

高等医药院校試用教材

高等数学

唐子东 主編

人民卫生出版社

高等医药院校試用教材

供药學專業用

高等数学

唐子东 主編

祝紹琪 黃志宏 編写

孙光远 評閱

人民衛生出版社

一九六二年·北京

高等数学

开本: 850 × 1168/32 印张: 8 14/16 字数: 240 千字

唐子东 主编

人民卫生出版社出版

(北京书刊出版业营业许可证出字第〇四六号)

·北京崇文区姚子胡同三十六号·

北京市印刷一厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

统一书号: 14048·2038

1959年10月第1版—第1次印刷

定 价: 0.95 元

1962年5月第1版—第5次印刷

印 数: 17,501—26,500

目 錄

第一章 平面直角坐标

* § 1.1	直線上点的坐标	1
§ 1.2	平面上点的坐标	2
§ 1.3	坐标軸的平移	3
§ 1.4	兩点的距离	4
§ 1.5	綫段的定比分点	5
	习题一	7

第二章 曲綫和方程

§ 2.1	曲綫的方程	8
§ 2.2	方程的图形	11
§ 2.3	解析几何的兩個基本問題	14
	习题二	14

第三章 直綫

§ 3.1	已知斜率和截距的直綫方程	15
§ 3.2	直綫方程的一般式	16
§ 3.3	已知斜率和經過定点的直綫方程	18
* § 3.4	兩直綫的夹角	19
§ 3.5	兩直綫平行或垂直的条件	20
	习题三	21

第四章 二次曲綫

§ 4.1	拋物綫	23
§ 4.2	橢圓	27
§ 4.3	双曲綫	30
§ 4.4	双曲綫的漸近綫	33
§ 4.5	以漸近綫为坐标軸的等边双曲綫	36
	习题四	37

第五章 空間解析几何概念

§ 5.1	空間直角坐标	38
§ 5.2	兩点的距离	40
§ 5.3	曲面和曲綫的方程	41
* § 5.4	平面方程	42

* § 5.5	球面方程	46
* § 5.6	椭面方程	47
* § 5.7	柱面	49
* § 5.8	锥面	50
	习题五	53

第六章 函数

* § 6.1	常量和变量	54
* § 6.2	函数概念	55
* § 6.3	函数的三种表示法	57
§ 6.4	初等函数	58
§ 6.5	函数尺及曲线的直线化	62
	习题六	67

第七章 极限

* § 7.1	绝对值	69
§ 7.2	无穷小量	70
§ 7.3	无穷大量	72
§ 7.4	有极限的变量	72
§ 7.5	无穷小量的运算	74
§ 7.6	极限的基本定理	76
§ 7.7	极限存在的判定法	80
§ 7.8	当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\sin x}{x}$ 的极限	81
§ 7.9	当 $n \rightarrow \infty$ 时, $(1 + \frac{1}{n})^n$ 的极限	82
§ 7.10	函数的连续性	86
§ 7.11	初等函数的连续性	90
	习题七	91

第八章 导数

§ 8.1	非匀速运动的瞬时速度	93
§ 8.2	过曲线上一点的切线	95
§ 8.3	导数的定义	96
* § 8.4	函数的连续性与可微性间的关系	99
	习题八	100

第九章 微分法

§ 9.1	四个基本初等函数的导数	101
-------	-------------	-----

§ 9.2	算术运算结果的微分法	104
§ 9.3	复合函数的导数	108
§ 9.4	隐函数的微分法	109
§ 9.5	其他基本初等函数的导数	110
§ 9.6	微分法公式汇集	113
§ 9.7	高阶导数	114
	习题九	115

第十章 微分

§ 10.1	微分概念	118
§ 10.2	微分与导数的关系	119
§ 10.3	微分的基本公式及法则	120
§ 10.4	微分的应用	122
§ 10.5	高阶微分	126
	习题十	127

