高等医药院校試用教材

# 高等数学

唐子东 主編

人民卫生出版社

高等医药院校試用教材

供药学專业用

# 高等数学

唐子东 主编

祝紹琪 黃志宏 編写

孙光远 評閱

人民衛生出版社

一九六二年·北京

高 等 数 学

开本：850×1168/32　　印张：8 14/16　　字数：240千字

唐 子 东 主 編

人 民 卫 生 出 版 社 出 版
（北京書刊出版業营業許可証出字第〇四六号）
·北京崇文区𥳑子胡同三十六号·

北 京 市 印 刷 一 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

統一书号：14048·2038
定　　价：0.95元

1959年10月第1版—第1次印刷
1962年5月第1版—第5次印刷
印　　数：17,501—26,500

# 目　錄

## 第一章　平面直角坐标



## 第二章　曲綫和方程



## 第三章　直綫



## 第四章　二次曲綫



## 第五章　空間解析几何概念

## 第十四章 微分方程概念



## 第十五章 多元函数



## 第十六章 誤差理論与最小二乘法



(标有星号*各节可以略去，或由同学自己閱讀)

# 第一章　平面直角坐标

从第一章到第五章讲解析几何。通常所謂解析几何，是指以坐标为媒介、用解析方法来研究几何图形的数学。它把所有的几何問題都用解析方法来处理；所用的工具主要是代数。初等几何里虽然也用到代数，但沒有用到全部几何上去；有些几何問題，几乎与代数完全沒有关系。要想用解析方法处理全部几何問題，就必須引入坐标的概念才能实現。

数学中最基本的概念是数；几何中最基本的概念是点的位置，也就是量。要用解析方法研究几何，必須首先建立数与点的关系，换句話說，就是要用数来表示点的位置。把这关系建立之后，才能用解析方法处理全部几何問題。所以我們首先研究如何用数来表示点的位置。

凡能确定点的位置的数，称为这个点的坐标；而用来規定坐标的方法，称为坐标法。因为有各种不同的方法，也就有各种不同的坐标系。

## §1.1　直綫上点的坐标

为了用数来确定直綫上任一点$M$的位置，我們首先在直綫上任取一定点$O$（称为原点），再选一綫段$OP$作为单位长；由$O$至$M$的距离，可用单位长的倍数表示。但是，在直綫上与$O$等距离的点有兩个，如图1.1中的$M$与$M_1$。为了达到一数只表一点的目的，就把$O$点兩側用数学上的正負号来加以区分。习惯上把$O$点右边定为正值，左边定为負值，并用箭头如图中$Ox$表示正向的意思。

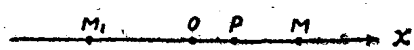



图1.1

象这样有一定方向的直綫，称为有向直綫。設想一动点由原点$O$出发，按一定方向連續移动，到达終点$M$，若移动方向与$Ox$相同，則$OM$綫段的数值为正；若移动方向与$Ox$相

反，如 $OM_1$，則其値为負。今設 $OM$ 的长是单位长 $OP$ 的 $a$ 倍，則

$$OM=a,\quad OM_1=-OM=-a;$$

$a$ 与 $-a$ 分别称为 $M$ 点与 $M_1$ 点的坐标，并用記号 $M(a)$ 与 $M_1(-a)$ 表示，而直綫 $Ox$ 則称为坐标軸。

例如，图 1.2 中 $A$，$B, C, D$ 各点的坐标是：

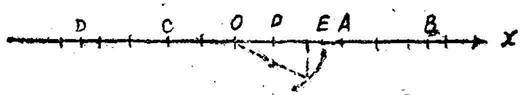


图 1.2

$A(3), B(5\frac{1}{2}), C(-2), D(-4\frac{1}{2})$，原点的坐标是 $O(0)$。

如果坐标値是无理数，例如 $\sqrt{5}$，我們可用几何作图法正确地作出該点的位置，在图 1.2 中点 $E$ 的坐标是 $(\sqrt{5})$。

由上易知：直綫上任意一点，必有一个数[1] 与它对应，反之亦然。因此，直綫上的一点和一个数是一一相互对应。

## §1.2 平面上点的坐标

为了用数来确定平面上任一点的位置，我們在平面上任取兩直綫，并且为简便計，使这兩直綫互相垂直。习惯上用 $Ox$ 表水平綫，用 $Oy$ 表鉛垂綫，并規定它們的正向如图 1.3 中箭头所指。这兩直綫称为坐标軸；$Ox$ 称为横軸或 $x$ 軸，$Oy$ 称为縱軸或 $y$ 軸；兩軸的交点 $O$ 称为原点。所有这些总称为直角坐标系，又称笛卡儿坐标系。

