中学生数学
课外读物

怎样应用数学归纳法

洪　波

上海教育出版社

中学生数学课外读物

怎样应用数学归納法

洪　　波

上海教育出版社

一九六五年·上海

內容提要

数学归納法是数学里一种重要的証明方法，初学的人往往不容易掌握这个方法的精神实质，解题时就只能机械地硬套两个步驟．本书主要是帮助讀者更好地了解为什么、什么时候要应用数学归納法，怎样正确、灵活地应用这个方法，从而进一步掌握这个方法的实质，以便能够更正确、灵活地应用这个方法．

本书可供高中二年級学生閱讀．

中学生数学课外读物

怎样应用数学归納法

洪 波

*

上海教育出版社出版

（上海永福路123号）

上海市书刊出版业营业許可証出090号

上海大众文化印刷厂印刷

新华书店上海发行所发行 各地新华书店经售

*

开本：787×1092 1/32 印张：2 字数：40,000

1964年12月第1版 1965年11月第4次印刷

印数：158,001—178,000本

統一书号：7150·1529

定 价：（七）0.16元

編輯説明

数学，在中学里是一門基本工具学科，通过这一学科的教学，必須使中学生掌握数学这个工具，为他們参加生产劳动和进一步学习打下扎实的基础. 为了使中学生学好数学，除了必須用最大的努力提高教学质量以外，还需要各方面的配合. 我們編輯这套“中学生数学課外讀物”，目的就在于配合教学，使中学生更好地掌握基础知識，进一步提高基本技能，同时扩大他們的眼界，培养他們对数学的爱好，以帮助他們适应参加生产劳动和进一步学习的需要.

这套讀物的內容主要包括下列两个方面：一、就中学数学課程中的一些問題，介紹为深透理解这些問題所需要的基础知識，并提供一些必要的习題，以加强基本訓练和提高运用知識解决实际問題的能力；二、就一些与中学数学有关的专題，介紹数学方法，邏輯知識，数学某些分支的概况，数学史方面的知識，等等.

这套讀物的編写还是一种新的尝試. 无論在选題、要求、內容、体裁等方面是否能适合中学生的需要，希望教育工作者和讀者对我們提出宝貴的意見，同时还希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学課外讀物，帮助我們做好这套讀物的編輯工作.

中学生数学課外讀物編审委員会

1963 年 8 月

目　录

前言……………………………………………………………… 1
一　为什么要应用数学归纳法…………………………………… 1
二　数学归纳法是怎样的一个方法……………………………… 8
三　什么时候需要应用数学归纳法……………………………13
四　怎样正确地应用数学归纳法………………………………29
五　怎样灵活地应用数学归纳法………………………………41

前　言

数学归納法是数学里一种重要的証明方法. 要比較正确地理解和运用这个方法,就必須弄清楚:为什么要应用数学归納法,什么时候需要应用数学归納法,怎样正确地应用数学归納法,怎样灵活地应用数学归納法等問題.

本书的目的就是試图帮助讀者弄清楚上面所說的这些問題,从而掌握数学归納法的实质,以便能够更順利地运用这个方法.

一　为什么要应用数学归納法

为什么要应用数学归納法?

要回答这个問題,就要让我們从头談起,先从数学的推理談起.

在数学里,除了要求計算的問題外,还有要求証明論断的正确性的問題,也就是所謂"証明題". 解决这类問題的方法,就是作一整串的推理.

所謂"推理",通常用的是形式邏輯中的两种方法,一是演繹法,一是归納法.

演繹的推理方法,是数学里常用的方法. 它主要是从一般的定义、公理和已經被証明了的定理出发,推导出特殊的判

断．也可以說，它是从一般到特殊的推理方法．

例如，要証明“三角形的一个外角等于和它不相邻的两个內角的和”．

我們可以这样来叙述：

如图1，$\angle ACD$ 是 $\triangle ABC$ 的和 $\angle ACB$ 相邻的外角，$\angle A$ 和 $\angle B$ 是和 $\angle ACD$ 不相邻的內角．

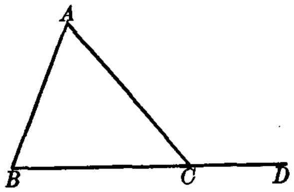

图 1

因为

$$\angle ACD+\angle ACB=180°,$$

$$\angle A+\angle B+\angle ACB=180°,$$

所以

$$\angle ACD+\angle ACB=\angle A+\angle B+\angle ACB.$$

因此

$$\angle ACD=\angle A+\angle B.$$

这里，我們先从一般的定理“相邻的两个角，如果它們的另一边互为反向延长綫，那么，这两个角的和等于180°”出发，推导出我們所討論的特殊情况：“$\angle ACD+\angle ACB=180°$”．再从一般的定理“三角形三个內角的和等于180°”出发，推导出特殊的結論“$\angle A+\angle B+\angle ACB=180°$”．然后，从一般的公理“等于第三个量的两个量相等”出发，推导出特殊的結果“$\angle ACD+\angle ACB=\angle A+\angle B+\angle ACB$”．最后，从一般的公理“等量减去等量，它們的差相等”出发，推导出“$\angle ACD=\angle A+\angle B$”的論断．