第十一章 函数及曲线研究

§ 11.1	函数有限增量定理(拉格朗奇公式)	129
§ 11.2	函数的递增性和递减性	131
§ 11.3	函数的极值	135
* § 11.4	曲线的凹凸和拐点	142
* § 11.5	函数图形的作法	143
	习题十一	146

第十二章 不定积分

§ 12.1	不定积分的概念	148
§ 12.2	不定积分的性质	151
§ 12.3	不定积分的基本公式	152
§ 12.4	三种积分法	155
	习题十二	162

第十三章 定积分及其应用

§ 13.1	曲边梯形的面积	165
§ 13.2	非匀速运动的路程	167
§ 13.3	定积分是和的极限	168
§ 13.4	定积分与不定积分的关系	171
§ 13.5	定积分的性质	173
§ 13.6	定积分的应用	175
* § 13.7	定积分的近似计算(梯形法)	186

§ 13.8	积分限为无穷大的广义积分	189
	习题十三	191

第十四章 微分方程概念

§ 14.1	基本概念	194
§ 14.2	微分方程的解与积分常数	196
§ 14.3	变量可分离的一阶微分方程	198
§ 14.4	三阶微分方程的两种简单类型	202
	习题十四	205

第十五章 多元函数

§ 15.1	多元函数及其连续性	209
§ 15.2	偏导数	210
§ 15.3	偏微分和全微分	212
* § 15.4	复合函数的导数	215
§ 15.5	高阶偏导数	216
§ 15.6	二元函数的极值	218
* § 15.7	由全微分求原函数	220
	习题十五	222

第十六章 误差理论与最小二乘法

§ 16.1	导言	224
§ 16.2	精度的标准	226
§ 16.3	均方误差的传播定律	227
§ 16.4	算术平均值	234
§ 16.5	单一观测与算术平均值的均方误差	238
	习题十六(1)	242
§ 16.6	概率概念	243
§ 16.7	事件重复的概率	247
§ 16.8	偶然误差的分布定律	252
§ 16.9	误差出现之概率的计算	257
§ 16.10	三种误差尺度的比较	259
§ 16.11	最小二乘法原理	262
§ 16.12	经验方程	265
	习题十六(2)	268
	附录 1 三角坐标	272
	附录 2 数据图示的步骤	274
	附表 已知 h_a , 求 P 之值	277

(标有星号*各节可以略去,或由同学自己阅读)

第一章 平面直角坐标

从第一章到第五章讲解析几何。通常所谓解析几何，是指以坐标为媒介、用解析方法来研究几何图形的数学。它把所有的几何问题都用解析方法来处理；所用的工具主要是代数。初等几何里虽然也用到代数，但没有用到全部几何上去；有些几何问题，几乎与代数完全没有关系。要想用解析方法处理全部几何问题，就必须引入坐标的概念才能实现。

数学中最基本的概念是数；几何中最基本的概念是点的位置，也就是量。要用解析方法研究几何，必须首先建立数与点的关系，换句话说，就是要用数来表示点的位置。把这关系建立之后，才能用解析方法处理全部几何问题。所以我们首先研究如何用数来表示点的位置。

凡能确定点的位置的数，称为这个点的坐标；而用来规定坐标的方法，称为坐标法。因为有各种不同的方法，也就有各种不同的坐标系。

§1.1 直线上点的坐标

为了用数来确定直线上任一点 M 的位置，我们首先在直线上任取一定点 O （称为原点），再选一线段 OP 作为单位长；由 O 至 M 的距离，可用单位长的倍数表示。但是，在直线上与 O 等距离的点有两个，如图1.1中的 M 与 M_1 。为了达到一数只表一点的目的，就把 O 点两侧用数学上的正负号来加以区分。习惯上把 O 点右边定为正值，左边定为负值，并用箭头如图中 Ox