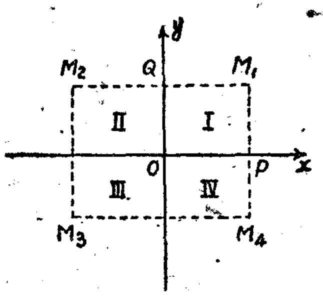


图 1.3

設 $M_1$ 为平面上一点，过 $M_1$ 分别作垂直于坐标軸的直綫，而和它們交于 $P$ 及 $Q$ 兩点。用有向綫段 $OP$ 与 $OQ$ 的长及其方向，完全确定了 $M_1$ 的位置。

用某一长度单位度量 $OP$ 和 $OQ$，設所得的数分别是 $x$ 和 $y$；

① 仅指实数，以后同此。

则 $x$ 与 $y$ 称为 $M_1$ 点的坐标，前者称为横坐标，后者称为纵坐标，并用記号 $M_1(x, y)$ 表示。

兩坐标軸把平面分为四部分，称为象限。从右上方的象限开始，依反时針方向順次称为第一，二，三，四象限。

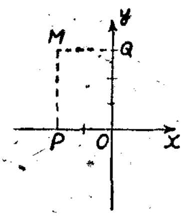
各象限內的点（如图中 $M_1$，$M_2$，$M_3$，$M_4$）的坐标符号如下表：

| | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | + | − | − | + |
| $y$ | + | + | − | − |

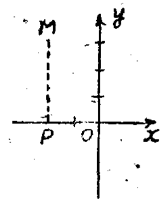
从上面看来，平面上凡有一点，就确定一对数 $x$ 与 $y$；反之凡有一对数 $x$ 与 $y$，也确定平面上一点。因此，平面上的点与一对数是一一相互对应。

今后，我們若說已知一点，就是已知它的坐标；若說求一点，就是求这点的坐标。

从图 1.3 易知 $OP=QM_1$，$OQ=PM_1$，因此作出平面上一已知点的方法有兩种，例如，求作点 $M(-2,3)$。我們可在 $Ox$ 軸上取 $OP=-2$，在 $Oy$ 軸上取 $OQ=3$。过 $P$ 与 $Q$ 作軸的平行綫相交于 $M$，$M$ 就是所求的点〔图 1.4（甲）〕。或者在 $Ox$ 軸上取 $OP=-2$，从 $P$ 点向上作 $Oy$ 軸的平行綫段 $PM=3$，則此綫段的終点 $M$ 就是所求的点〔图 1.4（乙）〕。



（甲）



（乙）

图 1.4

## §1.3 坐标軸的平移

設平面上有原点不同而軸的方向相同的兩坐标系 $xOy$ 和 $x'O'y'$。可以設想把坐标系 $xOy$ 平移而得到坐标系 $x'O'y'$，因此称前者为旧系，后者为新系。$O'$ 对旧系的坐标設为 $(h, k)$，平面上

任一点$M$对旧系的坐标为$(x, y)$，对新系的坐标为$(x', y')$，現在来研究坐标$(x, y)$和坐标$(x', y')$的关系(图 1.5)。

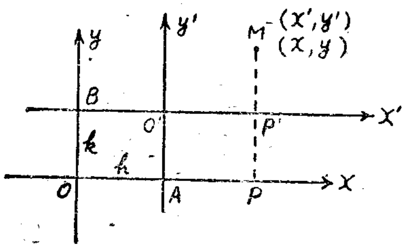


图 1.5

作綫段$PM \perp Ox$軸，交新軸于$P'$，易知:

$x = OP = OA + AP = h + x'$,

$y = PM = PP' + P'M = k + y'$。

所以在坐标軸的平移下，我們得到用新系的坐标表旧系的坐标的公式是:

$$\begin{cases} x = x' + h, \\ y = y' + k。\end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

