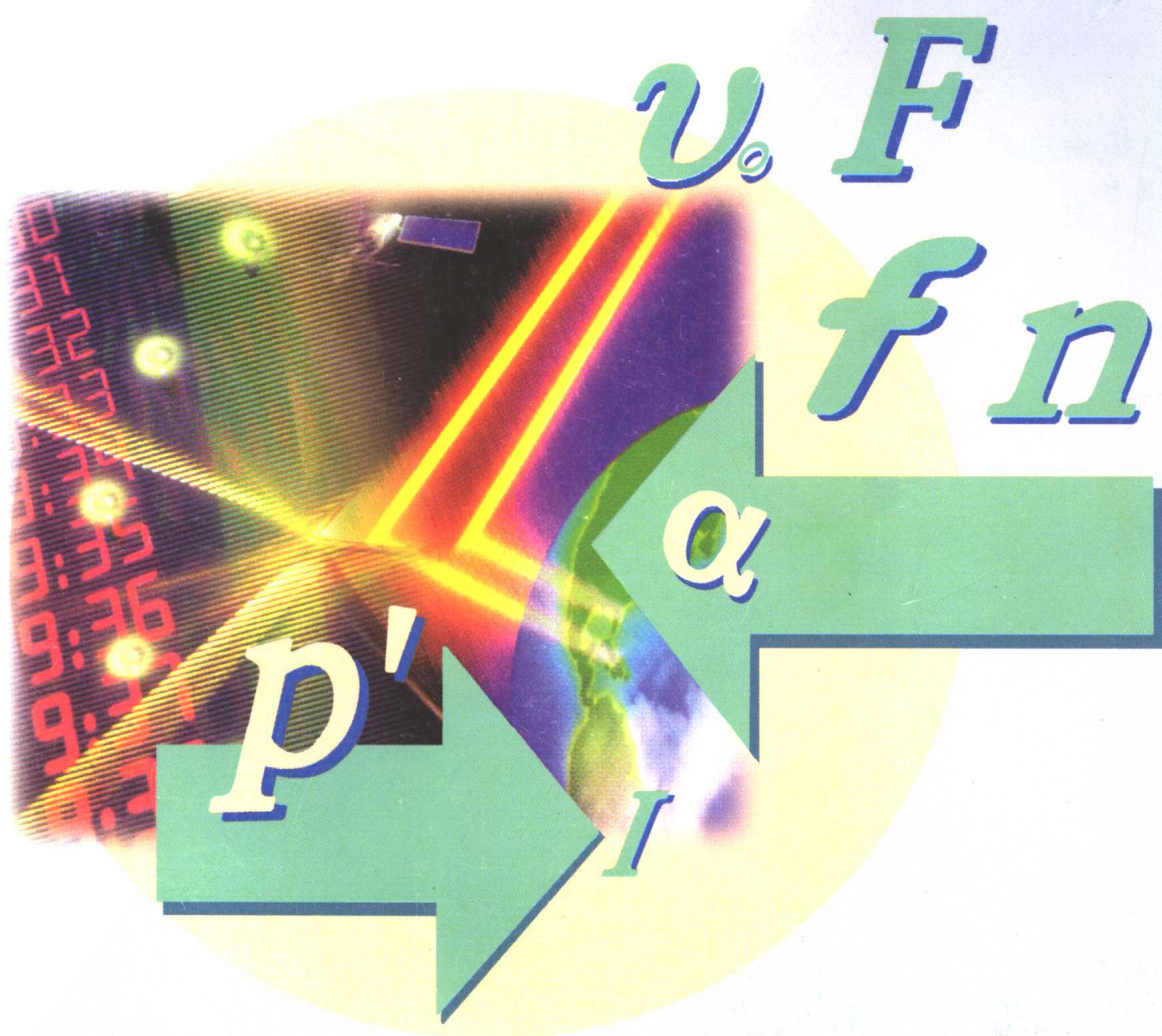


物理奥林匹克竞赛

辅导讲座

上海市物理学会



上海科学技术出版社

物理奥林匹克
竞赛辅导讲座

上海市物理学会

郑永令 陈秉乾 主编

上海科学技术出版社

物理奥林匹克竞赛辅导讲座

上海市物理学会

郑永令 陈秉乾 主编

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所经销 常熟市华顺印刷有限公司印刷

开本 787×1092 1/16 印张 24.5 字数 584 000

1995 年 8 月第 1 版 2003 年 9 月第 6 次印刷

印数:19 001-22 000

ISBN 7-5323-3828-2/G·726

定价: 29.70 元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题,

请向本社出版科联系调换

前 言

全国中学生物理竞赛是由中国物理学会主办, 各省、自治区、直辖市自愿参加的群众性的课外学科竞赛活动。它开始于1984年, 每学年举行一次, 至今已举办十一届。在1994年我国还作为东道国主办了第25届国际物理奥林匹克竞赛。多年来实践证明, 中学生物理竞赛活动有助于促进中学生学习物理的兴趣和主动性, 改进学习方法, 增强学习能力。学校开展多样化的物理课外活动, 更有助于发现和选拔具有突出才能的学生, 为今后造就优秀人才, 打下良好的基础。

为了更好地配合开展物理竞赛活动, 上海科学技术出版社出版了《物理奥林匹克竞赛辅导讲座》一书, 为学习物理的爱好者提供了一本优秀的课外读物。该书的内容按知识体系顺序共分为20讲, 其中力学六讲、热学两讲、电学四讲、光学三讲、原子物理一讲、实验四讲。每讲内容包括基础知识、例题分析和习题精选等部分, 最后还有三套模拟试题与解答, 以便让学生自己检验掌握知识的程度。

