刘保米尔·捷謨夫著

用最小二乘法确定最适宜的标定直綫和平面

城市建設出版社

用最小二乘法確定
最適宜的標定直線和平面

顧履恭 譯

城市建設出版社出版
·1957

內 容 提 要

本書原著系保加利亞工程師刘保米尔·捷謨夫教授的論著。保加利亞文初版刊行于 1952 年。1956 年由 О.Г.奇茲教授与 А.И.博劳金副教授譯成俄文在苏联出版。本書系根据俄譯本轉譯。

著者在本書中探討了在各种不同情况下的場地竪向佈置問題，并且提新穎的、值得注意的竪向設計計算新方法。

本書可供場地測量、建筑設計和施工技术人員閱讀。

原 書 說 明

ПРИМЕНЕНИЕ СПОСОБА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАИБОЛЕЕ ПОДХОДЯЩИХ ОФОРМЛЯЮЩИХ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

原 著 者：Любомир Димов

俄 譯 者：О.Г. Дитц и А.И.Болотин

原出版者：Госстройиздат

出版时間、地点：1956—Ленинград

用最小二乘法確定
最適宜的标定直綫和平面

顧 凝 森 譯

城市建設出版社（北京阜外大街）出版

（北京市書刊出版業營業許可證出字第 088 號）

☆

有色局印刷所印刷

一九五七年七月第一版

一九五七年七月第一次印刷（1—1565）

開本787×1092 1/32·20千字 1 1/8 印張·定價（11）0.25 元

☆

发 行 者　新华書店

目　录

对豎向佈置工作特点的一般見解

俄譯者 序言

改变自然地貌的表面，使其适合于拟建工程在技术上和工艺上的条件，并适合于建筑物的使用条件以及区域內公共福利設施条件，这些工作的总和，称为場地的豎向佈置。在新建和改建城市交通道路、运河及其他工程構筑物的全部工作中，豎向佈置佔着极其重要的地位。

在豎向佈置工作中，劳动量最大、花錢最多的就是土方工程及土方搬运工作。合理地选擇地面，使其不仅能符合一定的技术規范的規定，而且同时在土方平衡和最小土方量方面要滿足經济上的要求。

目前，在一些有关場地豎向佈置的參考書和手册里，对于最小土方量的实际計算問題，闡述得还不充分。实际进行地形設計时，常常沒有根据的以土方平衡法来替代最小土方法，而前者的計算极为概略。大部分豎向佈置是用逐次試算法进行設計的，沒有明确考虑到最小土方量問題。这样就使設計須作多次修正，而使最終方案的經济根据不充分。

因此，为使豎向佈置理論繼續发展，必須廣泛地研討有关最小土方量的計算方法問題。对此問題的研討，將有助于消除豎向佈置工作上的不确实現象，并为选擇最适宜的且能滿足技术規范和經济条件的标定地面开闢道路。

盧保米尔·奇莫夫教授在本書內介紹了有关計算最小土方量方法的极为有意义的問題。研讀本書，不論对地形的合理設計問題或是对豎向佈置理論的繼續发展，都將帶来一定的好处。

技术科学碩士·副教授 А.И. 博劳金

一、在断面上选擇最适宜的設計直線位置

在建造交通線路、街道福利設施以及其他情况下，应該將区域內某部分自然地形断面改变为直線形狀。設計最适宜的直線时，应設法使挖方和塡方取得平衡，并使土方量为最小。目前，实际工作中，常常用目測来决定土方平衡条件和最小土方条件，也就是采用极为概略的估計。

如果地形横断面大致相同且坡度不大，那么，問題仅与縱向断面有关，要确定最适宜的标定直線，可采用最小二乘法。

最适宜的标定直線应当这样：断面上各点超出該直線上相应各点的高差，其平方总和应为最小。

設自然断面上所給各点座标如下：

$$1(x_1,y_1),\ 2(x_2,y_2),\cdots,n(x_n,y_n).$$

直角座标上某直線方程定为

$$y=a+bx \tag{1}$$

点 $1,2,\cdots,n$ 于直線(1)上的投影高度可按下列各式計算：

$$\begin{aligned} y_1'&=a+bx_1,\\ y_2'&=a+bx_2,\\ &\cdots\cdots\\ y_n'&=a+bx_n. \end{aligned} \tag{2}$$

在断面上各点超出标定直線各点的高差，显然可由下列各式求得：

$$v_1=y_1'-y_1=a+bx_1-y_1,$$

$$
\begin{aligned}
v_2 &= y_2' - y_2 = a + bx_2 - y_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_n &= y_n' - y_n = a + bx_n - y_n.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

