018-72C1

数学制圖学

H. A. 烏尔馬耶夫著

测繪出版社

数学制圖学

H. A. 烏尔馬耶夫著
李 運 珠 譯

測繪出版社
1956·北京

Н. А. УРМАЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КАРТОГРАФИЯ

МОСКВА. 1941

本書系根据苏联 1941 年于莫斯科出版的"数学制圖学"譯出。本書作者是 H.A.烏尔馬耶夫教授。

本書主要內容包括：制圖投影一般原理，橢圓体在球面上的描寫及各种制圖投影的研究等。本書的特点在于遵循由一般到特例的叙述程序，首先着重闡明变形的一般原理，研究各类投影时又遵循着B. B. 卡夫拉依斯教授卓越拟定的那些投影确定法，从而就能用数学式極簡便而嚴密地表达某一定义及寫成投影基本方程式，据此再用第一章中的变形公式來研究投影就比較容易了。可作为高等測繪学校教科書及制圖工程技術人員的參考書。

全書由李連珠同志翻譯，由周承恭、徐炳麟、潘琍等同志校訂。

書号15039·5 **数学制圖学** 190000字

著者	H. A. 烏尔馬耶夫
譯者	李連珠
出版者	測繪出版社 北京宣武門外永光寺西街3号 北京市書刊出版業營業許可証出字第[illegible]号
發行者	新華書店
印刷者	地質印刷厂 北京廣安門内教子胡同甲32号

印数(京)1—8700册　一九五六年八月北京第一版

定价(10)1.28元　一九五六年八月第一次印刷

开本31″×43″1/25　印張9 7/25

原书缺页

原
书
缺
页

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

原　　序

本書內容係作者於1933年至1938年期間在 *B.B.* 古比雪夫紅軍軍事工程學院測量系任教時用的授課講義。

最初這種講義，是由軍事工程學院於1938年根據手搞法規石印出版。

本版與石印版所不同之點就在於有少許的修改而已。

在這本書中，力求遵循由一般到特例的敍述程序。因此，在這裡變形一般原理就顯得極爲重要。在變形一般原理中，我引用了黎曼——勾犀方程式，這是研究高斯——克呂格投影及僞球面投影(魯西里)的依據。同時，在第一章裡還引證了投影方程式以極座標表示時的變形公式和比例尺公式，而實際上，在這裡作者還廣義地說明了多圓錐投影的一般原理。

研究各類製圖投影時，我也力求遵循軍事航海學院 *B.B.* 卡夫拉依斯基教授卓越擬製的那些投影確定法。

這些確定法的優越性就是它們能夠用數學式極簡便而嚴格地表達某一定義，及寫成投影基本方程式。

投影方程式寫出之後，再利用第一章的變形公式來研究投影就不困難了。

書末尙附有製圖用表（根據貝塞爾地球橢圓體原素），表中有計算投影用的各種基本數値。

烏爾馬耶夫

目　錄

第四章　圓柱投影

第五章　圓錐投影

第六章　僞圓柱投影

018-72C1

第七章　僞圓錐投影

第八章　多圓錐投影

第九章　舊波蘭兵要地理研究所所採用的僞球面投影(魯西里投影)… 192

第十章　結　　論

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 一 章

製圖投影一般原理

基本定義和公式

一點位置在曲面上與平面上一樣可以確定。假定某一曲面有二曲線族，且令過曲面上任一點有每族中之一條曲線。

設同一族曲線間以及兩族曲線間曲線彼此之差別：在一族曲線內每一定曲線上某一參變量保持為常數值，而在另一族曲線內每條曲線上則另一參變量保持為常數值，但同一族曲線內由一條線變到另一條線時此常數值亦隨之改變。若將此二參變量稱為曲線座標，而將參變量保持為不同常數之曲線稱為座標曲線，那末，過某一點只要有二族曲線中各一條曲線或者二座標為已知，則此點在平面上的位置即可完全確定。

特別是對於旋轉橢圓體，可以選擇下面的兩族曲線，取經度 λ 為常數的曲線作為第一族曲線，此即子午線，$\lambda=$常數。另一族可取緯度為常數的（即$\varphi=$常數的）平行圈為第二族曲線。