在数学的証明中，經常会遇到这样的推理方法．

再来看什么是归納法．归納法，是以各种特殊、个别的

情况的論断作为基础，再从这些个别情况的論断，归結出一般的結論．也可以說，它是从特殊到一般的推理方法．

例如，人們对于圓的周长和直徑长的关系，經过无数次的实踐，具体地測量了这个圓或者那个圓的周长和直徑长，算算它們的比值，得出很多很多的实际数字．从这些数字归納出一个結論說：一切圓的周长和它的直徑长的比值，是一个常数．

再如，关于指数函数的性质，我們有这样的一个命題：

当 a 是正数的时候，不論 x 是任何数，都得

$$a^x>0.$$

要証明这个命題，我們先把 x 分为下列几种情况：

1．設 x 是一个正数：

(1) 如果 x 是一个正整数，

(2) 如果 x 是一个正分数，

(3) 如果 x 是一个正无理数；

2．設 x 是一个負数；

3．設 x 等于零．

然后，推导出这些情况下的判断：如果 x 是正整数，$a^x>0$；如果 x 是正分数，$a^x>0$；如果 x 是正无理数，$a^x>0$；如果 x 是負数，$a^x>0$；如果 x 是零，$a^x>0$．最后，从这些特殊情况下的判断，归納出一个一般的結論：不論 x 是任何数，当 $a>0$ 的时候，都得 $a^x>0$．

这里要注意的是，每一种特殊情况下的判断的导出，还是应用演繹法的．例如，如果 x 是正整数，我們是这样証明的：

如果 x 是一个正整数，那么，因为 $a>0$，所以 $a^x>0$．

这里所用的推理方法，实际上是从"几个正数的乘积一

定大于 0”这样的一个一般定理，来推导出一个特殊的判断“$a^x>0$”，因而是演繹法.

因此，应用归納法时，对于各种特殊情况下的判断，我們可以通过实踐来証实，也可以通过演繹推理来导出．而在数学里，更多的还是用后一种方法，就是結合演繹法和归納法来完成論証任务的方法.

不論“通过实踐”也罢，“运用演繹法”也罢，我們的主要目的还在于怎样从特殊的判断得出一般的結論．让我們用具体的例子来說明这个問題吧！

首先，观察二次三項式 $f(x)=x^2+x+11$．先用自然数（就是正整数）1 来代替其中的变量 x，我們得到函数的值：$f(1)=13$；并且可以看到 13 是一个质数．再用自然数 2 来代替 x，得到函数的值：$f(2)=17$；并且 17 也是一个质数，继續分别用自然数 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 来代替 x，得到函数的值：

$$f(3)=23;\quad f(4)=31;\quad f(5)=41;\quad f(6)=53;$$
$$f(7)=67;\quad f(8)=83;\quad f(9)=101.$$

可以看出，这些函数值都是质数.

从这些特殊情况下的判断，就可以归納出这样的一个一般結論：当 x 是不超过 9 的自然数时，二次三項式 $f(x)=x^2+x+11$ 的值都是一个质数．但是，由此我們能不能作出結論：当 x 是任意的自然数时，$f(x)=x^2+x+11$ 的值都是质数？

又如，考察和

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1).$$

当 $n=1$ 时，得

$$1=1^2,$$

当 $n=2$ 时，得

$$1+3=4=2^2,$$

当 $n=3$ 时，得

$$1+3+5=9=3^2.$$

继續使 $n=4, 5, \cdots\cdots, 100$ 等自然数，我們得到：

$$1+3+5+7=16=4^2;$$

$$1+3+5+7+9=25=5^2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1+3+5+\cdots\cdots+199=10000=100^2.$$