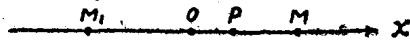


图1.1

表示正向的意思。象这样有一定方向的直线，称为有向直线。设想一动点由原点 O 出发，按一定方向连续移动，到达终点 M ，若移动方向与 Ox 相同，则 QM 线段的数值为正；若移动方向与 Ox 相

反,如 OM_1 , 則其值为負。今設 OM 的长是单位长 OP 的 a 倍, 則

$$OM = a, \quad OM_1 = -OM = -a;$$

a 与 $-a$ 分別称为 M 点与 M_1 点的坐标, 并用記号 $M(a)$ 与 $M_1(-a)$ 表示, 而直綫 Ox 則称为坐标軸。

例如, 图 1.2 中 A, B, C, D 各点的坐标是:

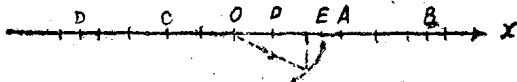


图 1.2

$A(3), B(5\frac{1}{2}), C(-2), D(-4\frac{1}{2})$, 原点的坐标是 $O(0)$ 。

如果坐标值是无理数, 例如 $\sqrt{5}$, 我們可用几何作图法正确地作出該点的位置, 在图 1.2 中点 E 的坐标是 $(\sqrt{5})$ 。

由上易知: 直綫上任意一点, 必有一个数^① 与它对应, 反之亦然。因此, 直綫上的一点和一个数是一一相互对应。

§ 1.2 平面上点的坐标

为了用数来确定平面上任一点的位置, 我們在平面上任取兩直綫, 并且为簡便計, 使这两直綫互相垂直。习惯上用 Ox 表水平

綫, 用 Oy 表鉛垂綫, 并規定它們的正向如图 1.3 中箭头所指。这两直綫称为坐标軸; Ox 称为橫軸或 x 軸, Oy 称为縱軸或 y 軸; 兩軸的交点 O 称为原点。所有这些总称为直角坐标系, 又称笛卡儿坐标系。

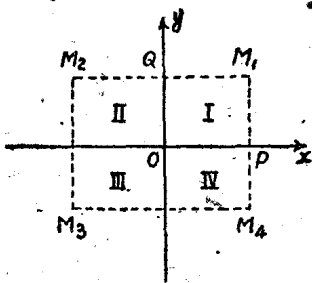


图 1.3

設 M_1 为平面上一点, 过 M_1 分別作垂直于坐标軸的直綫, 而和它們交于 P 及 Q 兩点。用有向綫段

OP 与 OQ 的长及其方向, 完全确定了 M_1 的位置。

· 用某一长度单位度量 OP 和 OQ , 設所得的数分別是 x 和 y ;

^① 仅指实数, 以后同此。

則 x 与 y 称为 M_1 点的坐标, 前者称为横坐标, 后者称为纵坐标, 并用記号 $M_1(x, y)$ 表示:

兩坐标軸把平面分为四部分, 称为象限。从右上方的象限开始, 依反时針方向順次称为第一, 二, 三, 四象限。

各象限內的点(如图中 M_1, M_2, M_3, M_4) 的坐标符号如下表:

	I	II	III	IV
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-

从上面看来, 平面上凡有一点, 就确定一对数 x 与 y ; 反之凡有一对数 x 与 y , 也确定平面上一点。因此, 平面上的点与一对数是一一相互对应。

今后, 我們若說已知一点, 就是已知它的坐标; 若說求一点, 就是求这点的坐标。

从图 1.3 易知 $OP = QM_1$, $OQ = PM_1$, 因此作出平面上已知点的方法有两种, 例如, 求作点 $M(-2, 3)$ 。我們可在 Ox 軸上取 $OP = -2$; 在 Oy 軸上取 $OQ = 3$ 。过 P 与 Q 作軸的平行綫相交于 M , M 就是所求

