苏步青著

高等几何学五讲

GAODENG JIHEXUE WUJIANG

上海教育出版社
SHANGHAI JIAOYU CHUBANSHE

高等几何学五讲

苏步青著

GAODENG JIHEXUE WUJIANG

上海教育出版社
SHANGHAI
JIAOYU .CHUBANSHE

高等几何学五讲

苏步青著

上海教育出版社出版发行

（上海永福路123号）

各地新华书店经销　商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1156　1/32　印张 5.75　插页 6　字数 129,000

1991年8月第1版　1991年8月第1次印刷

印数 1—2,200 本

ISBN 7-5320-2325-7/G·2261　定价：（精）6.65元

苏步青教授为中学数学教师讲授高等几何学

序

本书是从旧著《高等几何讲义》改编成的，内容除了增添第一讲使成为五讲而外，基本上和旧著一样. 原来分成四章的旧著，由于十年动乱，陈书和纸型都被烧毁无遗，到了1988年为上海部分中学数学教师开设培训班时，就不得不进行改编和补充. 同时，想趁这个机会对旧著中历来被读者认为比较难懂的第四章内容从更广泛的观点表达得通俗易懂些，这样，便牵涉到空间形式与坐标的问题. 所以把原来高等几何学解释为射影解析几何学的思想略加拓广，以利于打通直线几何学或球几何学与射影几何学间的关系. 此外，为了便于前后文的联系，编写上作了一些必要的重复，那就是§5·1，§5·2与§12·2；§2·1与§10·1两处. 在第五讲中，还增补了§17·3和§18·3两段.

本书在排印出版过程中，请复旦大学华宣积副教授帮助修订，校阅和制图，改正了某些缺陷并提高了一些质量，著者对此表示由衷的感谢. 上海教育出版社也花了很大力气，使本书得以及时问世，于此并致谢意.

苏步青 1990年12月

苏步青，男，1902年9月生，浙江平阳人。现任复旦大学名誉校长、数学教授、博士生指导教师，中国科学院学部委员。国内外知名的数学家。专长微分几何，撰写发表论文160多篇，论著10余部。

目　录

第 一 讲

空间形式与坐标

§1 欧氏空间和非欧空间

本书里所谓空间是指平面和三维空间，而前者也称二维空间．但偶然也用到大于三维的空间，即所谓高维空间．我们中学里学的平面几何和立体几何，所在空间如下所述，相当于二维和三维欧氏空间．

1·1 欧氏空间

欧几里得为了建立平面几何，在《几何原本》里设立了一条公理，即第五公设，或称平行线公理：

在平面上过一直线外的一点能且只能引一条和该直线平行的直线．

这里，所谓两直线平行意味着在同一平面上两直线不相交．从此知道，在欧氏平面上，一条直线向其正反两方向无限延伸着，就是说，这平面无论向那一方向都是茫无边际的．再换句话说，过一定直线外一点的一条直线，无论以顺时针方向或逆时针方向回转一周时，只有一条和定直线不相交的直线．更通俗地说，一条直线向其正反两方向延伸到各自的无限．我们由此不但知道欧氏平面是全面伸张到无限的平面即二维空间，还可证

明任何三角形的三内角之和等于二直角. 这里的"二维"来自欧氏平面的任何一点 P 有唯一组直角坐标 (x_1, x_2).

以上所说,完全适用于欧氏空间,只不过把直线改为平面进行讨论就可以了.当然,两平面要么平行,要么相交于一条直线.关于欧氏空间的两条直线与欧氏平面的情况有所不同,它们可以相交或平行(这时在同一平面上),也可以不相交,又不平行.这是由于欧氏空间比欧氏平面有更广泛的自由度.严密地说,它是三维空间.这里的"三维"来自欧氏空间的任何一点 P 有唯一组的直角坐标 (x_1, x_2, x_3).