为了保证本书的质量, 上海市物理学会特别邀请部分大学物理系教授和副教授执笔撰写。这些作者不仅具有丰富的大学物理教学经验, 而且非常熟悉中学物理教学内容。他们中有的是参加国际物理奥林匹克竞赛中国代表队的领队或教练, 有的是物理高考命题或审题人员, 因此他们既能居高临下, 又能深入浅出地系统阐述物理基本原理。在处理物理内容方面重视物理思想和方法, 叙述理论时适当进行扩充和引伸, 分析例题侧重方法和技巧, 精选习题注意典型和新颖。总之, 较好地处理科学性和接受性之间关系是本书的重要特色。我们要感谢作者为参加竞赛的中学生提供了一本很有参考价值的辅导书。该书对于各省、市物理业余学校也是一本很合适的参考教材。

本书的主编为郑永令(复旦大学物理系教授)、陈秉乾(北京大学物理系教授、中国奥林匹克代表队教练)。参加本书编写的有方小敏(复旦大学物理系副教授)、舒幼生(北京大学物理系副教授、中国奥林匹克代表队教练)、陆汉忠(复旦大学副教授)、陆申龙(复旦大学副教授)。负责本书组稿和统稿的有贾起民(复旦大学物理系教授、上海市物理学会副理事长)、郑广恒(复旦大学物理系教授、上海市物理学会秘书长)、宓子宏(华东师范大学物理系教授、上海市物理学会副秘书长、《物理教学》杂志主编)。

上海市物理学会

1995年1月

目 录

第一讲 质点运动学	1
第二讲 牛顿运动定律	23
第三讲 动量、机械能及其守恒定律	49
第四讲 静力学	87
第五讲 振动	109
第六讲 波动	125
第七讲 理想气体的状态方程	139
第八讲 热力学第一定律	159
第九讲 静电场	174
第十讲 恒定电流	204
第十一讲 恒定磁场	220
第十二讲 电磁感应	237
第十三讲 光的反射与折射	255
第十四讲 透镜成像	267
第十五讲 光的干涉、衍射与光电效应	281
第十六讲 原子和原子核	292
第十七讲 力学实验	316
第十八讲 热学实验	328
第十九讲 电学实验	335
第二十讲 光学实验	347
模拟竞赛试题(一)	356
试题(一)解答	359
模拟竞赛试题(二)	364
试题(二)解答	367
模拟竞赛试题(三)	374
试题(三)解答	377

第一讲

质点运动学

力学研究的是物体的机械运动,即物体位置的变动。通常,力学可分为运动学和动力学两部分。运动学只涉及对物体运动的描述,而不去探究引起运动和改变运动状态的原因。动力学则研究物体如何在其他物体作用下发生运动或改变运动状态的。

所谓质点,是实际物体的一种抽象。任何实际物体都有一定的大小和形状。物体的各部分在空间占有不同的位置,在运动过程中,物体各部分的位置随时间的变化关系也不一定相同。但当物体的大小和形状在所讨论的问题中可以忽略时,就可以不计物体各部分运动状况的差别,而把物体看成是一个具有质量但没有大小的几何点,这样的物体就称为质点。本讲主要分析描述质点运动的三个物理量——位矢、速度和加速度的意义及其它们的相互关系。

一、质点的位置、位矢和位移

如何描写质点的位置及其运动呢?在直角坐标系中,质点的位置可以用三个坐标 x, y, z 来表示。当质点运动时,它的坐标随时间而变,可表示为时间 t 的函数

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t) \quad (1-1)$$

此即质点的运动方程。在质点运动过程中,其空间位置所构成的曲线,称为轨迹。

质点的位置也可以用一特殊矢量 $\mathbf{r}$ 来表示。 $\mathbf{r}$ 是从坐标原点 O 指向质点空间位置 P 的有向线段 $\overrightarrow{OP}$, 如图 1-1 所示,称为位置矢量,简称位矢。 $\mathbf{r}$ 的长度为质点到原点之间的距离, $\mathbf{r}$ 的方向由方向余弦 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 决定,它们之间满足

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1-2)$$

当质点运动时,其位矢的大小和方向亦随时间而变,故可表示为 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, 此即质点运动的矢量方程式。在直角坐标系中,设 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别为沿 x, y, z 方向的单位矢量,则 $\mathbf{r}$ 可表示为

$$\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k} \quad (1-3)$$

位矢 $\mathbf{r}$ 与一般矢量不同,它与坐标原点的选择有关。

研究质点的运动,不仅要知道它的位置,还必须知道它位置的变化情况。如果质点从空间一点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 运动到另一点 $B(x_2, y_2, z_2)$, 那么它的位矢相应地由 $\mathbf{r}_1$ 变到 $\mathbf{r}_2$, 则位

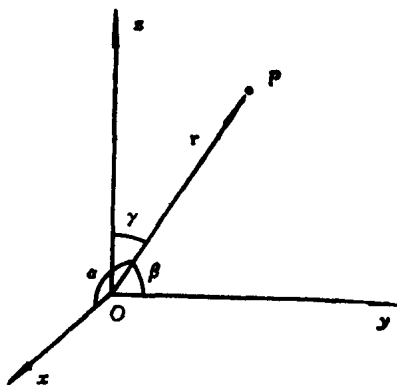


图 1-1

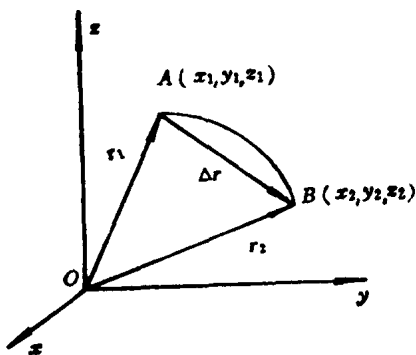


图 1-2

矢的改变量

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

称为质点的位移,如图 1-2 所示.位移是矢量,它与坐标原点的选择无关.

