FENLI XISHU FA

分离系数法

余元庆 著

人民教育出版社

分离系数法

余元庆

•

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
国营五二三厂印装

•

787×1092 1/32 印张 $1\frac{1}{2}$ 字数 30,000

1978年10月第2版 1979年1月第1次印刷

印数 90501—390500

书号 13012·0240 定价 0.12元

出版者的话

这本小册子的主要内容是以分离系数法为线索，介绍了关于多项式算法的一些简便方法与一些应用，包括多项式的分离系数乘法、多项式的十字乘法、二项式的乘方、多项式的综合除法、多项式的辗转相除法、多项式的开平方。讲解力求通俗易懂，学过初中代数或正在学习初中代数的学生可以看懂。小册子中还附有习题，并有答案。

目　录

一　怎样使多项式乘法简便

在这本小册子里，我们准备介绍一些简便的算法。我们先从多项式的乘法谈起。

在做多项式乘法的时候，大家都有这样一种感觉，既要写竖式，又要写横式，计算起来比较麻烦。例如，要计算

$$(x^3-2x^2+4x-6)(3x^2+x-5),$$

就得像下面那样来计算：

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & x^3 & -2x^2 & +4x & -6 & \\
\times) & & 3x^2 & +x & -5 & & \\
\hline
 & 3x^5 & -6x^4 & +12x^3 & -18x^2 & & \\
 & & x^4 & -2x^3 & +4x^2 & -6x & \\
 & & & -5x^3 & +10x^2 & -20x & +30 \\
\hline
 & 3x^5 & -5x^4 & +5x^3 & -4x^2 & -26x & +30
\end{array}$$

$$\therefore\quad (x^3-2x^2+4x-6)(3x^2+x-5)$$

$$=3x^5-5x^4+5x^3-4x^2-26x+30.$$

大家都知道，一切计算，总是要求计算得又对又快。在我们开始学习多项式乘法的时候，为了计算得正确，像上面那样来计算，是完全必要的。但是在我们已经掌握了多项式乘法的方法以后，就不应当满足于一般的方法，而应当动脑筋想一想，有没有比较简便的方法，能够把得数快一点算出来。

怎样才能使多项式乘法简便呢？

横式已经不能再简单了，所以我们需要在竖式上打主意。这里竖式起什么作用呢？仔细想一想就可以知道，这里竖式所起的作用，主要是使同类项相加的时候，加起来可以方便一

些，并且不致遗漏。为了保留多项式乘法竖式所起的主要作用，同时又要写起来简便，我们可以把竖式和横式统一起来，采用下面的写法：

$$
\begin{aligned}
&(x^3-2x^2+4x-6)(3x^2+x-5)\\
&=3x^5-6x^4+12x^3-18x^2\\
&\qquad +x^4-2x^3+4x^2-6x\\
&\qquad\qquad -5x^3+10x^2-20x+30\\
&=3x^5-5x^4+5x^3-4x^2-26x+30.
\end{aligned}
$$

采用这种写法，被乘式、乘式和积都可以少写一次，所以比一般方法可以简便一些。

因为上面这种写法是竖式和横式的结合，所以在计算的时候，仍旧要注意多项式竖式乘法应当注意之点。就是：1.如果被乘式和乘式没有排列好，就应当先把被乘式和乘式都按照某一个字母的降幂（或者升幂）排列起来；2.被乘式或乘式有缺项的时候，要留出空位。例如，要计算

$$(3x^2y+4x^3-2y^3)(x^2+2y^2-3xy),$$

就得像下面那样来计算：

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=(4x^3+3x^2y\qquad\qquad-2y^3)(x^2-3xy+2y^2)\\
&=4x^5+3x^4y\qquad\qquad-2x^2y^3\\
&\qquad -12x^4y-9x^3y^2\qquad\qquad+6xy^4\\
&\qquad\qquad +8x^3y^2+6x^2y^3\qquad\qquad-4y^5\\
&=4x^5-9x^4y-x^3y^2+4x^2y^3+6xy^4-4y^5.
\end{aligned}
$$

习　　题

用上面所说的方法计算下列各题：

1. $(2x^4-3x^3+x^2-x-5)(3x^2-x-3)$.

2. $(6x^3+3x^2-x^5-2x-1)(9+2x^2-x^3)$.

3. $(2x^3+3y^3-4x^2y-5xy^2)(2x^2-3y^2-xy)$.