我們知道，這類座標曲線具有一項極重要的正交特性。

更設有另一曲面。此二曲面間存在着曲面論中所研究的各種不同關係。而對我們最有價值的是二曲面間有這樣一種對應關係即：一曲面之每一點而在另一曲面上必有而且僅有某一完全確定之點和它對應，並且前一曲面上的點連續移動時，後一曲面上的對應點亦連續地移動。這樣，就可以說，第一曲面已經描寫在第二曲面上。於是可稱後一曲面的各個原素（點、線、面積）為前一曲面上對應

原素的描寫形。

現在我們要研究的是地球面在平面上的描寫，一般情況下，我們假設地球面是一旋轉橢圓體面，而且在特殊場合，若條件許可，亦可忽視橢圓體扁率而把地球面當作球面。

若被描寫之曲面爲可展面，那麽，顯然所構成的描寫形在任何部分都能與原形相似。

但是，地球面是一不可展的曲面，因而，地球面或其某一部分以任何一種描寫法將其描寫於平面上均將帶有長度、角度或面積變形。

研究地球面描寫於平面上的各種方法就是數學製圖學的研究對象。而地球面在平面上的描寫形，即稱爲製圖投影或簡稱地圖。

當研究各種製圖投影時，必然會發生與地球橢圓體面某些原素變形有關的一般性質問題，故在研究各個製圖投影之前，預先特別的將它們提出來是甚爲適當的。

建立製圖投影一般原理之後，我們就可用這一原理把各個投影的研究歸結爲一些特例，這樣就可使此問題大爲簡化。所以現在我們就從研究地球橢圓體面各個原素以及它們在平面上的描寫開始。

假設地球面上有座標曲線網，子午線和平行圈網絡，且此座標曲線被描寫於平面上爲兩族曲線。若令曲線$A'D'$和$B'C'$爲橢圓體子午線AD和BC的描寫線，而曲線$D'C'$和$A'B'$線爲平行圈DC和AB的描寫線。顯然，點A',B',C',D'則爲橢圓體A,B,C,D的描寫點。

今在平面上取某一直角座標系。若A'點是A點的描寫，那麽，即可寫成：

$$x=f_1(\varphi,\lambda) \text{ 和 } y=f_2(\varphi,\lambda). \qquad (1)$$

式中$f_1 f_2$——爲有限，連續和單値函數，至少對某一區域內各點是如此。

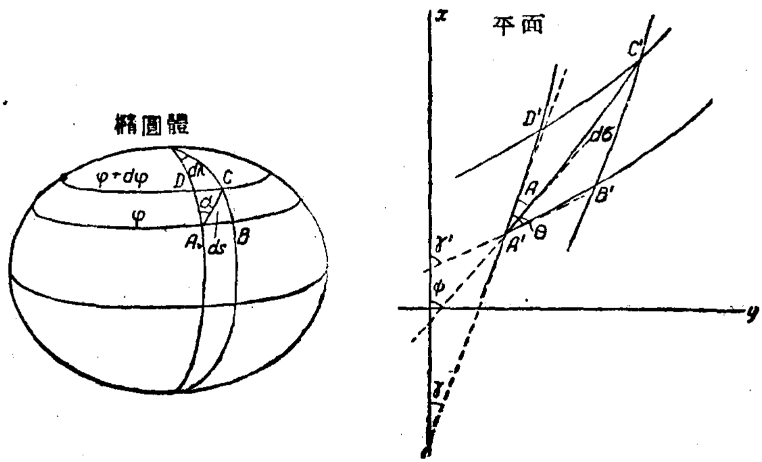
由方程式(1)中消去緯度φ，於是即得下列取決於一個參數λ的

一定曲線族的方程式

$$F_1(x,y,\lambda)=0, \tag{2}$$

顯然，方程式（2）是經線方程式．同理，若由方程式（1）中消去經度 λ，則得下列緯線方程式

$$F_2(x,y,\varphi)=0, \tag{3}$$



圖、 1

今後，當研究各種製圖投影的形狀時要利用到方程式(2)和(3)。而欲推求一般變形公式，就需依據方程式(1) 即製圖投影方程式。當然，投影方程式亦可以極座標形式表示，但這種情況，我們將特闢一節專門進行研究。

