驗算和速算法

林　瑛編

湖北人民出版社

內容提要

本書主要內容包括驗算、速算和近似值計算三部分。从理論和方法上比較全面地介紹在日常計算中如何簡化數字、提高效率，檢驗結果、保証質量，并于附录中介紹了常用的單位、数值和計算公式。適合初中以上水平的讀者、統計人員及一般工程技术人員参考。

驗算和速算法

林 瑛編

•

湖北人民出版社出版（武漢解放大道3…

武漢市書刊出版業營業許可証新出字第1號

新華書店武漢發行所發行

公私合營精華鑄字印刷廠印刷

•

787×1092毫米 $\frac{1}{32}$ 開 · 2 $\frac{3}{8}$ 印張 · 55,000字

1957年9月第 1 版

1957年9月第1次印刷

印數：1—6,400

統一書號：7106·39

定　價：(5)0.17元

前　言

不論是在学习、工作或日常生活中，我們都会經常碰到許許多多的計算問題，在計算过程中，沒有一个人不希望計算愈快愈好，并要求得到很准确的結果。然而怎样才能做到又快又准呢？这本小册子就是为了这个目的而編写的。譬如在"速算"和"近似值計算"两章中，告訴大家如何简化計算；"驗算"一章中，介紹了一些檢查計算結果的方法；最后的附录，也是为了如何簡化計算，減少因公式、单位等被遺忘所引起的繁劳而列入的。掌握并且熟練了这些方法，虽然不等于不再遭遇計算上的困难，发生計算上的錯誤，但确实可以大大提高我們的計算質量和計算效率。

这本小册子适合初中水平的讀者。每介紹一种方法，都附有它的証明。但如代数还沒有学过，閱讀公式、証明是有困难的，可专門看一些說明和例子，还是可以掌握并熟練書中所介紹的各种方法。

这本小册子一定有很多欠妥甚至錯誤的地方，欢迎各方面批評和指正。

1957年5月，編者

目 录

第一章 驗算（檢誤法）

第一节 驗算有哪些方法，計算应注意哪些原則

什么叫驗算呢？顧名思义，驗算是一种檢查計算結果正确与否的方法。檢查計算結果正确与否，在实际工作中运用的方法是很多的，例如有人把数字重算一遍，有人采用还原法或反运算法。但是这些法子都比較机械，費时費力。这里专門介紹几种比較簡便的利用数学原理和数字特点的驗誤方法。

这样的方法很多，如横和弃九法、沙利尔法、奇偶数法和位数法等都是。其中以奇偶数法、位数法最为簡便，但很不精确；沙利尔法最为可靠，但处理繁杂，而且应用范圍很狹小，一般說来，只有在統計上計算高級离中差的时候才采用；横和弃九法介乎二者之間，在一定程度上兼有二者之长，且富有趣味。所以我們准备以它为重点，分别把上述几种方法都介紹一下。

应該注意，不論是横和弃九法或是其他几种驗誤方法，其驗誤的可靠性都是相对的；而且只能檢查錯誤，不能在檢查的同时改正錯誤，因此，发現錯誤后还必須重新計算，这在人力上和时間上都是一种損失。所以說，驗算是消极的，是事后的檢查、核对措施，而积极有效的办法則应是事先的防止錯誤、避免錯誤。然而怎样才能防止和避免錯誤呢？除了在計算过程中聚精会神之外，还应該注意下列几件事情：

（一）尽量把数字写清楚些。引起計算錯誤的因素虽然是

多方面的，但很大部分錯誤是由于数字書写不清楚、对位不整齐或者是将数字写錯所造成的。这种現象最容易发生在多位数相乘的时候。如果我們能在这方面注意些，虽然不等于就能够杜絕錯誤，但却可以在很大程度上避免錯誤。将数字写清楚些与計算速度是沒有矛盾的，問題在于每个人的計算习慣不同罢了。

（二）养成三位一組計算的习慣。多位数計算最容易发生位数对錯的現象，万位对千位，千位对百位等，諸如此类。避免的方法是采取三位分組計算，如下例。这不仅可以避免位数上的混乱，有助于心算的进行；而且还可以和三位分組的記数习慣結合起来。

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & 867 & 432 & 780 \\
 & & 108 & 204 & 742 \\
 & & 6 & 400 & 642 \\
 & 1 & 324 & 406 & 300 \\
+) & & 5 & 782 & 186 \\
\hline
 & 2 & 312 & 226 & 650
\end{array}
$$

（三）多位数相加减，最好是采用分組計算法。这特别适用于珠算和計算机上，因为珠算的記数和运算动作是同时进行的，位数对錯的情况更容易发生；計算机所能容納的位数有一定限制，位数超过限额，就无法直接求出它的結果，这时候，如果采用分組計算法，是最适合也沒有的了。例如：

$$
\begin{array}{rrrr}
 & & 43857 & 46328 \\
 & & 31864 & 35271 \\
 & & 43743 & 18243 \\
 & & 2865 & 43187 \\
 & & 3458 & 62413 \\
+) & & 6374 & 53897 \\
\hline
 & & \leftarrow\boxed{2} & 59339 \\
+) & 1 & 32161 & \\
\hline
 & 1 & 32163 & 59339
\end{array}
$$