二、直线运动的速度和加速度

若质点作直线运动,则可取其轨迹直线为坐标轴,设为 x 轴.质点的位置就可用其坐标 x 来表示.设在时刻 t 和 $t + \Delta t$ 质点的位置坐标分别为 $x(t)$ 和 $x(t + \Delta t)$,则在此 Δt 时间内质点的位移 $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ 与 Δt 的比值称为平均速度

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

显然,在相同的 Δt 时间里,质点的位移 Δx 愈大,就表示质点运动得愈快.可见,平均速度 $\bar{v}$ 是反映质点运动快慢的一个量,但平均速度只能粗略地反映质点在这段时间内运动的平均快慢情况.若要精确地描述质点在各个时刻运动的快慢情况,只需取平均速度 $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ 在 $\Delta t \rightarrow 0$ 条件下的极限值

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

v 就称为质点在时刻 t 的瞬时速度,简称速度.

取一平面直角坐标系,用横轴表示时间 t ,纵轴表示位置 x ,则作直线运动的质点的位置

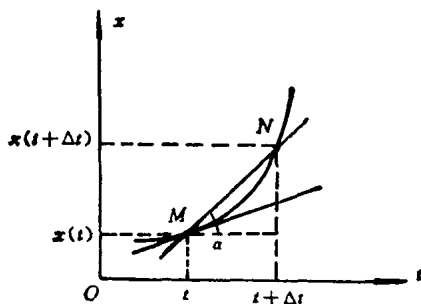


图 1-3

随时间的变化关系可用一条曲线来表示,由图 1-3 可知.在时刻 $t \rightarrow t + \Delta t$ 内质点运动的平均速度 $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \tan \alpha$ 即是过曲线上 M 、 N 两点的割线的斜率,也就是质点的位置在这段时间里的平均变化率.当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, N 点无限地靠近 M 点,则此割线变成过 M 点的切线.因此,速度即是过曲线上一点切线的斜率,也就是质点的位置对时间的瞬时变化率.

为了进一步描述质点运动的速度随时间的变化情况,则可引进加速度的概念.设在时刻 t 和 $t + \Delta t$ 质点的速度分别为 $v(t)$ 和 $v(t + \Delta t)$,则速度在此 Δt 时间内的改变量 $\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t)$ 与 Δt 的比值,称为平均加速度

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

同样, 平均加速度 $\bar{a}$ 的大小仅粗略地反映了质点运动速度在此 Δt 时间内平均的变化快慢情况. 而当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时平均加速度 $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ 的极限值称为瞬时加速度, 简称加速度

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

加速度 a 精确地反映了质点运动速度在各时刻变化的快慢情况.

在横轴表示时间 t , 纵轴表示速度 v 的直角坐标系中, 质点运动速度随时间的变化关系可用一条曲线来表示. 同样, 平均加速度 $\bar{a}$ 和加速度 a 分别是过曲线上两点割线的斜率和曲线上一一点切线的斜率, 也分别是质点运动速度在此 Δt 时间内的平均变化率和某时刻的瞬时变化率.

应用速度图线可求出质点在任意时间内的位移. 设质点运动速度随时间的变化关系为图 1-4 所示的曲线, 在时刻 t_1 和 t_2 速度分别为 v_1 和 v_2 . 现把 $t=t_1$ 到 $t=t_2$ 这段时间间隔分割成 n 个相等的小段, 每小段大小都是 Δt . 只要 Δt 足够短, 在每小段时间内的速度都可以近似地看成是不变的, 则在各小段时间内质点的位移等于该小段时间内的速度与 Δt 的乘积, 即曲线下对应矩形狭条的面积. 因此, 质点在 t_1 到 t_2 时间里的总位移就是曲线下所有矩形狭条面积的总和. 从图 1-4 可知, 各个矩形狭条的面积与对应的 Δt 小段内曲线下的面积略有差异. 但如果取 $n \rightarrow \infty$, 即 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 这种差异就会消失. 由此可知, 质点在时间 $t_1 \rightarrow t_2$ 内的位移大小就是曲线下对应时间区域内的面积. 可表示为

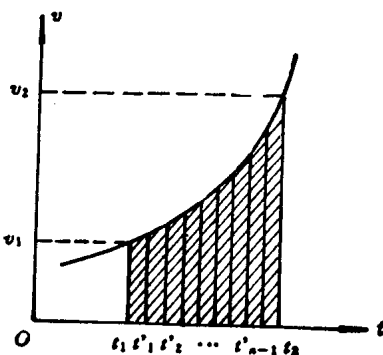


图 1-4

$$S = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n v(t_i) \Delta t$$

加速度 a 保持不变的直线运动称为匀变速直线运动. 作匀变速直线运动的质点的位置 x 、速度 v 、加速度 a 与时间 t 之间的关系满足以下公式:

$$v = v_0 + at \quad (1-4)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (1-5)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (1-6)$$

式中 x_0 、 v_0 分别为 $t=0$ 时质点的位置与速度.

【例 1】一小球作竖直上抛运动, 测得两次经过 A 点和两次经过 B 点的时间间隔分别为 Δt_A 和 Δt_B , 如图所示. 求 A 、 B 两点的高度差 h .

解 解法一: 设小球作上抛运动的初速度为 v_0 , A 、 B 两点的高度分别为 h_A 和 h_B , 小球从抛出到经过 A 、 B 两点所需时间分别为 t_A 和 t_B , 则有

$$h_A = v_0 t_A - \frac{1}{2} g t_A^2, \quad t_A = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2 - 2gh_A}{g^2}}$$

$$h_B = v_0 t_B - \frac{1}{2} g t_B^2, \quad t_B = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2 - 2gh_B}{g^2}}$$

式中“-”和“+”所表示的时间分别为小球在上升与下降时经过 A、B 两点的时间, 故有

$$\Delta t_A = 2\sqrt{\frac{v_0^2 - 2gh_A}{g^2}}, \quad h_A = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{8} \Delta t_A^2$$

$$\Delta t_B = 2\sqrt{\frac{v_0^2 - 2gh_B}{g^2}}, \quad h_B = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{8} \Delta t_B^2$$