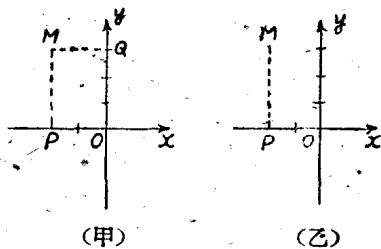


图 1.4

的点[图 1.4(甲)]。或者在 Ox 軸上取 $OP = -2$, 从 P 点向上作 Oy 軸的平行綫段 $PM = 3$, 則此綫段的終点 M 就是所求的点[图 1.4(乙)]。

§1.3 坐标軸的平移

設平面上有原点不同而軸的方向相同的兩坐标系 xOy 和 $x'O'y'$ 。可以設想把坐标系 xOy 平移而得到坐标系 $x'O'y'$, 因此称前者为旧系, 后者为新系。 O' 对旧系的坐标設为 (h, k) , 平面上

任一点 M 对旧系的坐标为 (x, y) ，对新系的坐标为 (x', y') ，现在来研究坐标 (x, y) 和坐标 (x', y') 的关系 (图 1.5)。

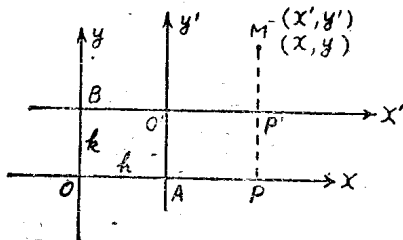


图 1.5

作綫段 $PM \perp Ox$ 軸，交

新軸于 P' ，易知：

$$x = OP = OA + AP = h + x',$$

$$y = PM = PP' + P'M =$$

$$k + y'.$$

所以在坐标軸的平移下，我們得到用新系的坐标表旧系的坐标的公式是：

$$\begin{cases} x = x' + h, \\ y = y' + k. \end{cases} \quad (I)$$

由 (I) 式移項，便得用旧系坐标表新系坐标的公式：

$$\begin{cases} x' = x - h, \\ y' = y - k. \end{cases} \quad (I')$$

[注意] 推演公式 (I) 时，是假定 h, k 均为正数，如果其中的一个或两个为負数，上公式仍正确，讀者可自証之。

§ 1.4 兩点的距离

应用坐标法解决几何上的問題，我們首先讲一种比較简单而且今后时常会遇到的，就是求兩已知点間的距离問題。

求兩已知点 $M_1(x_1, y_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2)$ 的距离。

从 M_1, M_2 各作 Ox 軸的垂綫 M_1P_1 与 M_2P_2 并作 $M_1R \perp M_2P_2$ (图 1.6)。

因为 M_1M_2R 是直角三角形，所以根据商高定理，得：

$$M_1M_2 = \sqrt{M_1R^2 + RM_2^2}. \quad (1)$$

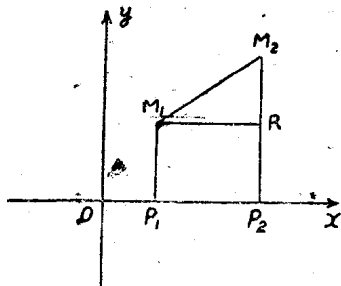


图 1.6

我們知道 $M_1R = P_1P_2 = OP_2 - OP_1 = x_2 - x_1$, (2)

$RM_2 = P_2M_2 - P_2R = y_2 - y_1$ 。 (3)

把(2), (3)的关系代入(1), 并以 d 代 M_1M_2 , 即得

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}。 \quad (I)$$

这是求兩点距离的公式。

[注意] 推演公式(I)时, 系假定 M_1, M_2 兩点都在第一象限, 如果在其他象限, 公式(I)仍正确, 讀者可自証之。

在特殊情形, 任意一点 $M(x, y)$ 与原点 $O(0, 0)$ 的距离, 是

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}。 \quad (I')$$

例: 試求点 $A(-2, 3)$ 与点 $B(5, 4)$ 間的距离。

[解] 把 A 点看作 M_1 , 把 B 点看作 M_2 , 根据公式(I),

得 $d = \sqrt{[5 - (-2)]^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}。$

§1.5 綫段的定比分点

已知綫段的端点是 $M_1(x_1, y_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2)$, 試在 M_1M_2 上求一点 $M(x, y)$ 。