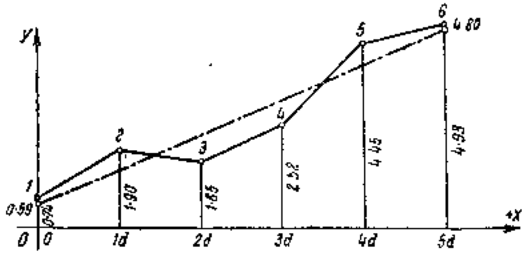

图 1

最适宜直線的参数 a 及 b 应满足下式之最小值条件:

$$[vv] = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n{}^2 \tag{4}$$

根据微分法則，最小值条件(4)具有下列形式:

$$
\begin{aligned}
&na + [x]b - [y] = 0, \\
&[x]a + [xx]b - [xy] = 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

解式(5)，可得:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{[xx][y] - [x][xy]}{n[xx] - [x]^2}, \\
b &= \frac{-[x][y] + n[xy]}{n[xx] - [x]^2}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

由公式(6)算出参数 a 及 b 的最后数值，然后由方程(3)可算出高差 v。v 即为施工标高。

如断面上各点間距离相等，則 $x_1 = 0$, $x_2 = d$, $x_3 = 2d$, $\cdots$, $x_n = (n-1)d$，因而:

$$[x] = \frac{n(n-1)d}{2},$$

$$[xx]=\frac{n(n-1)(2n-1)d^2}{6}, \tag{7}$$

$$[xy]=[y_2+2y_3+\cdots+(n-1)y_n]d=[ky]d,$$

$$a=\frac{2(2n-1)[y]-6[ky]}{n(n+1)} \tag{8}$$

$$b=\frac{-6(n-1)[y]+12[ky]}{dn(n-1)(n+1)}.$$

例： 已知断面上各点座标如下（图1）：1(0;0.74)，2(20;1.90)，3(40;1.65)，4(60;2.52)，5(80;4.45)和6(100;4.93)。求最适宜的标定直線。

此例中 $n=6, d=20, [y]=16.19, [ky]=55.21$ 依公式(8)得：

$$a=\frac{2\times 11\times 16.19-6\times 55.21}{6\times 7}=0.593,$$

$$b=\frac{-6\times 5\times 16.19+12\times 55.21}{20\times 6\times 5\times 7}=0.0421.$$

由方程(3)得下列各施工标高之值：

$v_1=-0.15$，$v_2=-0.47$，$v_3=+0.63$，$v_4=+0.60$，

$v_5=-0.49$，$v_6=-0.13$。

二、最适宜的平面位置的选擇

在修建飞机場、住宅、公共建筑和厂房时，必須將地面平整为傾斜或水平狀。

第一种情况　最适宜的平面应是这样的：地面上各点与該平面上各点間的差，其平方总和应为最小。

不平行于 z 軸的平面方程，可以 $z=a+bx+cy$ 表示。其中

a 为 z 軸上截距，$b=tg\,\beta$ 和 $c=tg\,\gamma$ 为相应的角系数（图 2）。

解决該項工作的原始資料可能为任意的分散各点也可能是按一定系統分布的各点。

当各点之間距离不相等时　則其坐标如下：

$1(x_1,y_1,z_1)$，$2(x_2,y_2,z_2)$，$\cdots$，$n(x_n,y_n,z_n)$.

为确定平面

$$z=a+bx+cy, \tag{9}$$

必須求出 a、b 和 c 諸值，并使之完全滿足以下各式：

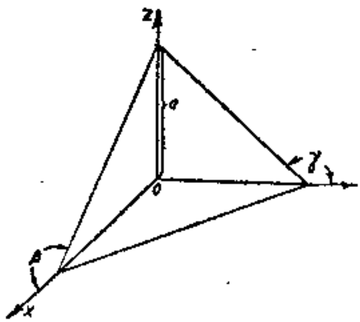

图 2

$$\begin{aligned} z_1&=a+bx_1+cy_1,\\ z_2&=a+bx_2+cy_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ z_n&=a+bx_n+cy_n. \end{aligned} \tag{10}$$

此时，差值方程(如同課差方程)將为：

$$\begin{aligned} v_1&=a+bx_1+cy_1-z_1,\\ v_2&=a+bx_2+cy_2-z_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ v_n&=a+bx_n+cy_n-z_n. \end{aligned} \tag{11}$$