为了后文中的需要,我们对三维欧氏空间 $\boldsymbol{E}_3$ 导进更广泛的平行坐标系.设 O 是原点, $\overrightarrow{Ox_1}$, $\overrightarrow{Ox_2}$, $\overrightarrow{Ox_3}$ 是三条任意不在同一平面的有向直线.用 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 分别表示这三直线的"单位向量" $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$ 和 $\overrightarrow{OE_3}$(图 1·1),从而

$$\boldsymbol{e}_1=\{1, 0, 0\}, \boldsymbol{e}_2=\{0, 1, 0\}, \boldsymbol{e}_3=\{0, 0, 1\}. \qquad (1\cdot1)$$

这时,如果点 P 具有坐标 (p_1, p_2, p_3),那么

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\{p_1, p_2, p_3\}\\&=p_1\{1, 0, 0\}+p_2\{0, 1, 0\}+p_3\{0, 0, 1\},\end{aligned}$$

或写作

$$\boldsymbol{r}=p_1\boldsymbol{e}_1+p_2\boldsymbol{e}_2+p_3\boldsymbol{e}_3. \qquad (1\cdot2)$$

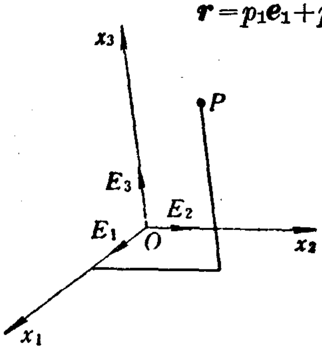


图 1·1

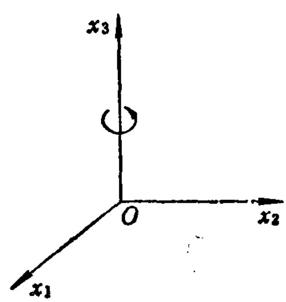


图 1·2

特别是，当三直线 $\overrightarrow{Ox_1}$、$\overrightarrow{Ox_2}$、$\overrightarrow{Ox_3}$ 两两直交时，$\{p_1, p_2, p_3\}$ 就称为 P 点的直角坐标. 通常，我们对直角坐标系采用右手方向系，即当右手的大拇指方向与 $\overrightarrow{Ox_3}$ 一致时，其余四指的弯曲方向和从 $\overrightarrow{Ox_1}$ 到 $\overrightarrow{Ox_2}$ 的转向一致(图 1·2).

P 点的各坐标 p_1, p_2, p_3 可取由 $-\infty$ 至 $+\infty$ 的任何实数，所以直角坐标系充分表达了欧氏空间的应有形式.

希尔伯特 (D. Hilbert, 1862—1943) 用公理法把欧氏平面几何严密地基础化了. 他所采用的公理系中，平行线公理就是其中的一条. 这套形式主义的公理法对其他几何学的基础化同样可以起到作用.

1·2 非欧平面

非欧几何主要是在十九世纪通过鲍耶 (J. Bolyai, 1802—1860) 和罗巴切夫斯基(Н. И. Лобачевский, 1793—1856) 的著作传下来的. 这两位几何学家在 1830 年左右，曾经创造出一种形式的几何，它除了上述的平行线公理而外，满足欧几里得“几何原本”的一切公理. 这条被除外的公理，其实早在古代已经由托勒密(Ptolemy)用另外方式揭露过的. 在非欧几何里，代替平行线公理的是下列一条:

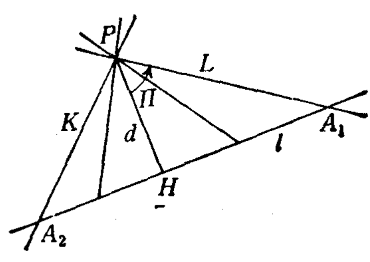


图 1·3

在平面上，通过一点 P 的所有直线，关于不过 P 的一条直线 l，可以分作两类：一类和 l 相交，另一类不相交（图 1·3).

这两类直线为两条过 P 点的直线 PK 和 PL 所分离，称后者二直线为 l 的两条平行线. 在这几何里，过 P 只有一条垂直于 l 的垂线 PH. 这是由于，这事实和平行线无关. 所不同的

是，$\angle HPL=\angle HPK$ 是 $d=PH$ 的函数，我们称它为平行角 $\Pi=\Pi(d)$．当 $\Pi(d)=\frac{\pi}{2}$（弧度的定义是同平行线公理无关的）对于某一组点和直线成立时，那么对于任何点和直线组也成立．这些曾经是鲍耶和罗巴切夫斯基的非欧几何的主题．

在这几何里，任何三角形的内角之和小于 π．像这样的几何，和熟知的、有用于刚体力学的欧氏几何相违背，总是要受到保守主义者的攻击和阻碍，一时无法为人们所能接受的．

十九世纪以来，为了解释非欧几何的合理性，人们作了很大的努力，其中一种就是仿效希尔伯特用公理法来建立欧氏平面几何的方法，即：用上列的公理代替平行线公理，而保留欧氏几何中的其余所有的公理．这样，完全可建立起非欧几何．更为显著的是，1868 年，贝尔特拉米(E. Beltrami, 1835—1900) 创造出三维欧氏空间一类曲面(叫做拟球)，用以体现非欧几何．这种用欧氏几何来作出非欧几何模型的研究是划时代的．用我们上面对欧氏平面表出形式的同样语言来说，拟球这一曲面体现了非欧平面的形式．[详情请考阅微分几何，例如：苏步青、姜国英：微分几何学(新一版)，高等教育出版社，1988 年版．]