使 $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda。$

过 M_1, M_2 及 M 各作 x 軸的垂綫(图 1.7), 由几何中的定理(兩直綫被几条平行綫所截, 其对应綫段成比例)。可得

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{P_1P}{PP_2} = \lambda, \quad (1)$$

但 $P_1P = x - x_1,$

$PP_2 = x_2 - x。$

把这关系代入(1),

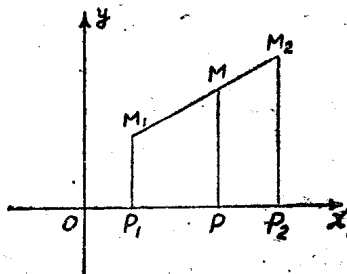


图 1.7

得
$$\frac{x-x_1}{x_2-x} = \lambda \text{ 或 } x-x_1 = \lambda(x_2-x),$$

即
$$x(1+\lambda) = x_1 + \lambda x_2.$$

所以
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

若由 M_1, M_2 及 M 各作 y 轴的垂线, 同理可得

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

因此, 用定比 $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$ 分割线段 M_1M_2 的分点 M 的坐标,

可用下列公式求出:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \end{aligned} \right\} \quad \text{(II)}$$

[注意] 推演公式(II)时, 系假定 M_1 与 M_2 全在第一象限, 但不难证明若两点中的一个或两个在其他象限内时, 公式(II)仍正确。

在特殊情形, M 是线段 M_1M_2 的中点时, $M_1M = MM_2$ 此时 $\lambda = 1$, 公式(II)简化为

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ \bar{y} &= \frac{y_1 + y_2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad \text{(II')}$$

式中 \bar{x} 与 \bar{y} 代表 M_1M_2 线段中点的坐标。

因此, 一已知线段中点的坐标等于其两端点对应坐标的算术平均值。

例: 求顶点为 $A(3, 3), B(-2, 1), C(2, -4)$ 的三角形的重心 G 。

[解] 根据平面几何中的定理: 三角形的重心是三条中线的

交点；并且这一点和各边中点的距离等于该中綫长的三分之一。所以解这問題只要任取一条中綫如图 1.8 中的 AD ，把 AD 分成兩段，使这两段的比为 1:2，則这个分点就是所求的重心 G 。

这里第一步应当求出 D 点的坐标，根据上面公式(III')， D 点的坐标是：

$$\bar{x} = \frac{-2+2}{2} = 0,$$

$$\bar{y} = \frac{1-4}{2} = -1\frac{1}{2}.$$

第二步求 AD 綫段的定比分点 G 。

这里 $\lambda = \frac{DG}{GA} = \frac{1}{2}$ ，根据公式(III)，

$$x = \frac{0 + \frac{1}{2} \cdot 3}{1 + \frac{1}{2}} = 1, \quad y = \frac{-1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3}{1 + \frac{1}{2}} = 0.$$