由此可求得 A、B 两点的高度差 h 为

$$h = h_B - h_A = \frac{1}{8} g (\Delta t_A^2 - \Delta t_B^2)$$

解法二: 设小球两次经过 A 点和两次经过 B 点的速度分别为 v_A 和 v_B , 而小球两次经过 A 点和两次经过 B 点之间的运动与小球分别在 A 点以初速 v_A 和在 B 点以初速 v_B 作上抛运动完全一样, 故 Δt_A 和 Δt_B 就分别是这两次上抛运动全过程所经历的时间, 有

$$\Delta t_A = \frac{2v_A}{g}, \quad \Delta t_B = \frac{2v_B}{g}$$

由式(1-6)可得

$$v_A^2 - v_B^2 = 2gh$$

由以上三式可解得

$$h = \frac{1}{8} g (\Delta t_A^2 - \Delta t_B^2)$$

此题解法不只是以上两种, 请读者自行解之。

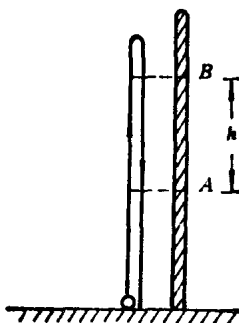


图 1-5

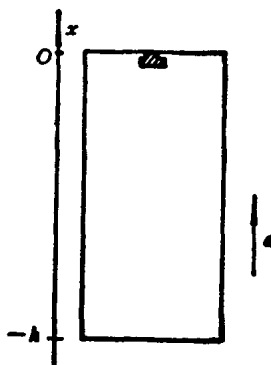


图 1-6

【例2】一高 $h = 2.45 \text{ m}$ 的电梯自静止开始以 $a = 0.2 \text{ m/s}^2$ 的加速度匀加速上升. 经过 7 s 后, 电梯内顶板上的一颗螺钉松动掉下. 试求: (1) 经过多少秒后, 该螺钉掉到电梯的地板上; (2) 此过程中螺钉的位移和通过的路程.

解 (1) 取竖直向上为 x 轴的方向, 坐标原点为螺钉刚脱离顶板瞬时(即 $t = 0$)的位置, 如图 1-6 所示. 设螺钉和电梯地板的位置坐标分别为 x_1 和 x_2 , 则有

$$x_1 = x_{10} + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$x_2 = x_{20} + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

式中 $x_{10} = 0$, $x_{20} = -h$. 当时刻 t , 螺钉掉到电梯地板上, 两者的位置坐标相同, 故有

$$v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = -h + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = \sqrt{\frac{2 \times 2.45}{9.8+0.2}} = 0.7 \text{ s}$$

此小题也可作为相对运动问题求解。

(2) $t=0$ 时螺钉的速度为

$$v_0 = 0.2 \times 7 = 1.4 \text{ m/s}$$

当 $t=0.7\text{s}$ 时, 螺钉的位置为

$$x_1 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 1.4 \times 0.7 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times (0.7)^2 = -1.42 \text{ m}$$

此即为螺钉从脱离顶板到落到地板过程中的位移, 负号表示此位移方向向下。

螺钉所通过的路程与位移的大小不同。它由上升阶段通过的路程 s_1 和下落阶段通过的路程 s_2 组成。

$$s_1 = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(1.4)^2}{2 \times 9.8} = 0.1 \text{ m}$$

$$s_2 = 0.1 + 1.42 = 1.52 \text{ m}$$

$$\therefore s = s_1 + s_2 = 1.62 \text{ m}$$

三、曲线运动的速度和加速度

1. 曲线运动的速度

对于曲线运动, 可与直线运动一样, 用瞬时速度来描写质点在某一时刻运动的快慢情况。设在时刻 t 和 $t+\Delta t$, 质点的位矢分别为 $\mathbf{r}(t)$ 和 $\mathbf{r}(t+\Delta t)$, 则在此 Δt 时间内的平均速度为位移 $\Delta \mathbf{r}$ 与 Δt 的比值, 即 $\bar{\mathbf{v}} = \Delta \mathbf{r} / \Delta t$ 。而瞬时速度则是平均速度在 $\Delta t \rightarrow 0$ 情况下的极限值, 即

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

由图 1-7 可知, 质点在 $t \rightarrow t+\Delta t$ 时间内的平均速度的方向为轨迹曲线上过 M 、 N 两点的割线方向。当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 割线 MN 则变成 M 点的切线; 故速度的方向就是轨迹曲线上某点的切线方向。

2. 曲线运动的加速度

圆周运动是曲线运动的一个重要特例。下面将以圆周运动为例来得出一般曲线运动的

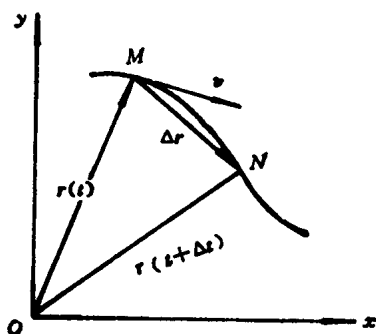


图 1-7

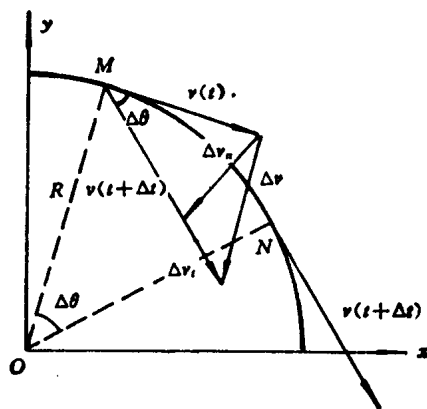


图 1-8

加速度。设质点作半径为 R 的圆周运动。在时刻 t 和 $t+\Delta t$, 质点分别位于 M 、 N 两点, 速度分别为 $\mathbf{v}(t)$ 和 $\mathbf{v}(t+\Delta t)$, 如图 1-8 所示。则在此 Δt 时间内速度的改变量 $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)$, 将 $\Delta \mathbf{v}$ 分解为两个分矢量: $\Delta \mathbf{v}_n$ 和 $\Delta \mathbf{v}_t$, 即

$$\Delta \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}_n + \Delta \mathbf{v}_t$$