§2 仿射空间和射影空间

2·1 仿射空间

设 $\{\xi_1, \xi_2\}$ 是平面 $\boldsymbol{E}_2$ 上一点 P 的平行坐标或直角坐标．令

$$\xi_1=\frac{x_1}{x_3},\quad \xi_2=\frac{x_2}{x_3}\quad (x_3\neq 0), \tag{1·2}$$

从而 $\boldsymbol{E}_2$ 上一条直线的方程

$$a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3=0\quad (a_1^2+a_2^2>0)$$

就变成齐次方程

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0. \tag{1·3}$$

为了要使所有的类似(1·3)的线性方程都表示直线,势必把方程

$$x_3=0 \tag{1·4}$$

所代表的一切无限远点统统纳进一条直线上,这条理想直线 l_∞ 称为无限远直线. 对原有的二维欧氏空间 $\boldsymbol{E}_2$ 添上这条直线之后,我们得到和 $\boldsymbol{E}_2$ 具有不同形式的空间,即所谓二维仿射空间或称仿射平面 $\boldsymbol{A}_2$.

$\boldsymbol{A}_2$ 的形式不同于 $\boldsymbol{E}_2$ 之处主要在对待无限远的问题上. $\boldsymbol{E}_2$ 的一条直线是向正反两面无限伸长,茫无边际的. 两平行直线没有交点. 在 $\boldsymbol{A}_2$ 上则与此相反,两条平行直线相交于同一个无限远点,而且所有无限远点在同一条无限远直线 l_∞ 上. 同 $\boldsymbol{E}_2$ 是全面伸张到无限的情况相反,$\boldsymbol{A}_2$ 好像是一张连接在 l_∞ 处的平面似的. 因此,$\boldsymbol{A}_2$ 上一条直线只有一个无限远点.

仿射平面上的二次曲线的一般方程是

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}x_ix_k=0 \quad (a_{ik}=a_{ki}). \tag{1·5}$$

它和 l_∞ 的交点决定于下列两方程

$$\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}x_ix_k=0,\ x_3=0.$$

由此得知,按照判别式

$$a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0,\ =0 \text{ 或 } >0$$

的不同情况,二次曲线和无限远直线分别有两个虚交点(即不相交),一个交点(即相切)或两个实交点. 这时,对应的曲线(1·5)是椭圆,抛物线或双曲线.

这样,$\boldsymbol{A}_2$ 上不分解的二次曲线的分类由于无限远直线的导入而更加明显了.

以上对 $\boldsymbol{A}_2$ 所用的方法很容易拓广到三维仿射空间 $\boldsymbol{A}_3$ 去，没有任何困难．具体地说来，设三维欧氏空间 $\boldsymbol{E}_3$ 里一点 P 的平行坐标或直角坐标为 (ξ_1, ξ_2, ξ_3)．令

$$\xi_1=\frac{x_1}{x_4},\quad \xi_2=\frac{x_2}{x_4},\quad \xi_3=\frac{x_3}{x_4}\quad (x_4\neq 0) \tag{1·6}$$

而且改写平面的方程

$$a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3+a_4=0\quad (a_1^2+a_2^2+a_3^2>0)$$

为齐次方程

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0. \tag{1·7}$$

由此，导进无限远平面 π_∞:

$$x_4=0, \tag{1·8}$$

便得到三维仿射空间 $\boldsymbol{A}_3$．

至于 $\boldsymbol{A}_3$ 的形式不同于 $\boldsymbol{E}_3$ 之处，请读者自己去理解．

2·2　射影空间与线性坐标

在欧氏平面 (ξ_1, ξ_2) 里，考察一个三角形的三边，设它们的方程为

$$\left.\begin{aligned} a\xi_1+b\xi_2+c=0,\\ a_1\xi_1+b_1\xi_2+c_1=0,\\ a_2\xi_1+b_2\xi_2+c_2=0. \end{aligned}\right\} \tag{1·9}$$

于是系数行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}\neq 0.$$

我们将以最简便的方式引进 $\boldsymbol{E}_2$ 上的三角形坐标，而实际上是决定于下列方程

$$\left.\begin{aligned}\rho p&=a\xi_1+b\xi_2+c,\\ \rho q&=a_1\xi_1+b_1\xi_2+c_1,\\ \rho r&=a_2\xi_1+b_2\xi_2+c_2.\end{aligned}\right\}\tag{1·10}$$

左边的 ρ 表示一个任意比例因子($\neq 0$),于是三数之比 $p:q:r$ 形成主要的作用.