二 分离系数法

上面所说的方法，虽然可以使多项式乘法的计算简便一些，但是仍旧还有不够简便的地方。首先，在乘的时候要写许多字母，还是比较麻烦。其次，把被乘式和乘式并排写，总没有分成上下来写，看起来比较方便。因此，多项式乘法在项数较多的时候，我们放弃了把竖式和横式统一起来的想法，我们在竖式上另外打别的主意。

我们再仔细看一下下面的乘法竖式：

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & x^3 & -2x^2 & +4x & -6 & \\
\times) & 3x^2 & +x & -5 & & \\
\hline
3x^5 & -6x^4 & +12x^3 & -18x^2 & & \\
 & x^4 & -2x^3 & +4x^2 & -6x & \\
 & & -5x^3 & +10x^2 & -20x & +30 \\
\hline
3x^5 & -5x^4 & +5x^3 & -4x^2 & -26x & +30
\end{array}
$$

我们就会发现，不论在部分积里面，或者在最后加得的积里面，含 x^5、x^4、x^3、x^2、x 的项和常数项，各在同一直行上，而且是从左到右依次排列着的。我们知道，多位数是用数位来确定所写的数字是哪一个数位上的几个单位。例如，469 就是 4 个百 6 个十 9 个一。假使我们用每一项所占的位置来确定所写的数是 x 的多项式的哪一项的系数，那么在竖式里 x^3-2x^2+4x-6 就可以写成 $1-2+4-6$，$3x^2+x-5$ 就可以写成 $3+1-5$。这样，上面的乘法竖式就可以简单地写成：

$$
\begin{array}{r}
1-2+4-6\\
3+1-5\\
\hline
3-6+12-18\\
1-2+4-6\\
-5+10-20+30\\
\hline
3-5+5-4-26+30
\end{array}
$$

再根据积的最高次项应当是5次，我们就得出：

$$
\begin{aligned}
&(x^3-2x^2+4x-6)(3x^2+x-5)\\
=&\,3x^5-5x^4+5x^3-4x^2-26x+30.
\end{aligned}
$$

像上面那样，只写出各项的系数来进行计算的方法，叫做**分离系数法**。

利用分离系数法来进行计算，可以少写许多字母，而且在计算的时候只要进行一些数字计算，所以要比一般方法简便得多。

在写多位数的时候，遇到哪一个数位上一个单位也没有，就应当在这一个数位上写0，以免弄错数位。在用分离系数法计算的时候，遇到缺少哪一项，也应当在这一项所占的位置上写0，以免弄错位置。例如，要计算

$$(x+4-x^4-3x^2)(x^3+2-5x),$$

就应当像下面那样来计算：

$$
\begin{array}{r}
-1+0-3+1+4\\
1+0-5+2\\
\hline
-1+0-3+1+4\\
5+0+15-5-20\\
-2+0-6+2+8\\
\hline
-1+0+2-1+19-11-18+8
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad &(x+4-x^4-3x^2)(x^3+2-5x)\\
=&-x^7+2x^5-x^4+19x^3-11x^2-18x+8.
\end{aligned}
$$

含有两个字母的多项式，如果各项的次数都相同，这个多

项式就叫做**二元齐次多项式**。例如，$a^2-2ab+b^2$，$3x^4-5x^3y-x^2y^2+7y^4$ 都是二元齐次多项式。因为二元齐次多项式也可以用每一项所占的位置来确定所写的数是哪一项的系数，所以二元齐次多项式的计算，也可以用分离系数法。例如，要计算

$$(2x^2+3xy+2y^2)(2x^2-3xy+2y^2)^2,$$

可以像下面那样来计算：

$$\begin{array}{rrrrr}
2+3+2 & & & & \\
2-3+2 & & & & \\
\hline
4+6+4 & & & & \\
 & -6-9-6 & & & \\
 & & 4+6+4 & & \\
\hline
4+0 & -1 & +0+4 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
4+0-1+0+4 \\
2-3+2 \\
\hline
8+0-2+0+8 \\
\quad -12+0+3+0-12 \\
\qquad\qquad 8+0-2+0+8 \\
\hline
8-12+6+3+6-12+8
\end{array}$$

$\therefore \quad (2x^2+3xy+2y^2)(2x^2-3xy+2y^2)^2$

$$=8x^6-12x^5y+6x^4y^2+3x^3y^3+6x^2y^4-12xy^5+8y^6.$$

很明显，一元多项式(或者次数相同的二元齐次多项式)的加减法也可以用分离系数法来计算。为了计算起来简便，做减法的时候，最好把减式的各项的符号改变，再同被减式相加。下面我们举一个例子。

例 计算：

$$(8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3)+(a^3-8b^3)-(27a^3-b^3)$$
$$-(a^3-9a^2b+9ab^2-27b^3)-(a^3-b^3-3a^2b).$$

解

$$\begin{array}{r}
8+12+6+1 \\
1+0+0-8 \\
-27+0+0+1 \\
-1+9-9+27 \\
-1+3+0+1 \\
\hline
-20+24-3+22
\end{array}$$

$\therefore$ 原式 $=-20a^3+24a^2b-3ab^2+22b^3$.