式中 $|\Delta \mathbf{v}_t| = |\mathbf{v}(t+\Delta t)| - |\mathbf{v}(t)|$ 。而加速度就是平均加速度 $\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ 在 $\Delta t \rightarrow 0$ 情况下的极限值。故加速度 $\mathbf{a}$ 为

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_t}{\Delta t} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t \quad (1-7)$$

式(1-7)中 $\mathbf{a}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n}{\Delta t}$ 。由于 $\mathbf{v}(t)$ 垂直于 OM , $\mathbf{v}(t+\Delta t)$ 垂直于 ON , 故 $\mathbf{v}(t)$ 与 $\mathbf{v}(t+\Delta t)$ 之间的夹角就是 M 、 N 对应的圆心角 $\Delta \theta$ 。当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 有 $|\Delta \mathbf{v}_n| = |\mathbf{v}(t)| \Delta \theta$, 而 $\Delta \mathbf{v}_n$ 的方向与 $\mathbf{v}(t)$ 的方向垂直, 指向圆心, 这就是轨迹圆在 M 点的法线方向(单位矢量取为 $\hat{\mathbf{n}}$), 因此 $\mathbf{a}_n$ 称为法向加速度, 也称向心加速度。即

$$\mathbf{a}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v \Delta \theta}{\Delta t} \hat{\mathbf{n}} = v \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \hat{\mathbf{n}} = v \omega \hat{\mathbf{n}}$$

式中 $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$ 为角速度。由圆周运动的角速度与速度之间的关系 $v = \omega R$, 可得

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R} \hat{\mathbf{n}}$$

式(1-7)中 $\mathbf{a}_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_t}{\Delta t}$ 。当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta \mathbf{v}_t$ 的方向就是 $\mathbf{v}(t)$ 的方向, 即是轨迹圆在 M 点的切线方向(单位矢量取为 $\hat{\mathbf{t}}$), 故 $\mathbf{a}_t$ 称为切向加速度。此外, $|\Delta \mathbf{v}_t| = |\mathbf{v}(t+\Delta t)| - |\mathbf{v}(t)| = \Delta v$, 从而

$$\mathbf{a}_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \hat{\mathbf{t}} = a_t \hat{\mathbf{t}}$$

上式中 $a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ 就是质点运动速率对时间的变化率。

综上所述, 圆周运动的加速度 $\mathbf{a}$ 为

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t = \frac{v^2}{R} \hat{\mathbf{n}} + a_t \hat{\mathbf{t}} \quad (1-8)$$

若质点作匀速圆周运动, 其速率不随时间发生变化, 即 $a_t = 0$, 则质点的运动加速度 $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R} \hat{\mathbf{n}}$, 就是法向加速度, 其大小保持不变, 方向始终指向圆心。

当质点作一般曲线运动时, 其运动加速度也可分解为法向加速度和切向加速度二个分量, 即

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t = \frac{v^2}{\rho} \hat{\mathbf{n}} + a_t \hat{\mathbf{t}} \quad (1-9)$$

式中 ρ 为轨迹曲线上某点的曲率半径。当曲线为圆时, 曲率半径 ρ 就是该圆的半径 R 。

曲线运动的加速度, 可按如上所述的那样, 把它沿轨迹的法向和切向分解, 也可在直角坐标系中沿各坐标轴分解。如轨迹曲线是平面曲线(取为 xy 平面), 则加速度可表为

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}}$$

式中 $a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$, $a_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$, 分别是 x 和 y 方向的速度分量对时间的变化率, 且有

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, $\operatorname{tg} \theta = \frac{a_y}{a_x}$, θ 为 a 与 x 轴的夹角.

【例 1】一半径 $R=1\text{ m}$ 的飞轮以 $n=30\text{ r/s}$ 的速率转动, 受到制动而均匀地减速, 经 $t'=30\text{ s}$ 后静止.

(1) 开始制动后 t 秒时轮边缘上一点的速度和加速度;

(2) 从开始制动到静止飞轮转过的圈数.

解 (1) 飞轮边缘上的一点作圆周运动. 最初的速度 $v_0=2\pi nR=60\pi\text{ m/s}$, 经时间 $t'=30\text{ s}$ 后静止, 故其作圆周运动的切向加速度

$$a_t = \frac{-v_0}{t'} = \frac{-60\pi}{30} = -2\pi = -6.28\text{ m/s}^2$$

制动后 t 秒时的速度

$$v(t) = v_0 + a_t t = 60\pi - 2\pi t = 6.28(30-t)\text{ m/s}$$

此时的法向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2(30-t)^2}{1} = 39.4(30-t)^2\text{ m/s}^2$$

故加速度矢量 a 以及 a 与半径的夹角 θ 分别为

$$a = 39.4(30-t)^2 \hat{n} - 6.28 \hat{t} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{2\pi}{4\pi^2(30-t)^2} \right] = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{1}{2\pi(30-t)^2} \right]$$

(2) 飞轮的初角速度 ω_0 和角加速度 β 分别为

$$\omega_0 = 2\pi n = 60\pi\text{ rad/s}; \quad \beta = \frac{-\omega_0}{t'} = -2\pi\text{ rad/s}^2$$

从开始制动到静止飞轮转过的圈数

$$N = \frac{\omega_0 t' + \frac{1}{2} \beta t'^2}{2\pi} = 450\text{ 圈}$$

四、抛射体运动

抛射体运动也是曲线运动的一个重要特例. 当质点作抛射体运动时, 其运动加速度恒为方向竖直向下的重力加速度 g . 这是一种加速度保持不变的曲线运动, 其运动公式与匀变速直线运动的公式有相同的形式

$$v = v_0 + gt \quad (1-10)$$

$$r = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (1-11)$$

式中 r_0 、 v_0 分别为质点在刚抛出 ($t=0$) 时的位矢和速度. 若把坐标原点取在抛出点, 即 $r_0=0$, 则图 1-9 表示了质点在各时刻的位矢 r 与 v_0 、 g 等量之间的矢量关系.