且　　$[vv]=v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n{}^2=$ 最小值

或　$(a+bx_1+cy_1-z_1)^2+(a+bx_2+cy_2-z_2)^2+\cdots=$ 最小值

若使上列函数的偏导数等于零，則可求得如下形式的法方程式：

$$\sum_1^n(a+bx+cy-z)=0,$$

$$\sum_1^n x(a+bx+cy-z)=0,$$

$$\sum_1^n y(a+bx+cy-z)=0.$$

或

$$\begin{aligned} na+[x]b+[y]c-[z]&=0,\\ [x]a+[xx]b+[xy]c-[xz]&=0, \qquad (12)\\ [y]a+[yx]b+[yy]c-[yz]&=0.\end{aligned}$$

解該組法方程可求得未知数 a、b 和 c 之值，再按式(11)确定差值 v。驗算采用下列各等式：

$$[v]=0,\ [xv]=0,\ [yv]=0. \qquad (13)$$

如各点間距离相等（例如，各点为正方形網格頂点，而在 x 和 y 軸上的方格格数相等（图3），也就是点 $0, 1, 2, \cdots, n$ 的座标相等：

$$x=0,\ 1d,\ 2d, \cdots, (\sqrt{n}-1)d,$$
$$y=0,\ 1d,\ 2d, \cdots, (\sqrt{n}-1)d,$$
$$z=z_0,\ z_1, z_2, \cdots, z_n,$$

式中 n 为各地段内点数，而 $(\sqrt{n}-1)$ 为横坐标或縱坐标上正方形边数，此时：

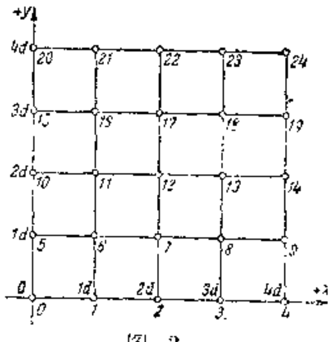

图 3

$$[x]=[y]=\sqrt{n}\{1d+2d+\cdots+(\sqrt{n}-1)d\}=\frac{(\sqrt{n}-1)n}{2}d,$$

$$[xx]=[yy]=\sqrt{n}\{1^2d^2+2^2d^2+\cdots+(\sqrt{n}-1)^2d^2\}=$$
$$=\frac{n(\sqrt{n}-1)(2\sqrt{n}-1)d^2}{6},$$

$$[xy]=\{1d+2d+\cdots+(\sqrt{n}-1)d\}^2=\left\{\frac{(\sqrt{n}-1)\sqrt{n}}{2}\right\}^2d^2.$$

將 $[x^2]$，$[xz]$，$[yz]$ 和 $[xy]$ 諸值代入方程(12)，得法方程式：

$$na+\frac{d(\sqrt{n}-1)n}{2}b+\frac{d(\sqrt{n}-1)n}{2}c-[z]=0,$$

$$\frac{d(\sqrt{n}-1)n}{2}a+\frac{d^2 n(\sqrt{n}-1)(2\sqrt{n}-1)}{6}b+d^2\left\{\frac{(\sqrt{n}-1)\sqrt{n}}{2}\right\}^2 c-[xz]=0, \qquad (14)$$

$$\frac{d(\sqrt{n}-1)n}{2}a+d^2\left\{\frac{(\sqrt{n}-1)\sqrt{n}}{2}\right\}^2 b+\frac{d^2 n(\sqrt{n}-1)(2\sqrt{n}-1)}{6}c-[yz]=0.$$