所求重心 G 的坐标是 $(1, 0)$ 。从图 1.8 可以看出 G 的位置与計算結果符合。

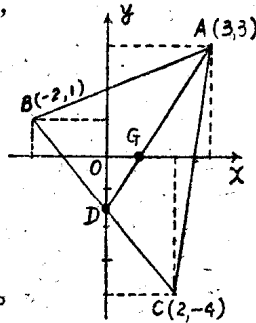


图 1.8

习 題 一

1. 什么叫做点的坐标？直綫上和平面上的坐标法各是怎样的？
2. 平行于橫軸的直綫上的各点，其坐标怎样？平行于縱軸的直綫上各点的坐标怎样？
3. 在直綫上取点 O 和 P ，使它們的距离为 1 厘米，作出以下各点：
 $A(4)$, $B(-1)$, $C(6\frac{1}{2})$, $D(-\sqrt{29})$, $E(\sqrt{7})$ 。
4. 在直角坐标中，取适宜的綫段长为单位，作出以下各点：
 $A(2,3)$, $B(-4,1)$, $C(2,-3)$, $D(-2,-2)$, $E(-5,0)$, $F(0,2)$ 。
5. 某地日間最高溫度是 10°C ，次晨最低溫度是 -6°C ，試用直綫上坐标法表出这两溫度，并計算其溫度差。
6. 在直角坐标系中，求与点 $M(a, b)$ 对称的点的坐标：(1) 对称于 x 軸；(2) 对称于 y 軸；(3) 对称于原点。
7. 試用初等平面几何証明：(1) 点 $M(a, b)$ 与点 $N(b, a)$ 对称于第一三象限的分角綫；(2) 点 $M(a, b)$ 与点 $P(-b, -a)$ 对称于第二四象限的分角綫。

8. 依照前两题中对称点的坐标关系, 作出点(5,3)的五个对称点, 写出它们的坐标。

9. 作出下列三点关于两坐标轴及原点的对称点, 并依次联成折线:

$$A(3,0), B(3,5,2), C(7,6)。$$

10. 作出下列五点关于第一三象限分角线的对称点, 写出它们的坐标:

$$A(-2, \frac{1}{4}), B(-1, \frac{1}{2}), C(0,1), D(1,2), E(2,4)。$$

把上面五点与它们的对称点分别依次联成平滑的两条曲线, 看这两曲线有何对称关系。

11. 将公式(I)中的 x_2 与 x_1 交换, y_2 与 y_1 交换, 这样所求得的结果是否改变? 何故?

12. 将公式(II)中的 x_2 与 x_1 交换, y_2 与 y_1 交换, 这样求得的分点位置有何改变?

13. 求以 $A(3,3), B(-3,4), C(-4,-3)$ 为顶点的三角形各边的长。

14. 求以 $A(3,0), B(5,2), C(7,6)$ 为顶点的三角形的周界。

15. 证明下列四点在以原点为中心的圆上:

$$A(3,2), B(1,2\sqrt{3}), C(-2,3), D(-2\sqrt{2}, -\sqrt{5})。$$

16. 三角形两边中点的连线, 其长等于第三边的一半。试就第10题中的三角形, 计算每两中点的连线长而证明之。

17. 试根据第6,7题中两点对称时的坐标关系, 作出第11题中三角形各顶点的对称点, 由此作出各对称三角形(有五个对称三角形)。

18. 求以 $A(-2,1), B(2,-1), C(4,3)$ 为顶点的三角形的重心。

19. 试求在 x 轴上而与点(3,4)的距离为5的点。

20. 设一线段的中点为(2,1), 已知一 endpoint 为(-1,2), 问另一 endpoint 为何?

21. 由点 $A(-3,1)$ 经点 $B(1,-1)$ 引线段到点 C , 如果 $AC=3 \cdot AB$, 试求 C 点的坐标。

第二章 曲线和方程

§2.1 曲线的方程

在前一章里, 我们根据点的坐标概念, 借助于代数上的数, 解决一些几何上的特殊问题。在这一章里要说明曲线和方程的关系; 应用这种关系, 借助于代数上的方程, 可以解决几何上较一般

的問題(如曲線的形狀、位置和性質等)。

要在曲線和方程之間建立關係，其基本關鍵在於：把幾何上的曲線看作是一個動點的幾何軌跡。動點 M 按照一定的規律(即軌跡的幾何條件)移動，當我們適當選取坐標軸以後，令 M 的坐標為 (x, y) ，此種坐標稱為流動坐標，依照所給幾何條件，即可列出方程。