运动的叠加原理指出: 任一运动均可看成是由若干个各自独立进行的运动叠加而成. 根据运动的叠加原理, 抛射体运动可看成是由以下两个直线运动的叠加而成: (1) 沿 v_0 方向的速度为 v_0 的匀速直线运动; (2) 沿竖直方向的自由下落运动.

将式(1-10)和式(1-11)中的各矢量沿坐标轴 x 和 y 方向分解. 仍取 $r_0=0$ 的情况, 则抛射体运动的公式也可表为

$$v_x = v_0 \cos \theta, \quad v_y = v_0 \sin \theta - gt \quad (1-12)$$

$$x = v_0 \cos \theta t, \quad y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} gt^2 \quad (1-13)$$

因此, 抛射体运动也可看成是由以下另两个直线运动的迭加而成: (1) 沿 x 方向的速度为 $v_0 \cos \theta$ 的匀速直线运动; (2) 沿 y 方向的初速为 $v_0 \sin \theta$ 、加速度为 $-g$ 的匀变速直线运动。

由抛射体运动公式, 可求得抛射体的射高 H 和射程 L

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad (1-14)$$

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \quad (1-15)$$

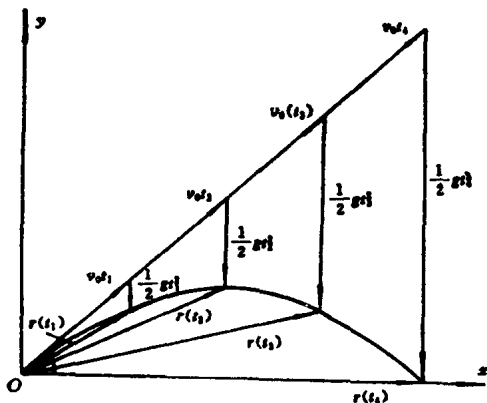


图 1-9

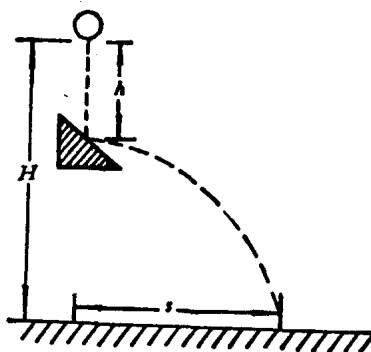


图 1-10

【例 1】一小球从离地面高为 H 处自由下落。当下落了距离 h 时, 与一斜面发生碰撞后水平弹出, 如图 1-10 所示。设碰撞时小球无动能损失。试问 h 为多大时, 小球将弹得最远?

解 小球与斜面碰撞时的速度 v_0 为

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

小球从斜面处以 v_0 的速度水平弹出后作平抛运动。平抛运动可看成是沿水平方向的速度为 v_0 的匀速直线运动和竖直方向的自由下落运动的叠加。小球运动到地的时间 t 由自由落体的高度 $H-h$ 决定

$$t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$$

故小球落地时的水平位移

$$s = v_0 t = 2\sqrt{h(H-h)} = 2\sqrt{\frac{H^2}{4} - \left(\frac{H}{2} - h\right)^2}$$

由上式可知, 当 $h = \frac{H}{2}$ 时, s 最大, 其值为 H 。

【例 2】一小石子在与水平面成 α 角的斜坡底端以 v_0 的初速作斜抛运动。

(1) 若石子的抛射角为 θ_0 , 试求沿斜坡方向的射程 s ;

(2) 试问, 抛射角 θ 为多大时, 沿斜坡方向的射程最大? 并求出此最大射程 $s_{\max}$ 。

(3) 抛射角 θ 为多大时, 石子将垂直地落到斜坡上?

解 (1) 解法一: 设水平方向和竖直方向分别为 x 轴和 y 轴的方向, 如图 1-11 所示. 则此斜抛运动可看成是沿 x 方向的匀速直线运动和沿 y 方向的上抛运动的叠加. 由公式(1-13)可求得石子沿斜坡方向的射程 s . 当石子落到斜坡上时, 其位置坐标为

$$x = s \cos \alpha, \quad y = s \sin \alpha$$

将此代入(1-13)式, 得

$$s \cos \alpha = v_0 \cos \theta_0 t \quad (1)$$

$$s \sin \alpha = v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

由 (1) 式得: $t = \frac{s \cos \alpha}{v_0 \cos \theta_0}$, 代入 (2) 式

$$s \sin \alpha = v_0 \sin \theta_0 \frac{s \cos \alpha}{v_0 \cos \theta_0} - \frac{1}{2} g \frac{s^2 \cos^2 \alpha}{v_0^2 \cos^2 \theta_0}$$

$$\therefore s = \frac{2v_0^2}{g \cos^2 \alpha} \cos \theta_0 \sin(\theta_0 - \alpha)$$

解法二: 设沿斜坡方向和垂直于斜坡方向分别为 x 轴和 y 轴的方向, 如图 1-12 所示. 此斜抛运动同样可看成是沿 x 方向和沿 y 方向的两个匀变速直线运动的叠加而成. 由加速度 g 沿 x 、 y 轴的分解可知, 此两直线运动的加速度分别为

$$a_x = -g \sin \alpha, \quad a_y = -g \cos \alpha$$

由匀变速直线运动的公式, 可得时刻 t 此两方向的位移为

$$x = v_0 \cos(\theta_0 - \alpha)t - \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 \quad (3)$$