所以 4385746328＋3186435271＋……＋637453897

$=18216359339$。

(四) "0"数甚多时，为了防止位数差錯，作乘、除演算时最好暂不計入，記数也最好用指数形式表示。如876000000写成876×10^6，0.000000286写成286×10^{-9}。

例1：　876000000×12应化成$876\times12\times10^6$以后再行演算。即：　$876\times12\times10^6=10512\times10^6$，

$$
\begin{array}{rl}
\text{或} & 876000000 \\
\times) & 12 \\
\hline
 & 1752 \\
 & 876 \\
\hline
 & 10512000000
\end{array}
$$
(即10512×10^6)。

例2：　$0.000000286\times404=286\times404\times10^{-9}$

$=115544\times10^{-9}$

(即0.000115544)。

第二节　弃九法的原理

弃九法是横和弃九法的簡称，又称横和法，一般多称弃九法。它是建基在数字的特点上的。然而，什么是数字的特点呢？又什么是弃九法所利用的数字的特点呢？这是首先必須解决的問題。

数字的特点就是数字的規律性。譬如說，10的n次乘冪等于1后面帶n个0，如$10^5=100000$。又任何一数除以9所得的余数，和該数横加起来(即将該数的各位数字相加)除以9所得的余数始終是相同的。如$\frac{128}{9}=14$余2，而$\frac{1+2+8}{9}=\frac{11}{9}=1$余2；又如$\frac{783}{9}=87$（余0），而$\frac{7+8+3}{9}=\frac{18}{9}=2$（余0）。没有一个数不具有这样一个特点，也就是說没有一个例外情形。

关于10的n次乘幂等于1后而带n个0，已为我們所熟知了；后一种特点却未必为大家所了解，而它正是横和弃九法的依据。現在我們从理論上来証明它。

假設某一个五位数A（任何多位数都可以），其万位数字为a，千位数字为b，百位数字为c，十位数字为d，个位数字为e。根据十进位数字的原則，a.b.c.d.e每一个数字都是0、1、2、3、4、5、6、7、8、9十个数字中的一个。

将A用符号表示，則为：

$$A=10000a+1000b+100c+10d+e,$$

（如$76809=10000\times7+1000\times6+100\times8+10\times0+9$），

$$\therefore\quad \frac{A}{9}=\frac{10000a+1000b+100c+10d+e}{9}$$

$$=\frac{(9999a+999b+99c+9d)+(a+b+c+d+e)}{9}$$

$$=(1111a+111b+11c+d)+\frac{a+b+c+d+e}{9}。$$

由于（$1111a+111b+11c+d$）始終是一个整数，根据和的整除性（初中算术課本曾講过），可知$\frac{A}{9}$卽

$\frac{10000a+1000b+100c+10d+e}{9}$，所得的余数必然是

$\frac{a+b+c+d+e}{9}$所得的余数。

（$10000a+1000b+100c+10d+e$）是五位数A的本身，（$a+b+c+d+e$）是五位数A的"横和"，卽A的各位数字相加起来的总和。它們分别除以9所得的余数相同。由此可以推知，任何一数除以9所得的余数，与該数的横和除以9所得的余数是一致的。

例：求解786438121能否被9除尽，如果不能除尽，其余数为几？

解：根据上述数的特性，可用弃九法来求这数被9除所得的余数。$\frac{7+8+6+4+3+8+1+2+1}{9}=\frac{40}{9}=4$ 余4，这表示786438121不能被9除尽，4就是該数的余数。

因为我們所关心的，是除以9后的余数，不是实际的商数，所以上列計算手續还可以簡化，即从这数的各位数字中，选擇其相加后可以得9的数字(如3与6、4与5、2与3与4等)，直接划去，将剩下的数字相加除以9，所得的余数就是所要求的余数。例如用直接划去法求876135÷9所得的余数，可先将876135各位数字中能相加得9者划去，即$\cancel{8}7\cancel{6}\cancel{1}\cancel{3}5$，剩下7和5，再将这两个数相加起来除以9，即$\frac{7+5}{9}=1$余3，这个“3”就是876135÷9所应得的余数。又如786438121用直接划去法为$\cancel{7}\cancel{8}\cancel{6}4\cancel{3}\cancel{8}\cancel{1}\cancel{2}\cancel{1}$，这里4未被划去，且不滿9，故4就是我們要求的余数。显然，在計算程序上，这比横向相加除以9更为簡捷。讀者可用这个方法試求下列諸数除以9的余数：

① 38642，

② 7356842，

③ 800048621。

現假設某整数N除以9后得商数n，余数为r，则r一定是小于9的整数。倘$r=0$，則表示該数能够被9所整除。故任何整数N都可以用$9n+r$的形式表示出来，即$N=9n+r$。例如$864=9\times96+0$，在这里，$n=96$，$r=0$。又如$8786=9\times976+2$，在这里，$n=976$，$r=2$。