由(I)式移項，便得用旧系坐标表新系坐标的公式:

$$\begin{cases} x' = x - h, \\ y' = y - k。\end{cases} \qquad (\mathrm{I'})$$

〔注意〕推演公式(I)时，是假定 $h$，$k$ 均为正数，如果其中的一个或兩个为負数，上公式仍正确，讀者可自証之。

## §1.4 兩点的距离

应用坐标法解决几何上的問題，我們首先講一种比較簡单而且今后时常会遇到的，就是求兩已知点間的距离問題。

求兩已知点$M_1(x_1 y_1)$与$M_2(x_2 y_2)$的距离。

从$M_1$，$M_2$各作$Ox$軸的垂綫$M_1P_1$与$M_2P_2$并作$M_1R \perp M_2P_2$(图 1.6)。

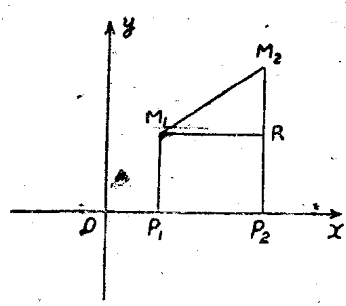


图 1.6

因为 $M_1M_2R$ 是直角三角形，所以根据商高定理，得:

$M_1M_2 = \sqrt{M_1R^2 + RM_2^2}$。 (1)

我們知道 $M_1R=P_1P_2=OP_2-OP_1=x_2-x_1$， (2)

$$RM_2=P_2M_2-P_2R=y_2-y_1。 \quad (3)$$

把(2)，(3)的关系代入(1)，并以 $d$ 代 $M_1M_2$，即得

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}。 \quad (\text{II})$$

这是求兩点距离的公式。

〔注意〕推演公式(I)时，系假定 $M_1$，$M_2$ 兩点都在第一象限，如果在其他象限，公式(I)仍正确，讀者可自証之。

在特殊情形，任意一点 $M(x, y)$ 与原点 $O(0, 0)$ 的距离，是

$$OM=\sqrt{x^2+y^2}。 \quad (\text{II}')$$

例：試求点 $A(-2, 3)$ 与点 $B(5, 4)$ 間的距离。

〔解〕 把 $A$ 点看作 $M_1$，把 $B$ 点看作 $M_2$，根据公式(II)，

得 $$d=\sqrt{[5-(-2)]^2+(4-3)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}。$$

## §1.5 綫段的定比分点

已知綫段的端点是 $M_1(x_1\ y_1)$ 与 $M_2(x_2\ y_2)$，試在 $M_1M_2$ 上求一点 $M(x, y)$。

使 $$\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda。$$

过 $M_1$，$M_2$ 及 $M$ 各作 $x$ 軸的垂綫(图 1.7)，由几何中的定理(兩直綫被几条平行綫所截，其对应綫段成比例)。可得

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda， \quad (1)$$

但 $P_1P=x-x_1$，

$PP_2=x_2-x$。

把这关系代入(1)，

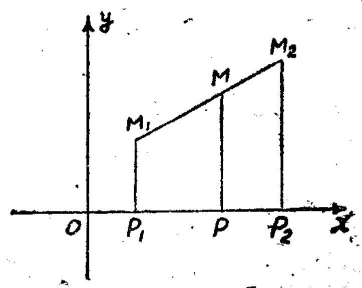



图 1.7

得 $$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda \text{ 或 } x-x_1=\lambda(x_2-x),$$

即 $$x(1+\lambda)=x_1+\lambda x_2。$$

所以 $$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}。$$

若由 $M_1, M_2$ 及 $M$ 各作 $y$ 軸的垂綫，同理可得

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}。$$

因此，用定比 $\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}$ 分割綫段 $M_1M_2$ 的分点 $M$ 的坐标，可用下列公式求出：

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\\ y&=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}。\end{aligned}\right\} \tag{Ⅲ}$$

〔注意〕 推演公式(Ⅲ)时，系假定 $M_1$ 与 $M_2$ 全在第一象限，但不难証明若兩点中的一个或兩个在其他象限內时，公式(Ⅲ)仍正确。

在特殊情形，$M$ 是綫段 $M_1M_2$ 的中点时，$M_1M=MM_2$ 此时 $\lambda=1$，公式(Ⅲ)簡化为

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{x_1+x_2}{2},\\ \bar{y}&=\frac{y_1+y_2}{2},\end{aligned}\right\} \tag{Ⅲ'}$$

式中 $\bar{x}$ 与 $\bar{y}$ 代表 $M_1M_2$ 綫段中点的坐标。

因此，一已知綫段中点的坐标等于其兩端点对应坐标的算术平均值。

例：求頂点为 $A(3,3)$，$B(-2,1)$，$C(2,-4)$ 的三角形的重心 $G$。

〔解〕 根据平面几何中的定理：三角形的重心是三条中綫的

交点；并且这一点和各边中点的距离等于該中綫长的三分之一。所以解这問題只要任取一条中綫如图 1.8 中的 $AD$，把 $AD$ 分成兩段，使这兩段的比为 1:2，則这个分点就是所求的重心 $G$。