$$y = v_0 \sin(\theta_0 - \alpha)t - \frac{1}{2} g \cos \alpha t^2 \quad (4)$$

当石子落到斜坡上时, 有 $y=0$, 则由 (4) 式得

$$t = \frac{2v_0 \sin(\theta_0 - \alpha)}{g \cos \alpha}$$

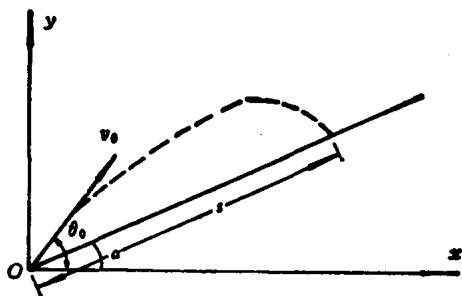


图 1-11

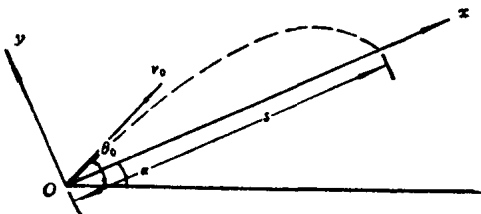


图 1-12

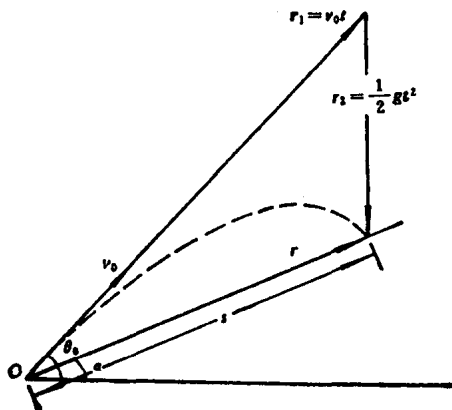


图 1-13

代入③式,即得射程 s

$$s = \frac{2v_0^2 \cos \theta_0 \sin(\theta_0 - \alpha)}{g \cos^2 \alpha}$$

解法三: 此斜抛运动也可看成是沿 v_0 方向的速度为 v_0 的匀速直线运动和沿竖直方向的初速为零的自由落体运动的叠加而成. 在时刻 t , 由此两运动产生的位移分别为 $r_1 = v_0 t$, $r_2 = \frac{1}{2} g t^2$, 如图 1-13 所示. 由图得

$$v_0 t \sin \theta_0 - s \sin \alpha = \frac{1}{2} g t^2 \quad (5)$$

$$v_0 t \cos \theta_0 = s \cos \alpha \quad (6)$$

由⑤,⑥式解得

$$t = \frac{2v_0 \sin(\theta_0 - \alpha)}{g \cos \alpha} \quad (7)$$

$$s = \frac{2v_0^2 \sin(\theta_0 - \alpha) \cos \theta_0}{g \cos^2 \alpha} \quad (8)$$

(2) 当抛射角为 θ 时, 石子沿斜坡方向的射程

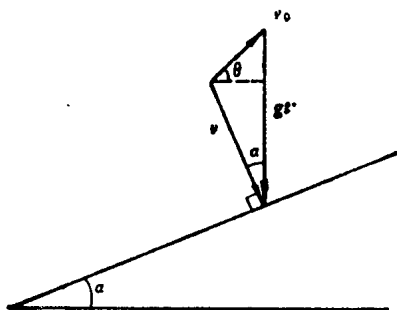


图 1-14

$$\begin{aligned} s &= \frac{2v_0^2 \sin(\theta - \alpha) \cos \theta}{g \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{v_0^2}{g \cos^2 \alpha} [\sin(2\theta - \alpha) - \sin \alpha] \end{aligned}$$

由上式可知, 当 $2\theta - \alpha = \frac{\pi}{2}$, 即 $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$ 时, 射程最大, 其值

$$s_{\max} = \frac{v_0^2}{g \cos^2 \alpha} (1 - \sin \alpha)$$

(3) 式(1-10)中各矢量间的关系如图 1-14 所示.

图中 v 为经时间 t 后石子落到斜坡上时的速度. 由题意知 v 垂直于斜面. 则由图示的几何关系, 得

$$\frac{v_0}{\sin \alpha} = \frac{gt}{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

$$\therefore t = \frac{v_0 \cos(\theta - \alpha)}{g \sin \alpha}$$

由⑦式可知, 当抛射角为 θ 时, 石子落到斜坡上所需时间

$$t = \frac{2v_0 \sin(\theta - \alpha)}{g \cos \alpha}$$

由此可得

$$\frac{v_0 \cos(\theta - \alpha)}{g \sin \alpha} = \frac{2v_0 \sin(\theta - \alpha)}{g \cos \alpha}$$

$$2 \operatorname{tg}(\theta - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$

或

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

五、相对运动

任何物体的运动都是相对一定参照系而言的。相对于不同的参照系，同一物体的运动往往具有不同的特征、不同的运动学量。

通常，将相对观察者静止的参照系称为静止参照系；将相对观察者运动的参照系称为运动参照系；物体相对静止参照系的运动称为绝对运动，相应的速度和加速度称为绝对速度和绝对加速度；物体相对运动参照系的运动称为相对运动，相应的速度和加速度称为相对速度和相对加速度；而运动参照系相对静止参照系的运动称为牵连运动，相应的速度和加速度称为牵连速度和牵连加速度。

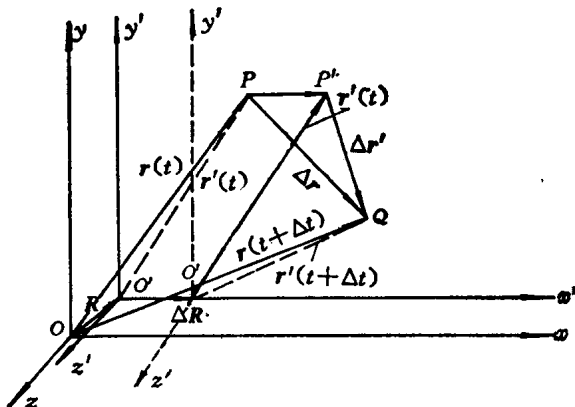


图 1-15

设运动参照系 S' 相对静止参照系 S 作直线运动，速度 u 沿 x 方向。在时刻 t ，两参照系中坐标系的位置为图 1-15 所示的实线位置。质点位于 P 点，它相对于 S 系的位矢为 $\mathbf{r}(t)$ ，相对于 S' 系的位矢为 $\mathbf{r}'(t)$ （图中虚线 $\overrightarrow{O'P}$ 位置），而 S' 系的原点 O' 相对于 S 系的位矢为 $\mathbf{R}$ ，则有

