角相补；（3）对頂角；（4）平行綫；

（5）兩直綫互相垂直；（6）內錯角；（7）同位角；

（8）同側內角；（9）三角形中的高、中綫；（10）梯形。

2. 兩直綫能有几种位置关系？
3. 三点能有几种位置关系？
4. 一直綫与一圓能有几种位置关系？
5. 兩圓能有几种位置关系？
6. 举出一些定理，并指出它們的已知和求証是什么？
7. 依下列題意作图，并將題中的已知和求証，改变为程式：

（1）等腰三角形底角的平分綫相等。

（2）直角三角形斜边中点到三頂点等距离。

（3）等腰三角形底边上任意点与頂点所連成的綫段比其腰小。

（4）三角形兩边的和大于第三边上中綫的兩倍。

（5）順次連結四边形四边的中点成平行四边形。

（6）平行四边形各角的平分綫構成一个矩形。

（7）梯形对角綫中点的連綫平行于底，且等于兩底之差的一半。

(8) 內接于圓的梯形必为等腰梯形。

(9) 以等腰三角形一腰为直徑所作的圓必过其底边中点。

(10) 四边形的对角互补則其四頂点共圓。

三、証題的思考途徑

着手証明时，常用解析法去思考，就是先假定所要証明的終結已經成立，而倒推出它必需有哪些充分条件才能成立，逐步的倒推上去，直到这条件与已知条件符合为止。設有一定理“如 A 則 E”，我們常常这样去思考：要証明 E 成立，必先証 D 成立，而 D 的成立与否，又必先看 C 是否成立，C 的成立与否，又必先看 B 是否成立，若 B 是在已知条件 A 下容易推証的事实，那么，証明 E 的成立就不难了。証明的叙述，在邏輯順序上恰好与解析相反。这种思考和証明的方法，有些人叫做“逆推順証”。

〔例 1〕 在 $\triangle ABC$ 的兩边向外作正三角形 ABD 和 ACE，則 $BE=CD$。

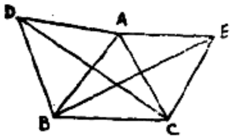

图17

〔已知〕 $\triangle ABC$ 是已知三角形，$\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 都是正三角形。

〔求証〕 $BE=CD$

〔解析〕 (1) 在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ABE$ 中：已有 $AD=AB$，$AC=AE$，若 $CD=BE$，則 $\triangle ADC\cong\triangle ABE$。所以我們知道，要証明 $CD=BE$，必先証明 $\triangle ADC\cong\triangle ABE$。

(2) $\triangle ADC$ 和 $\triangle ABE$ 已知兩边对应相等了，要証明它們全等，就該从 $s.a.s.$ 或 $s.s.s.$ 上去考虑。若从 $s.s.s.$ 去考虑，就必須事先証明 $BE=CD$，这是不可能的，因为这是原題的求証。所以，我們知道要証明 $\triangle ADC\cong\triangle ABE$ 是必須从

$s.a.s.$ 上去考虑，就是必先証明 $\angle DAC=\angle BAE$。

（3）要証明 $\angle DAC=\angle BAE$，必須先証明 $\angle DAB=\angle EAC$，而題設中 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 都是正三角形，$\angle DAB=\angle EAC=60$ 。

解析到这里便不难証明，只須把上面的叙述倒过来就成了。

〔証明〕 $\angle DAB=\angle EAC=60^\circ$，$\angle DAC=\angle BAE$。
又 $AD=AB$，$AC=AE$，$\therefore \triangle ADC\cong\triangle ABE$，
$\therefore BE=CD$。

〔例 2 〕 D 为 $\triangle ABC$ 的中綫 AM 上的一点，若 $\angle B>\angle C$，則 $\angle 2>\angle 1$。

〔已知〕（略）

〔求証〕（略）

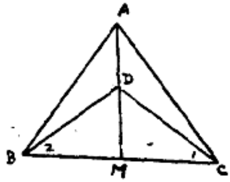

图18

〔解析〕（1）在 $\triangle BDC$ 中，若 $\angle 2>\angle 1$，必有 $DC>DB$，所以要証明 $\angle 2>\angle 1$ 必先証明 $DC>DB$。

（2）要証明 $DC>DB$，可从下面两个定理去考虑：

a。在同一三角形中对大角的边大；

b。一个三角形的两边与另一个三角形的两边对应相等夾角大的三角形的第三边大。

若用前一个定理，即須先証明 $\angle 2>\angle 1$，自然不行，因为这是題中的終結，所以必須从后一个定理去考虑。而 DC 和 DB 分别在 $\triangle DCM$ 和 $\triangle DBM$ 中，并且已知 $CM=BM$，$DM=DM$，故应先証明 $\angle DMC>\angle DMB$。

（3）因为 $\angle DMC$ 和 $\angle DMB$ 分别在 $\triangle AMC$ 和 $\triangle AMB$ 中，并且已知 $BM=CM$，$AM=AM$，所以要証明 $\angle DMC>\angle DMB$，只須先証明 $AC>AB$。