这里第一步应当求出 $D$ 点的坐标，根据上面公式(Ⅲ′)，$D$ 点的坐标是：

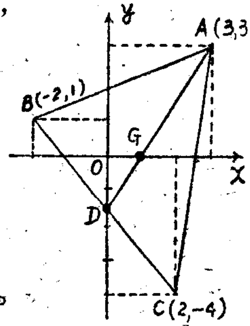


图 1.8

$$\bar{x}=\frac{-2+2}{2}=0,$$

$$\bar{y}=\frac{1-4}{2}=-1\frac{1}{2}。$$

第二步求 $AD$ 綫段的定比分点 $G$。

这里 $\lambda=\frac{DG}{GA}=\frac{1}{2}$，根据公式(Ⅲ)，

$$x=\frac{0+\frac{1}{2}\cdot 3}{1+\frac{1}{2}}=1,\quad y=\frac{-1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 3}{1+\frac{1}{2}}=0。$$

所求重心 $G$ 的坐标是 $(1, 0)$。从图 1.8 可以看出 $G$ 的位置与計算結果符合。

## 习 題 一

1. 什么叫做点的坐标？直綫上和平面上的坐标法各是怎样的？

2. 平行于横軸的直綫上的各点，其坐标怎样？平行于縱軸的直綫上各点的坐标怎样？

3. 在直綫上取点 $O$ 和 $P$，使它們的距离为 1 厘米，作出以下各点：
$A(4)$，$B(-1)$，$C(6\frac{1}{2})$，$D(-\sqrt{29})$，$E(\sqrt{7})$。

4. 在直角坐标中，取适宜的綫段长为单位，作出以下各点：
$A(2,3)$，$B(-4,1)$，$C(2,-3)$，$D(-2,-2)$，$E(-5,0)$，$F(0,2)$。

5. 某地日間最高温度是 10°C，次晨最低温度是 −6°C，試用直綫上坐标法表出这兩温度，并計算其温度差。

6. 在直角坐标系中，求与点 $M(a, b)$ 对称的点的坐标：(1)对称于 $x$ 軸；(2)对称于 $y$ 軸；(3)对称于原点。

7. 試用初等平面几何証明：(1)点 $M(a,b)$ 与点 $N(b,a)$ 对称于第一三象限的分角綫；(2)点 $M(a,b)$ 与点 $P(-b,-a)$ 对称于第二四象限的分角綫。

8.依照前兩題中对称点的坐标关系，作出点(5,3)的五个对称点，写出它們的坐标。

9.作出下列三点关于兩坐标軸及原点的对称点，并依次联成折綫：

$$A(3,0),B(3,5,2),C(7,6)。$$

10.作出下列五点关于第一三象限分角綫的对称点，写出它們的坐标：

$$A(-2,\tfrac{1}{4}),B(-1,\tfrac{1}{2}),C(0,1),D(1,2),E(2,4)。$$

把上面五点与它們的对称点分别依次联成平滑的兩条曲綫，看这兩曲綫有何对称关系。

11.將公式(Ⅱ)中的 $x_2$ 与 $x_1$ 交换，$y_2$ 与 $y_1$ 交换，这样所求得的結果是否改变？何故？

12.將公式(Ⅲ)中的 $x_2$ 与 $x_1$ 交换，$y_2$ 与 $y_1$ 交换，这样求得的分点位置有何改变？

13.求以 $A(3,3)$，$B(-3,4)$，$C(-4,-3)$ 为頂点的三角形各边的长。

14.求以 $A(3,0)$，$B(5,2)$，$C(7,6)$ 为頂点的三角形的周界。

15.証明下列四点在以原点为中心的圓上：

$$A(3,2),B(1,2\sqrt{3}),C(-2,3),D(-2\sqrt{2},-\sqrt{5})。$$

16.三角形兩边中点的連綫，其长等于第三边的一半。試就第 10 題中的三角形，計算每兩中点的連綫长而証明之。

17.試根据第 6,7 題中兩点对称时的坐标关系，作出第 11 題中三角形各頂点的对称点，由此作出各对称三角形(有五个对称三角形)。

18.求以 $A(-2,1)$，$B(2,-1)$，$C(4,3)$ 为頂点的三角形的重心。

19.試求在 $x$ 軸上而与点(3,4)的距离为 5 的点。

20.設一綫段的中点为(2,1)，已知一端点为(-1,2)，問另一端点为何？

21.由点 $A(-3,1)$ 經点 $B(1,-1)$ 引綫段到点 $C$，如果 $AC=3\cdot AB$，試求 $C$ 点的坐标。

# 第二章　曲綫和方程

## §2.1　曲綫的方程

在前一章里，我們根据点的坐标概念，借助于代数上的数，解决一些几何上的特殊問題。在这一章里要說明曲綫和方程的关系；应用这种关系，借助于代数上的方程，可以解决几何上較一般