由此，我們可以作出結論，当 n 是不超过 100 的自然数时，等式

$$1+3+5+(2n-1)=n^2$$

成立．但是，我們能不能由此就归納出一个結論說：对于所有的自然数 n，等式

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$$

一定成立？

在上面这两个例子的証明中，我們都应用了归納法，企图从那些个别情况的正确性推导出一般情况的正确性．可以看出，第一个例子的結論是完全正确的．因为我們已經就所有的情况加以論証，說明了在这些情况下結論都是正确的，沒有例外的情况．但是，对于 x 是大于 9 的自然数，我們却还沒有考察过，因此，也就无法作出任何結論．事实上，当 $x=10$ 时，

$$f(10)=10^2+10+11=121,$$

它就不是一个质数．

同样的，对于第二个例子，我們只經过了 100 次的实踐，只能說明，对于开头 100 个自然数，这个等式是成立的．但

是，我們却沒有理由使人相信，当 $n=101$ 时，这个等式也是成立的．当然，我們还可以用 $n=101$ 代入这个等式，从而說明当 $n=101$ 时它也是成立的．但是，这时我們就沒有理由說当 $n=102$ 时，这个等式也是成立的．总之，我們只能作有限次的試驗，总会出現不曾被試驗过的自然数，因此，对于那些不曾被試驗过的自然数，这个等式是不是成立就不知道了．

应用归納法推理时，为什么对有些命題，我們可以証实它們的正确性，而对另一些命題却无法証实它們的正确性呢？

原来归納法由于所列举前提的不同，可以分为完全归納法和不完全归納法两种．如果在前提中，列举了某类事物所有的个别对象的情况，从考察每个对象的情况得出了一般的結論，那就是完全归納法．对于第一个例子，我們就应用了完全归納法．由于应用完全归納法时，必須了解所有对象的情况，所以得出来的結論自然是可靠的．不过在一般的情况下，所要考察的对象总是相当多的，甚至是无穷多的；特別在数学里，我們常常要想了解无穷多个对象的情况，例如对于全体自然数，全体的整数等等．这时，我們就不可能了解全部对象的情况了．

如果在前提中，仅仅反映了某类事物的部分对象，从而得出了关于这类事物的一般結論，那就是不完全归納法．应用不完全归納法时，我們考察的是一部分对象，而所作的結論却是对所有的对象的，也就是，我們要把一些結論加到沒有被考察过的对象上去，这样，所作的結論就可能是正确的，也可能是不正确的．

大家不要以为結論的是否正确，是决定于試驗次数的多少，只要多試驗几次，多考察一些个别的对象，那么所得的

結論就是正确的了．事实上，无論观察的个别对象怎么多，它的个数总是一个有限数．从对有限个对象考察的結果，就不能肯定地对沒有被試驗过的对象作出結論說：一定也是正确的．让我們来看下面的例子：

判断 $f(n)=4729494n^2+1$ 的值，当 n 是自然数时，它是不是一个完全平方数？

我們依次使 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ 等自然数．开始的时候，可以算出所得的 $f(n)$ 的值都不是一个完全平方数．这样一直做下去到 n 是一个 41 位的数，就是当

$$n=50,549,485,234,315,033,074,477,819,735,540,408,986,339$$

的时候，所得的 $f(n)$ 的值也不是一个完全平方数．考察了这么多次，似乎可以下結論說：不論 n 是任何自然数，$f(n)$ 的值都不可能是一个完全平方数．

但是，有人发現，当

$$n=50,549,485,234,315,033,074,477,819,735,540,408,986,340$$

的时候，

$$f(n)=109,931,986,732,829,734,979,866,232,821,433,543,901,088,049^2,$$

它是一个 45 位数的完全平方．这就是說，上面这个結論是錯誤的．当然，这些計算要使用电子計算机来进行，凭笔算是相当困难的．

考察的次数多一些，只能說可靠的程度大一些，但是不能說所作的結論一定是正确的．这是因为，我們的考察毕竟是不全面的．

既然，从对某些个别現象作不完全的考察，不可能得出对整体对象的一般結論，同时，对无限多的对象，似乎永远不可能作完全的观察；而在数学里，常常要求对全体的对象来

下結論，并且希望能証明我們的判断是正确的，那么这个問題将怎样解决呢？

数学归納法是解决这个問題的一种方法．应用这个方法可以通过“有限”来解决“无限”的問題，使我們所用的归納法成为完全归納法，从而証明了論断的正确性．

二　数学归納法是怎样的一个方法

数学归納法到底是怎么一回事呢？让我們先来看看前面已經提到过的例子．

我們要証明：对于任意的自然数 n，等式

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$$

都能成立．

前面已經証实了，当 $n=1, 2, 3$ 等数的时候，这个等式是成立的．但是，对于任意的自然数 n，这个等式都能成立就无法加以験証，然而又需要我們加以“験証”，这将怎么办呢？

这里只好采用递推的办法了，就是希望这个論断能从对“1”的正确性来推导出对“2”的正确性；然后从对“2”的正确性来推导出对“3”的正确性，这样继續一直推下去．也就是我們希望能証明这样一个事实：如果对于某一个自然数，論断是正确的，那么，对于紧接这个数的自然数，这个論断也是正确的．这样一来，对于所有的自然数我們就都加以験証了．現在我們就采取这个办法来証明上面的等式．

首先，对于 $n=1$，这个等式是成立的．这是因为，当 $n=1$

时，左边$=2n-1=1$，而右边$=n^2=1^2=1$，所以，这时等式成立.