現在我們來研究旋轉橢圓體面上，由經差$d\lambda$和緯差$d\varphi$二對無限接近的子午線和平行圈所構成的梯形 $ABCD$。由大地測量學知，在此梯形中$AD=Md\varphi$和$AB=N\cos\varphi.d\lambda=rd\lambda$，其中$M$和$N$是子午圈和卯酉圈之曲率半徑，$r$ 爲平行圈半徑。故旋轉橢圓面之線素 ds，可寫成下列公式

$$ds^2=M^2d\varphi^2+r^2d\lambda^2 \tag{4}$$

及

$$tg\alpha=\frac{r}{M}\cdot\frac{d\lambda}{d\varphi},\tag{5}$$

式中α是線素ds的方位角。

我們以dS表示$ABCD$梯形的面積，即得

$$dS=Mrd\varphi d\lambda.\tag{6}$$

設$d\sigma=A'C'$是線素ds之描寫線，於是按一般解析法則有

$$d\sigma^2=dx^2+dy^2.\tag{7}$$

微分(1)式得dx和dy的全微分，即

$$\left.\begin{aligned}dx&=\frac{\partial x}{\partial\varphi}d\varphi+\frac{\partial x}{\partial\lambda}d\lambda\\ dy&=\frac{\partial y}{\partial\varphi}d\varphi+\frac{\partial y}{\partial\lambda}d\lambda\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

將(8)式代入(7)式則得

$$d\sigma^2=Ed\varphi^2+2Fd\varphi d\lambda+Gd\lambda^2,\tag{9}$$

爲簡化計，式中採用了如下之符號

$$\left.\begin{aligned}E=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2;\quad F=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\lambda}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\lambda}\\ G=\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

今求線素$d\sigma$與x軸正向所構成的角ψ。按一般解析法則可寫成

$$tg\psi=\frac{dy}{dx}\tag{10'}$$

或將(8)式引入此式，即得

$$tg\psi=\frac{\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}d\varphi+\dfrac{\partial y}{\partial\lambda}d\lambda}{\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}d\varphi+\dfrac{\partial x}{\partial\lambda}d\lambda}.\tag{11}$$

根據此式亦可求出經緯線與x軸正向所組成的角γ和γ'。實際上，當公式(11)應用於所有各點經度爲常數的經線上時應令$d\lambda=0$

於是

$$tg\gamma=\frac{\partial y}{\partial\varphi}:\frac{\partial x}{\partial\varphi}. \tag{12}$$

而若將公式(11)應用於緯線時，則須令 $d\varphi=0$。
於是

$$tg\gamma'=\frac{\partial y}{\partial\lambda}:\frac{\partial x}{\partial\lambda}. \tag{13}$$

由圖 1 不難看出，經緯線的夾角θ等於角γ'和γ 之差。
故

$$tg\theta=tg(\gamma'-\gamma)=\frac{tg\gamma'-tg\gamma}{1+tg\gamma'tg\gamma}.$$

將(12)和(13)式代入此式，可得

$$tg\theta=\frac{\dfrac{\frac{\partial y}{\partial\lambda}}{\frac{\partial x}{\partial\lambda}}-\dfrac{\frac{\partial y}{\partial\varphi}}{\frac{\partial x}{\partial\varphi}}}{1+\dfrac{\frac{\partial y}{\partial\lambda}}{\frac{\partial x}{\partial\lambda}}\cdot\dfrac{\frac{\partial y}{\partial\varphi}}{\frac{\partial x}{\partial\varphi}}}.$$

此式右端分子和分母分別乘$\frac{\partial x}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}$之後得

$$tg\theta=\frac{\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\lambda}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\lambda}}{\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\lambda}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\lambda}}. \tag{14}$$

今作方程式(1)的聯立函數行列式，並以H表示，即

$$H=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\lambda}\\ \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\lambda}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\lambda}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\lambda}. \tag{15}$$

若更顧及到(10)式的第二方程式則可將公式（14）寫成下面形式：

$$tg\theta=\frac{H}{F}. \tag{16}$$

在進行下一步推論之前，先要確定E、F、G三量與H量間的關係，爲此就需計算$EG-F^2$。根據(10)式有

$$EG-F^2=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2\right]-$$

$$-\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\lambda}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2-\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2-$$

$$-2\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\lambda}-\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\lambda}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2=H^2.$$

開方得

$$H=\sqrt{EG-F^2}. \tag{17}$$

因爲以後我們所遇到的H量皆爲正，故上式在根號前±號中取正號。

現求$cos\theta$，按已知公式：

$$cos^2\theta=\frac{1}{1+tg^2\theta}.$$

這裡不進行基本的推演，而僅寫出其結果：

$$cos\theta=\frac{F}{\sqrt{EG}}. \tag{18}$$

同理

$$sin\theta=\frac{H}{\sqrt{EG}}. \tag{19}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com