解此数式，我們可得出所求情况下的系数 a,b 和 c 諸值。这个由全部方格組成的正方形地段的重心高度等于：

$$z_{重}=a+bx+cy=a+(b+c)\frac{(\sqrt{n}-1)}{2}d. \qquad (15)$$

將 a,b,c 諸值代入方程(15)，并作适当簡化后，得：

$$z_{重}=\frac{[z]}{n}. \qquad (\text{I})$$

即設計平面的重心高程等于所給各点絕对高程的算术平均値。

將地表平整为水平面时，該平面在基准水平面上的絕对高程就等于所給各点絕对高程的算术平均値。

只有正方形、矩形或其他任何相同图形的網格是水平面上各点时，公式(I)才有其意义。此式也可用以校核 a,b,c 各値在計算上的精确程度。

例： 試确定表1中最适宜的平面。

表1

点号	y	x	z	xx	xy	yy	xz	yz
0	0	0	16.541					
1	0	10	10.350	100			103.50	
2	0	20	8.540	400			170.80	
3	0	30	6.320	900			189.60	
4	0	40	4.053	1600			162.12	
5	10	0	10.437			100		104.37
6	10	10	9.563	100	100	100	95.63	95.63
7	10	20	8.973	400	200	100	179.46	89.73
8	10	30	8.460	900	300	100	253.80	84.60
9	10	40	7.304	1600	400	100	292.16	73.04
10	20	0	8.312			400		166.24
11	20	10	7.456	100	200	400	74.56	149.12
12	20	20	8.045	400	400	400	160.90	160.90
13	20	30	8.973	900	600	400	269.19	179.46
14	20	40	9.563	1600	800	400	382.52	191.26
15	30	0	6.011			900		180.33
16	30	10	8.453	100	300	900	84.53	253.59
17	30	20	8.632	400	600	900	172.64	258.96
18	30	30	8.710	900	900	900	261.30	361.30
19	30	40	10.070	1600	1200	900	402.80	302.10
20	40	0	5.461			1600		218.44
21	40	10	7.032	100	400	1600	70.32	281.28
22	40	20	10.415	400	800	1600	208.28	416.60
23	40	30	14.560	900	1200	1600	436.80	582.40
24	40	40	17.053	1600	1600	1600	682.12	682.12
25 n	500 $[y]$	500 $[x]$	229.287 $[z]$	15000 $[xx]$	10000 $[xy]$	15000 $[yy]$	4653.03 $[xz]$	4731.47 $[yz]$

法方程式为:

$$25a+500\,b\,+500\,c-229.287=0,$$

$$500\,a\,+15000\,b\,+10000\,c\,-4653.03=0,$$

$$500\,a+10000\,b+15000\,c-4731.47=0.$$

解上列各式得:

$$a=+8.3194;\ \ b=+0.013458;\ \ c=0.029146.$$

験算:

$$z_{\text{Ⅱ}}=z_{\text{B}}=a+\frac{(b+c)(\sqrt{n}-1)d}{2}=9.17148,$$

$$z_{\text{II}}=\frac{[z]}{n}=\frac{229.287}{25}=9.17148.$$

由方程　$z=a+bx+cy$ 求得：$z_0=8.31940$，$z_4=8.85772$，

$z_{20}=9.48524$，$z_{24}=10.02356$；

$$z_{\text{II}}=z_6=\frac{z_0+z_4+z_{20}+z_{24}}{4}=\frac{2z_0+2z_{24}+z_{20}+z_4}{6}$$

$$=\frac{2z_{20}+2z_4+z_0+z_{24}}{6}=9.17148,$$

此即水平面的絕对标高。施工标高为：

$v_0=-8.222$，$v_1=-1.896$，$v_2=+0.049$，$v_3=+0.403$，

$v_4=+4.805$，$v_5=-1.826$，$v_6=-0.818$，$v_7=-0.093$，

$v_8=+0.555$，$v_9=+1.845$，$v_{10}=+0.590$，$v_{11}=+1.581$，

$v_{12}=+1.126$，$v_{13}=+0.333$，$v_{14}=-0.122$，

$v_{15}=+3.183$，$v_{16}=+0.875$，$v_{17}=+0.831$，

$v_{18}=+0.888$，$v_{19}=-0.338$，$v_{20}=+4.024$，

$v_{21}=+2.588$，$v_{22}=-0.661$，$v_{23}=-4.671$，

$v_{24}=-7.029$

由此法求得的最适宜平面，其結果决不可能使土方的塡挖量相等，塡方与挖方数量仅能大致相等。这在某些情况下，对实际应用已能满足要求。

第二种情况　在此情况中，最适宜平面的选擇，应使其塡方和挖方量相等，而各点与平面間之差，其平方与权的乘积之总和为最小。

为了在选擇最适宜平面时，使土方的塡挖量完全平衡，必須引用观察値的权。設以 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，等表示权，則由最小二乘法即有下式：

$$[pvv]=p_1v_1^2+p_2v_2^2+\cdots+p_nv_n^2=\text{最小値。}$$

此时法方程式为:

$$
\begin{aligned}
&[p]a+[px]b+[py]c-[pz]=0,\\
&[px]a+[pxx]b+[pxy]c-[pxz]=0,\\
&[py]a+[pyx]b+[pyy]c-[pyz]=0.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