既然有一些自然数能够使这个等式成立，那么，我們就可以假設，对于某一个自然数 k 这个等式是成立的(这个 k 是任意的，所有能够使等式成立的自然数都可以作为 k，并且这样的 k 是存在的，因为数“1”就是一个例子). 这样，我們有

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)=k^2.$$

把这个等式的两边都加上 $2k+1$，就得

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1,$$

也就是

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]=(k+1)^2.$$

这个等式表明，当 $n=k+1$ 时等式

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$$

也是成立的.

这里，我們証明了：如果对于自然数 k，等式是成立的，那么对于自然数 $k+1$，这个等式也是成立的. 这样，就有了递推的根据. 在这一节开头，我們已經証明了，对于自然数 1 等式是成立的. 根据上面所說的，对于自然数 2 这个等式也是成立的. 既然对于 2 等式是成立的，那么，再根据上面所說的，对于 3 这个等式也应当是成立的. 这样递推下去，可以証明，对于任何自然数 n，这个等式都能成立.

应用这个递推的方法，虽然我們沒有对所有的自然数一个一个地都加以驗証，但事实上却已經对所有的自然数作了驗証. 这样的方法就是数学归納法.

让我們来仔細研究一下，这个方法的特点到底是什么. 可以看出，証法的第一步是就 n 是某一个开始的自然数 a 来

験証論断（上面的例子是先就自然数“1”来驗証）．第二步是在假設当 $n=k$ 时这个論断是正确的情况下，推导出当 $n=k+1$ 时这个論断也是正确的．第三步是一个递推的过程．結合第一步和第二步，可以从对“a”的情况推导出对“$a+1$”的情况来，然后再从“$a+1$”的情况推导出“$a+2$”的情况，这样继續推下去，虽然我們沒有把所有的自然数都加以驗証，但是我們却可以推导出所有自然数的情况来．

对于每一个题目，在应用数学归納法的时候，第一和第二两个步驟，大多是采用类似的格式，当然它的內容随着具体的题目而有所不同．至于第三步，不論在哪一个題目里，我們总可以用同样的几句話来写出，因而可以用“結論”的形式来表达，而不把它当作一个步驟了．

綜合上面所說的，主要是两个方面．首先，应用数学归納法証明的，是一些可以递推的有关自然数的論断．其次，应用数学归納法証明的步驟是：

(1) 証明当 $n=a$（第一个数）的时候，某个論断是正确的；

(2) 假設当 $n=k$ 的时候，論断是正确的，証明当 $n=k+1$ 的时候，这个論断也是正确的．

根据(1)、(2)，就可以断定对于大于或者等于 a 的任意自然数 n，这个論断都是正确的．

让我們用一个例子来說明怎样应用数学归納法．

例 求証：

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

証明 当 $n=1$ 的时候，

$$左边=\frac{1^2}{1\cdot 3}=\frac{1}{3},$$

$$右边=\frac{1(1+1)}{2(2\cdot 1+1)}=\frac{2}{2\cdot 3}=\frac{1}{3},$$

等式是成立的.

假設当 $n=k$ 的时候，这个等式成立；就是假設下面的等式成立：

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}.$$

把这个等式的两边都加上 $\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$ (目的是先使左边成为当 $n=k+1$ 时的形式，从而証明右边也成为当 $n=k+1$ 时的形式)，得

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}.$$

而

$$\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{k(k+1)(2k+3)+2(k+1)^2}{2(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{(k+1)[k(2k+3)+2(k+1)]}{2(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{(k+1)(2k^2+5k+2)}{2(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{2(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2[2(k+1)+1]}.$$

$$\therefore\ \frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2[2(k+1)+1]}.$$

这就是說，当 $n=k+1$ 的时候，这个等式也是成立的.

根据上面两个步驟，就可以断定对于任意的自然数 n，这个等式都能成立.

练　习

应用数学归納法証明下列各等式：

1. $$\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{2}{3\cdot5\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}.$$

2. $$1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}$$

$$=\frac{2^n+(-1)^{n+1}(6n+1)}{9\cdot2^{n-1}}.$$

3. $$1+3x+5x^2+\cdots\cdots+(2n-1)x^{n-1}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}[2nx^n(x-1)-(x+1)(x^n-1)].$$

4. $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1.$

5. $$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+d}}+\frac{1}{\sqrt{a+d}+\sqrt{a+2d}}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{a+2d}+\sqrt{a+3d}}+\cdots\cdots$$