习　　题

用分离系数法计算下列各题：

4. $(4x^3+3x-5x^2-2)(3x+2-x^2)$.

5. $(x^5-5x^3+4)(x^3-3x-2)$.

6. $(a^2-2ab+3b^2)(2a^3-3a^2b+4ab^2-5b^3)$.

7. $(x^2-x+2)^2(x^2+x-2)^2$.

三　一些技巧

用分离系数法计算的时候，要计算得快，除了需要口算熟练，还需要有一些技巧。例如，

1. 乘以 1，只要把被乘式抄一遍。

2. 乘以 -1，只要把被乘式的各项改变符号后抄一遍。

3. 乘的数如果已经出现过，只要把上次乘得的积抄一遍。

4. 乘的数如果是上次乘的数的 k 倍（或者 k 分之一），只要用 k 去乘（或者除）上次乘得的积。

下面举一些例子来说明。

例 1　计算：

$$(2x^3-3x^2+6x-4)(x^2+6x+3).$$

解

$$\begin{array}{l|rrrrrr}
 & 2- & 3+ & 6- & 4 & & \\
 & 1+ & 6+ & 3 & & & \\
\hline
\text{抄被乘式}\cdots\cdots & 2- & 3+ & 6- & 4 & & \\
\text{用 6 乘上次乘得的积}\cdots\cdots & & 12- & 18+ & 36- & 24 & \\
\text{用 2 除上次乘得的积}\cdots\cdots & & & 6- & 9+ & 18- & 12 \\
\hline
 & 2+ & 9- & 6+ & 23- & 6- & 12
\end{array}$$

$\therefore\quad (2x^3-3x^2+6x-4)(x^2+6x+3)$

$\quad=2x^5+9x^4-6x^3+23x^2-6x-12.$

例 2 计算：

$$(4x^3+23x^2-11x-13)(-x^3-6x^2-6x+12).$$

解

	$4+23-11-13$
	$-1-6-6+12$
改变被乘式符号抄一遍…	$-4-23+11+13$
用 6 乘上次乘得的积……	$-24-138+66+78$
抄上次乘得的积…………	$-24-138+66+78$
用 -2 乘上次乘得的积…	$48+276-132-156$
	$-4-47-151-11+420-54-156$

$$\therefore\quad (4x^3+23x^2-11x-13)(-x^3-6x^2-6x+12)$$

$$=-4x^6-47x^5-151x^4-11x^3+420x^2-54x-156.$$

我们知道，进行计算的目的，是为了要求出正确的得数。在能够保证得数正确的条件下，就要计算得越快越好．因此，我们除了要学会笔算、口算，还需要学会查表计算和利用算盘、计算尺、计算机等计算工具来进行计算，在笔算的时候，也应当尽量利用口算，能不写就不写，能少写就少写，以提高计算的速度．列出竖式来进行计算，竖式也不一定要写完全(因为我们需要的是得数，不是竖式)．例如，要计算

$$(3x^4-2x^3+x^2-4x-5)(x^2+x-2)^2,$$

因为用 x^2+x-2 去乘被乘式，用前两项的系数去乘，都只要把被乘式抄一遍，用第三项去乘，只要用 -2 去乘上次乘得的积，所以在乘的时候，被乘式和乘式都可以不写，如：

$$\begin{array}{l}
3-2+1-4-5 \\
\quad 3-2+1-4-5 \\
\qquad -6+4-2+8+10 \\
\hline
3+1-7+1-11+3+10 \\
\quad 3+1-7+1-11+3+10 \\
\qquad -6-2+14-2+22-6-20 \\
\hline
3+4-12-8+4-10+35+4-20
\end{array}$$

由此就可以得出

$$\begin{aligned}&(3x^4-2x^3+x^2-4x-5)(x^2+x-2)^2\\=&3x^8+4x^7-12x^6-8x^5+4x^4-10x^3+35x^2+4x-20.\end{aligned}$$

习　　题

用分离系数法计算下列各题：

8. $(x^3+2x^2-8x+7)(2x^2+6x+3)$.