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R}$$

经过 Δt 时间后，质点运动至 Q 点，它相对于 S 系的位矢为 $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ ，故位移为 $\Delta \mathbf{r}$ 。相对 S' 系的位矢为 $\mathbf{r}'(t + \Delta t)$ ，由于在此 Δt 时间里， S' 系相对 S 系的位移为 $\Delta \mathbf{R}$ ， S' 系中的坐标系已从图中的实线位置移到了虚线位置，故位矢 $\mathbf{r}'(t)$ 从虚线位置 $\overrightarrow{O'P}$ 移到了实线 $\overrightarrow{O'P'}$ 位置。因此，相对 S' 系，质点的位移 $\Delta \mathbf{r}' = \overrightarrow{P'Q}$ 。由图可知

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}' + \Delta \mathbf{R} \quad (1-16)$$

上式两边除以 Δt ，并取 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限值，即

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}'}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta t}$$

设 $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ ， $\mathbf{v}' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}'}{\Delta t}$ ， $\mathbf{u} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta t}$ 。由前面讨论可知： $\mathbf{v}$ 就是质点相对 S 系的速度，即绝对速度； $\mathbf{v}'$ 就是质点相对 S' 系的速度，即相对速度；而 $\mathbf{u}$ 则是 S' 系相对 S 系的速度，为牵连速度。故有

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u} \quad (1-17)$$

同样，可求得绝对加速度 $\mathbf{a}$ 、相对加速度 $\mathbf{a}'$ 和牵连加速度 $\mathbf{a}_0$ 之间的关系为

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0 \quad (1-18)$$

若 S' 系相对 S 系作匀速直线运动，即 $\mathbf{a}_0 = 0$ ，则有

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'$$

若 S' 系相对 S 系作沿任意方向的直线运动，或作一般的平动（即坐标轴方向保持不变的运动），以上的结论均成立。

【例1】 地面上的枪口瞄准挂在高墙上的靶心，在子弹离开枪口的瞬间靶恰好自由脱落。试问子弹能否击中靶心？

解 解法一：子弹离开枪口后作斜抛运动。设初速度为 v_0 ，则由式(1-10)可得子弹相对地面的速度

$$v_1 = v_0 + gt$$

从子弹离开枪口瞬间开始，靶心作自由落体运动，其速度

$$v_2 = gt$$

取地面为静止参照系，靶心为运动参照系，则 v_1 、 v_2 分别为绝对速度和牵连速度。由式(1-17)可得子弹相对靶心的相对速度

$$v' = v_1 - v_2 = v_0$$

可见，子弹相对靶心作速度为 v_0 的匀速直线运动。只要子弹在离开枪口时是对准靶心的，则一定能击中靶心。

解法二：子弹离开枪口后作斜抛运动，其加速度 $a_1 = g$ ，而靶心作自由落体运动，其加速度 $a_2 = g$ 。 a_1 、 a_2 分别为绝对加速度和牵连加速度，由式(1-18)可得子弹相对靶心的相对加速度

$$a' = a_1 - a_2 = 0$$

可见，子弹相对靶心作匀速直线运动。在子弹离开枪口时，子弹的速度为 v_0 ，而靶心速度为零，子弹相对靶心的速度为 v_0 。故此匀速直线运动的速度就是 v_0 。因此，只要 v_0 的方向是指向靶心的，子弹就一定能击中靶心。

【例2】 有若干相同的小球从空中某处同时以相同大小的初速 v_0 向四面八方作抛射体运动。试证明：在任一时刻，这些小球均位于同一球面上。

证 设这些小球共有 n 个，它们的初速度分别为 v_{10} 、 v_{20} 、 v_{30} 、 $\cdots$ 、 v_{n0} ，由题意知 $|v_{10}| = |v_{20}| = |v_{30}| = \cdots = |v_{n0}| = v_0$ 。由抛射体运动公式可得这些小球在任一时刻 t 的速度分别为 $v_1 = v_{10} + gt$ ， $v_2 = v_{20} + gt$ ， $v_3 = v_{30} + gt$ ， $\cdots$ ， $v_n = v_{n0} + gt$ 。

设想在这些小球开始运动的同时，另有一小球 A 在同一处开始作自由落体运动。则在任一时刻 t ，此小球 A 的速度 $v_A = gt$ 。

取地面为静止参照系，小球 A 为运动参照系，则这些小球的相对速度分别为 $v'_1 = v_{10}$ ， $v'_2 = v_{20}$ ， $v'_3 = v_{30}$ ， $\cdots$ ， $v'_n = v_{n0}$ 。可见这些小球相对小球 A 作沿各种不同方向的速率相同的匀速直线运动。故在任一时刻 t ，这些小球均位于以小球 A 的位置为球心、以 $v_0 t$ 为半径的球面上，此球心在作自由落体运动，而球的半径则作匀速率的增大。

【例3】 一骑自行车的人，当他以 $v_1 = 5 \text{ m/s}$ 的速度向正北方向骑行时，感到风来自正东方向。而当他以 $v_2 = 8 \text{ m/s}$ 的速度向正西方向骑行时，又感到风来自正西南方向。若人在两次骑行时风速及风向均未变化，求此风速和风向。

解 以地面为静止参照系，人为运动参照系，所求的风速 v 为绝对速度，而人两次骑车的速度 v_1 、 v_2 为牵连速度，两次骑行时人感到的风速则为相对速度，分别设为 v'_1 和 v'_2 。由式(1-17)得

$$v = v_1 + v'_1, \quad v = v_2 + v'_2$$

此两式中各矢量的关系如图 1-16 所示。由图可知 $\overline{BD} = \overline{OA} = v_2$ ， $\overline{CD} = \overline{OC} = v_1$ ， $v'_1 = \overline{BC} = v_2 - v_1 = 3 \text{ m/s}$ 。故有