的問題(如曲綫的形状、位置和性質等)。

要在曲綫和方程之間建立关系，其基本关鍵在于：把几何上的曲綫看作是一个动点的几何軌迹。动点$M$按照一定的規律（即軌迹的几何条件）移动，当我們适当选取坐标軸以后，令$M$的坐标为$(x,y)$，此种坐标称为流动坐标，依照所給几何条件，即可列出方程。

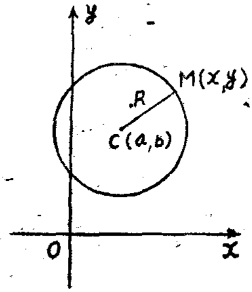


图 2.1

例如一动点$M$与一定点$C$的距离保持一个不变的常数$R$，則$M$点的軌迹是以$C$为圓心、以$R$为半徑的圓。在选定坐标軸以后，它們的坐标各为$(x,y)$与$(a,b)$，如图2.1。当$M$移动时$x$与$y$之間有一种关系来联系它們，这种关系就是在$M$点移动时所遵守的几何条件。把这条件用代数式表达出来，就成为一个方程，称为曲綫的方程。

在曲綫方程里一般含有兩个变量$x$与$y$（在特殊情况下可能只含一个变量$x$或$y$），成为代数上的一个二元方程。这方程既然称为曲綫的方程，就必須要能很确实地代表这个曲綫。因此，必須要达到下面的兩条：

(1)曲綫上任何点的坐标都滿足这方程；

(2)曲綫外任何点的坐标都不滿足这方程。

下面举几个例子：

例1. 求以点$C(a,b)$为圓心，$R$为半徑的圓的方程。

〔解〕 首先按照題意作出坐标軸及点$C(a,b)$，并設$M(x,y)$是圓上的任意一点(图2.1)。

其次要用点的坐标来表达題中的几何条件。根据前章中公式(Ⅱ)，距离$d$是：

$$CM=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2};$$

再依題意
$$CM=R,$$

由上兩式，立得
$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R。$$

这就是所求的圓的方程，因为显然圓上任何点的坐标都滿足

这方程；圆外任何点的坐标必有 $CM>R$，圓里面任何点的坐标必有 $CM<R$，即曲綫外任何点的坐标都不滿足这方程。最后应当把方程有理化，写成

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2。\tag{1}$$

方程(1)称为圓的标准方程。

如果 $a=b=0$，則得圓心在原点半徑为 $R$ 的圓的方程：

$$x^2+y^2=R^2。\tag{2}$$

例2. 設一动点到点 $A(2,0)$ 的距离恒是到点 $B(8,0)$ 的距离的一半，試求这动点的軌迹。

〔解〕 作出坐标軸及 $A$，$B$ 两点，并設 $M(x,y)$ 是軌迹上任意一点。

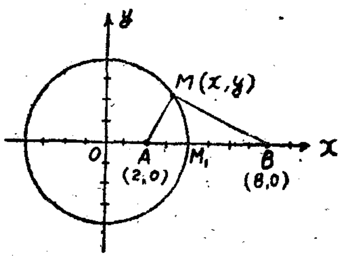


图 2.2

題中的几何条件是 $AM=\frac{1}{2}BM$，

即

$$2AM=BM。\tag{1}$$

但 $AM=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，

$BM=\sqrt{(x-8)^2+y^2}$；

将 $AM$ 与 $BM$ 的等值代入(1)，

即得 $$2\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{(x-8)^2+y^2}。\tag{2}$$

因 $M$ 是軌迹上任意一点，所以軌迹上任何点的坐标都滿足方程(2)，而軌迹外任何点的坐标都不能滿足它，因此这个方程就是我們所求的。最后我們把这方程有理化。为此把(2)的两边各平方，去括弧，得

$$4x^2-16x+16+4y^2=x^2-16x+64+y^2，$$

即 $$x^2+y^2=16。\tag{3}$$

与例1中的(2)式比較，知道所求軌迹为一圓，它的圓心在原点，半徑为4，如图2.2。

根据方程(3)容易驗証：已知点是否在軌迹上，譬如 $M_1(4,0)$ 滿足这方程($4^2+0^2=16$)，所以点 $M_1$ 在軌迹上。事实上 $AM_1=2$，