9. $(4x^3-3x+4)(x^3-4x^2-4x-1)$.

10. $(x^3+x^2+x+2)^3$.

四　十字相乘法

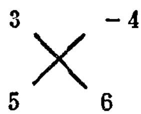
用分离系数法做多项式乘法，比一般方法要简便得多。但是，对于项数不太多的两个多项式相乘，还有更简便的方法。

我们先来看两个二项式相乘，例如，

$$(3x-4)(5x+6).$$

我们看下面左边的竖式，

$$\begin{array}{rrr}3 & -4 & \\ 5 & +6 & \\ \hline 15 & -20 & \\ & 18 & -24 \\ \hline 15 & -2 & -24\end{array}$$



可以看出，被乘式的首项的系数同乘式的首项的系数相乘，就得到积的首项的系数，被乘式的末项同乘式的末项相乘，就得到积的末项。因此，积的首项和末项，可以直接写出来。积的

中间一项的系数应当是$-4\times5+3\times6$，这只要把被乘式和乘式的各项的系数写在纸上，像上面右边那样，把对角的两个数的积-4×5和3×6加起来，就可以口算出是-2。因此，两个二项式相乘，可以不必列竖式，而只要把被乘式和乘式的各项的系数写在纸上，口算出积的各项的系数，直接把积写出来。这种方法叫做**十字相乘法**。下面我们再举一个例子。

例 1 计算：

$$[(a+b)x+(a-b)y][(a-b)x-(a+b)y]。$$

解 $[(a+b)x+(a-b)y][(a-b)x-(a+b)y]$

$$=(a^2-b^2)x^2-4abxy-(a^2-b^2)y^2。$$

$$\begin{array}{ccc} a+b & & a-b \\ & \times & \\ a-b & & -(a+b) \end{array}$$

我们再来看两个三项式相乘，例如，

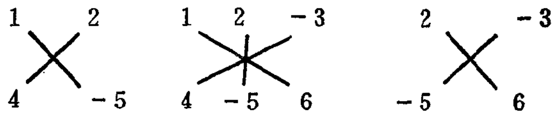
$$(x^2+2x-3)(4x^2-5x+6)。$$

我们先看下面的竖式，

$$\begin{array}{rrrrr}
1 & +2 & -3 & & \\
4 & -5 & +6 & & \\
\hline
4 & +8 & -12 & & \\
 & -5 & -10 & +15 & \\
 & & 6 & +12 & -18 \\
\hline
4 & +3 & -16 & +27 & -18
\end{array}$$

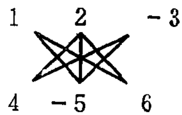
可以看出，积的首项的系数 4 和 末 项 -18 都可以直接写出来。第二项的系数应当是$2\times4+1\times(-5)$，这可以 像下面的左边那样，用十字相乘法口算出$8+(-5)=3$。第三项的系数应当是$-3\times4+2\times(-5)+1\times6$，这可以像 下 面 的中间那样，口算出$-12+(-10)=-22$，$-22+6=-16$。第四项的

系数应当是$-3\times(-5)+2\times6$，这可以像下面的右边那样，用十字相乘法口算出$15+12=27$。



因此，两个三项式相乘，也可以不列竖式，而只要把被乘式和乘式的各项的系数写在纸上，口算出积的各项的系数，直接把积写出来。例如，上面所举的乘法，可以这样来写：

$$(x^2+2x-3)(4x^2-5x+6)$$
$$=4x^4+3x^3-16x^2+27x-18.$$



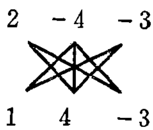
下面我们再举一个例子。

例 2　计算：

$$(2x^2-4xy-3y^2)(x^2+4xy-3y^2).$$

解　$(2x^2-4xy-3y^2)(x^2+4xy-3y^2)$

$$=2x^4+4x^3y-25x^2y^2+9y^4.$$



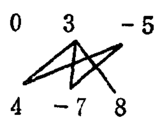
如果一个二项式和一个三项式相乘，那么只要把二项式看成是二次项的系数是 0 的三项式，就可以用上面的方法来计算。