如果把(ξ_1, ξ_2)看作 $\boldsymbol{E}_2$ 上一点的直角坐标,而且注意到

$$\frac{a\xi_1+b\xi_2+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

表示点(ξ_1, ξ_2)到直线 $a\xi_1+b\xi_2+c=0$ 的(正负两值)距离,那么我们立刻看到下列定理的成立:

三角形坐标可以看成一点到平面上三直线的距离乘以某些已知常数.

现在,我们采用记号 x_1, x_2, x_3 以代 p, q, r; 同样,在三维空间采用 x_1, x_2, x_3, x_4 来表示,而且统称*齐性坐标*.

最初(§1)导进的平行坐标可以被看成齐性坐标的特殊情况. 比如,拿 $\boldsymbol{E}_2$ 的情况来说,把第三条直线推向无限远直线的同时,还使有关的相乘因子趋近于零,最后我们便有

$$\frac{x_1}{x_3}=\xi_1,\quad \frac{x_2}{x_3}=\xi_2.$$

从此可见,我们所讨论的具有齐性坐标的平面比仿射平面 $\boldsymbol{A}_2$ 更为广泛些,而且记为 $\boldsymbol{P}_2$, 称为*射影平面*. $\boldsymbol{P}_2$ 不同于 $\boldsymbol{E}_2$ 之处首先体现在*两条任何直线常有交点*这一事实上. 这是由于: 从两直线的方程

$$\left.\begin{aligned}a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0,\\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0\end{aligned}\right\}$$

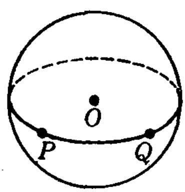
总是得出

$$x_1:x_2:x_3=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix},$$

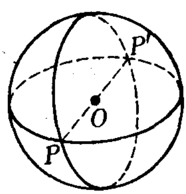
右边三个行列式中，至少有一个不是0，从而决定了两直线的交点.

这就表明了 $\boldsymbol{P}_2$ 具有与 $\boldsymbol{E}_2$（虽极相近，但）不相同的空间形式. 换句话说：在 $\boldsymbol{P}_2$ 上，通过一直线 l 外的一点 P 不能引与 l 不相交的直线.

如何用模型来表示 $\boldsymbol{P}_2$ 呢？这当然是随之而来的问题. 为此目的，让我们在欧氏空间 $\boldsymbol{E}_3$ 里取一个球面. 如所周知，球面上已知两点 P、Q，用球面上的一条曲线连接 P 和 Q，使曲线弧长为最短，那么这曲线弧一定是大圆的劣弧. 这里，大圆意味着 P、Q 和球心所在的平面与球面的交线（大圆周），而且劣弧 $\widehat{PQ}$ 表示这个大圆被其上两点 P，Q 分割成的两圆弧中较短的一段：$\widehat{PQ}<\widehat{QP}$[图 1·4(1)].



(1)



(2)

图 1·4

如果把球面看作二维空间 $\boldsymbol{S}_2$，那么其上 P、Q 两点间的（球面上而不是在 $\boldsymbol{E}_3$ 里）距离是以大圆弧 $\widehat{PQ}$ 为最短. 所以我们不妨把 $\boldsymbol{S}_2$ 上的大圆看作与 $\boldsymbol{E}_2$ 上的直线同样的图形，而且也称它为 $\boldsymbol{S}_2$ 上的'直线'. 因为 $\boldsymbol{S}_2$ 上任何两大圆必相交 [图 1·4(2)]，也即：$\boldsymbol{S}_2$ 上任何两'直线'必相交，我们能不能说 $\boldsymbol{S}_2$ 是射影平面 $\boldsymbol{P}_2$ 的一个模型呢？可惜的是，$\boldsymbol{S}_2$ 上的两'直线'有两个交点 P 和 P'，它们在 $\boldsymbol{S}_2$ 所在球直径的两端[图 1·4(2)]，即直径对立点. 这样，$\boldsymbol{S}_2$ 便失去了作为 $\boldsymbol{P}_2$ 的模型的资格了.