解上列各式得未知数 a,b 及 c 各値。

差値由式(11)求得。以下列各等式驗算:

$$[pv]=0,\ [pxv]=0,\ [pyv]=0. \tag{17}$$

其次,平整地面时,还会碰到下列情况:

(1) 必須保持已知各点的高程。为此,可取已知点在某水平面上的投影作为坐标原点。

系数a等于該点高程。由方程(16)的第二、第三式求出b和c値:

$$
\begin{aligned}
&[pxx]b+[pxy]c=[pxz]-[px]a,\\
&[pxy]b+[pyy]c=[pyz]-[py]a.
\end{aligned}
$$

(2) 必須保持某方向的傾角,例如沿 x 軸的傾角。此时,就得变換坐标而使 x 軸与所取方向相合。

系数 b 等于傾角,而由法方程(16)的第一和第三兩式求出 a 和 c:

$$
\begin{aligned}
&[p]a+[py]c=[pz]-[px]b,\\
&[py]a+[pyy]c=[pyz]-[pxy]b.
\end{aligned}
$$

(3) 必須保持兩点的高程。为此应取兩点中的一点投影为坐标原点,而使坐标軸之一(例如 y 軸)通过另外一点的投影。系数 a 等于原点的高度。由兩点高程及其間距离可算出傾角c,而由方程(16)的第二式求得 b 值:

$$b=\frac{[pxz]-[px]a-[pxy]c}{[pxx]}.$$

(4) 如傾角 b 及 c 应等于零,則 a 値(水平面高程)由方程

(16)第一式求得:

$$a = z_{\text{П}} = \frac{[pz]}{[p]}. \qquad (\text{II})$$

此式适用于各点为一般方形網格或矩形網格的情形。

三、權的性質及其確定方法

确定权时,須考虑到各个絕对高程在計算土方总量公式內的出現次数。为此,建議采用数学上熟知的定积分近似計算法。

确定各点高程的权和土方体积計算方法有关。这些方法我們將依次研究如下:

1. 梯形公式

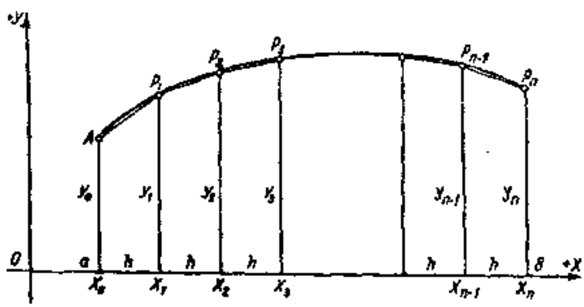

图 4

1. 按梯形公式(見图4),定积分近似值为:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\left\{\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(a+h) + \right.$$

$$\left. + f(a+2h) + \cdots + f\,[a+(n-1)\,h]\right\}.$$

此式中的 a 和 b 是地段端点的横坐标而

$$h=\frac{b-a}{n}.$$

引用梯形公式以計算四边形稜柱体体积，可得：

$$\int_0^b dy\int_0^a f(x,y)d\,x=\frac{a}{2}\int_0^b [f(y,a)+f(y,0)dy$$

$$=\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}[f(a,b)+f(0,a)+f(0,b)+f(0,o)]$$

$$=\frac{ab}{4}(z_0+z_1+z_5+z_6)=\frac{p}{4}(z_0+z_1+z_5+z_6),\ (18)$$

其中 $p=ab=hk$ 为矩形 0156 的面积（图 5）

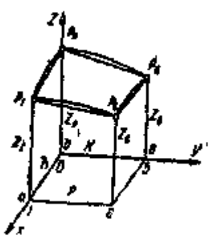

图 5

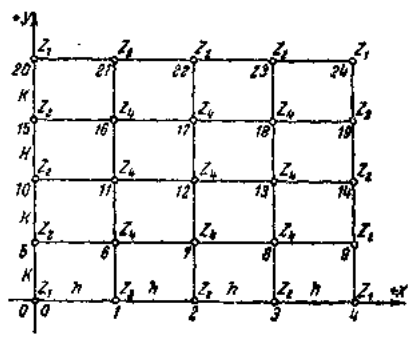

图 6

如按同样方法計算所有四壁稜柱体体积，而令各稜柱体的各矩形底面均为 $p=kh$(图 6)。

并將所有稜柱体相加，則可求得总体积：

$$V=\int_0^{hk}dy\int_0^{dh}f(x,y)\,dx=\frac{p}{4}[1(z_0+z_4+z_{20}+z_{24})+$$