例 3　计算：

$$(3x-5)(4x^2-7x+8).$$

解　$(3x-5)(4x^2-7x+8)$

$$=12x^3-41x^2+59x-40.$$



至于项数超过三项的多项式乘法，因为口算起来不大容易，就很少有人用十字相乘法去算。

在代数中，有时候不需要求出两个多项式的积，而只需要求出积中某一项的系数，这时候我们也可以用十字相乘法去计算。例如，求

$$(x^4-3x^3+x^2-2x+5)(3x^3-2x^2+6x-4)$$

中 x^5 的系数，我们可以像下面那样，把被乘式的各项的系数和乘式的各项的系数写成两行，把被乘式的 x^4 的系数和乘式的 x 的系数，被乘式的 x^3 的系数和乘式的 x^2 的系数，被乘式的 x^2 的系数和乘式的 x^3 的系数分别乘起来，这三个乘积的和就是所求的 x^5 的系数。

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -3 & 1 & -2 & 5 \\ \\ 3 & -2 & 6 & -4 & \end{array}$$

∴ x^5 的系数 $=6+6+3=15$。

下面我们再举一个例子。

例 4 求

$$(1+3x)(1-x^2)(1-2x+4x^2-8x^3+16x^4)$$

中 x^4 的系数。

解 $(1+3x)(1-x^2)(1-2x+4x^2-8x^3+16x^4)$

$$=(1+3x-x^2-3x^3)(1-2x+4x^2-8x^3+16x^4).$$

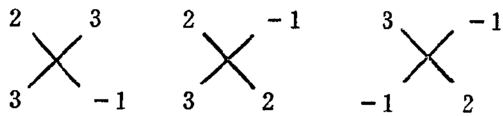
$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -1 & -3 & \\ \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \end{array}$$

$\therefore\quad x^4$ 的系数 $=16-24-4+6=-6$.

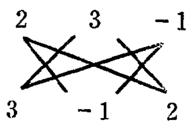
两个二元一次三项式(或者两个三元一次齐次三项式)相乘,用十字相乘法计算,也特别方便. 例如,要计算

$$(2x+3y-1)(3x-y+2),$$

积中的 x^2 项的系数 6、y^2 的系数 -3、常数项 -2, 都可以直接写出, xy 项、x 项、y 项的系数可以像下面那样, 用十字相乘法,口算出分别是 7、1、7.



因此,可以直接写出

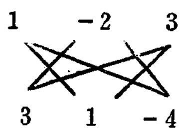


$$(2x+3y-1)(3x-y+2)$$
$$=6x^2+7xy-3y^2+x+7y-2.$$

在计算两个三元一次齐次三项式的积的时候, 可以先写出三个平方项,再用十字相乘法计算其他三项的系数.例如,要计算

$$(a-2b+3c)(3a+b-4c),$$

可以先写出 $3a^2-2b^2-12c^2$, 再用十字相乘法计算 ab、ac、bc 的系数.



$$\therefore\quad (a-2b+3c)(3a+b-4c)$$
$$=3a^2-2b^2-12c^2-5ab+5ac+11bc.$$

上面所说的方法, 对于超过三个元的一次齐次式相乘也

适用。但是项数较多的时候，最好看着数计算，不要划线，以免看不清楚。例如：

$$
\begin{aligned}
&(a+2b-3c-5d)(2a-3b+4c-d) \\
={}&2a^2-6b^2-12c^2+5d^2+ab-2ac \\
&-11ad+17bc+13bd-17cd.
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & -3 & -5 \\
2 & -3 & 4 & -1
\end{array}
$$

习　　题

用十字相乘法计算下列各题：

11. $(3ax-4by)(2bx+5ay)$.
12. $(x^2+2xy-y^2)(3x^2-4xy+y^2)$.
13. $(x-2y)(x^2-2xy+4y^2)$.
14. $(2x+3)(3x-2)(x^2-2x-3)$.
15. 求$(4x^3-2x^2+5x-7)(4x^4+3x^2-x-2)$中 x^4 的系数.
16. 求$(1-2x)^2(1-2x+3x^2-4x^3)$中 x^3 的系数.
17. $(x+3y-4)(2x-y+6)$.
18. $(2x-3y+z)(3x+2y-z)$.
19. $(a-2b+3c+d)(a+2b-4c-2d)$.

五　杨辉三角形

在代数中，我们常常要计算二项式的乘方。要计算 $a+b$ 的平方和立方，可以直接用下面的乘法公式：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

要计算$(a+b)^4$、$(a+b)^5$、$(a+b)^6$等，因为它们分别是 a 和 b 的 4 次、5 次、6 次等齐次多项式，所以我们只要用分离系数法