例如一動點 M 與一定點 C 的距離保持一個不變的常數 R ，則 M 點的軌跡是以 C 為圓心、以 R 為半徑的圓。在選定坐標軸以後，它們的坐標各為 (x, y) 與 (a, b) ，如圖2.1。當 M 移動時 x 與 y 之間有一種關係來聯繫它們，這種關係就是在 M 點移動時所遵守的幾何條件。把這條件用代數式表達出來，就成為一個方程，稱為曲線的方程。

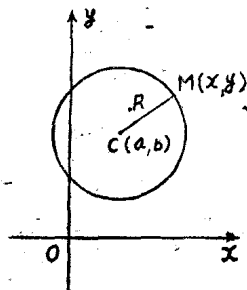


圖 2.1

在曲線方程里一般含有兩個變量 x 與 y (在特殊情況下可能只含一個變量 x 或 y)，成為代數上的一個二元方程。這方程既然稱為曲線的方程，就必須要能很確實地代表這個曲線。因此，必須要達到下面的兩條：

- (1) 曲線上任何點的坐標都滿足這方程；
- (2) 曲線外任何點的坐標都不滿足這方程。

下面舉幾個例子：

例1. 求以點 $C(a, b)$ 為圓心， R 為半徑的圓的方程。

〔解〕 首先按照題意作出坐標軸及點 $C(a, b)$ ，並設 $M(x, y)$ 是圓上的任意一點(圖2.1)。

其次要用點的坐標來表達題中的幾何條件。根據前章中公式(II)，距離 d 是：

$$CM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2};$$

再依題意

$$CM = R,$$

由上兩式，立得 $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$ 。

這就是所求的圓的方程，因為顯然圓上任何點的坐標都滿足

这方程；圆外任何点的坐标必有 $CM > R$ ，圆里面任何点的坐标必有 $CM < R$ ，即曲线外任何点的坐标都不满足这方程。最后应当把方程有理化，写成

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (1)$$

方程(1)称为圆的标准方程。

如果 $a=b=0$ ，则得圆心在原点半径为 R 的圆的方程：

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (2)$$

例2. 设一动点到点 $A(2, 0)$ 的距离恒是到点 $B(8, 0)$ 的距离的一半，试求这动点的轨迹。

〔解〕 作出坐标轴及 A, B 两点，并设 $M(x, y)$ 是轨迹上任意一点。

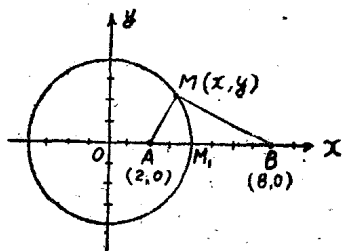


图 2.2

题中的几何条件是 $AM = \frac{1}{2}BM$ ，即

$$2AM = BM. \quad (1)$$

但 $AM = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$,

$$BM = \sqrt{(x-8)^2 + y^2};$$

将 AM 与 BM 的等值代入(1)，

即得 $2\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-8)^2 + y^2}. \quad (2)$

因 M 是轨迹上任意一点，所以轨迹上任何点的坐标都满足方程(2)，而轨迹外任何点的坐标都不能满足它，因此这个方程就是我们所求的。最后我们把这方程有理化，为此把(2)的两边各平方，去括弧，得

$$4x^2 - 16x + 16 + 4y^2 = x^2 - 16x + 64 + y^2,$$

即 $x^2 + y^2 = 16. \quad (3)$

与例 1 中的(2)式比较，知道所求轨迹为一圆，它的圆心在原点，半径为 4，如图 2.2。

根据方程(3)容易验证：已知点是否在轨迹上，譬如 $M_1(4, 0)$ 满足这方程($4^2 + 0^2 = 16$)，所以点 M_1 在轨迹上。事实上 $AM_1 = 2$ ，