上面这样作法，好象是化簡为繁，要数字游戏，其实不然，它是为了下面的实用目的而准备的。

第三节　弃九法的应用

基本运算有加法、減法、乘法、除法、乘方与开方六种；相应于各种运算的弃九驗誤法也有六种。現在将它的应用方法具体介紹如下，并同时进行理論上的証明。

加法的驗算　某几个数相加，其总和的横和弃九后的余数，与相加各数横和弃九后的余数和，两者的差数一定是 9 的倍数，如果不是 9 的倍数，即表示計算錯了。

用公式表示为：

（被加数之 r + 加数之 r + ……）－总和之 r = 9 的倍数。

上式中 r 为横和弃九后的余数，于本节各論証中所代表的內容是一貫不变的，請特别注意。

上面的公式也許还不够明确，我們先举个例子說明，然后再从理論上来証明它。

例：求驗　$1086+74302+5864=81252$。

被加数　1086 横和弃九后的余数 $r=6$，

加　数 74302 横和弃九后的余数 $r=7$，

加　数　5864 横和弃九后的余数 $r=5$，

总　和 81252 横和弃九后的余数 $r=0$。

据上述公式，得知前三个 r 相加，减去总和之 r，应該是 9 的倍数。

$(6+7+5)-0=18-0=18$，18确为 9 的整倍数，这表示上列計算应該是正确的。反过来，如果不是 9 的倍数，表示計算一定錯了。应該立即找出錯誤根源，并作更正。

上面的例子是符合前面所介紹的驗誤原則的。但可不可能是由于偶然的凑合呢？因此，有必要从理論上找出它的来由。

設有 t 个整数N_1，N_2，N_3，……，N_t 相加，共和为 N_a，

则 $N_1+N_2+N_3+\cdots\cdots N_t=N_a$。

$\because\quad N_1=9n_1+r_1,\qquad N_2=9n_2+r_2,$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\qquad N_t=9n_t+r_t,$

$N_a=9n_a+r_a;$

$\therefore\quad (9n_1+r_1)+(9n_2+r_2)+(9n_3+r_3)+\cdots\cdots(9n_t+r_t)$

$=9n_a+r_a;$

移項得 $(r_1+r_2+r_3+\cdots\cdots+r_t)-r_a$

$=9n_a-(9n_1+9n_2+9n_3+\cdots\cdots+9n_t)$

$=9[n_a-(n_1+n_2+n_3+\cdots\cdots+n_t)]$。

前面我們已經說过，n 都是整数，所以可以肯定上式等号右端括弧內的数值一定是个整数，而且是个正整数(最小等于 0)。因而，由上式可判知 $(r_1+r_2+r_3+\cdots\cdots+r_t)-r_a$ 这个差数一定是 9 的整倍数。

例：求驗 27846+45742+8943+100786=183317是否有計算上的差錯。

証驗：27846+45742+8943+100786=183317，

$r_1=0,\ r_2=4,\ r_3=6,\ r_4=4,\quad r_a=5,$

$(r_1+r_2+r_3+r_4)-r_a=(0+4+6+4)-5=14-5=9$。

因差数为 9 的整倍数，合乎上列驗誤原則，所以我們認为計算上应該是沒有差錯的。

由于我們只是利用数字的特点檢查計算的結果有沒有錯誤，只求各数除以9所得的余数而不必求其商，所以我們还可以将上列計算程序再加以簡化：先求出各数橫和弃九后的余数，利用 a－b＝c 等同于 a－c＝b 的原則，将原式改为 $(r_1+r_2+r_3+\cdots\cdots+r_t)-9$ 的倍数$=r_a$ 的形式，而加以运用。卽将各加数的余数逐一相加，滿 9 后舍去（卽先减去 9 的倍数），观

察其結果是否与总和的余数r_a相等。相等表示計算应該正确，不相等就表示我們的計算結果一定錯了。

例：　$27846+45742+8943+100786=183317$，

各数的余数：$r_1=0$，$r_2=4$，$r_3=6$，$r_4=4$，　$r_a=5$，

各余数逐一相加弃9后的余数：　4　1　5

或：

$$\begin{array}{rrl} & 27846 & r_1=0 \\ & 45742 & r_2=4 \quad 4 \\ & 8943 & r_3=6 \quad 1 \\ +) & 100786 & r_4=4 \quad 5 \\ \hline & 183317 & r_a=5 \leftarrow \end{array}$$

結果与驗誤原則相符，故証明計算上应該沒有差錯。

为了簡化手續，实际計算过程中应該略去r_1，r_2 等字样。

如：$96621+10004+1786428+84320=1977373$，

　6　5　0　8　1

　　2　2　1

或：

$$\begin{array}{rrll} & 96621 & 6 & \\ & 10004 & 5 & 2 \\ & 1786428 & 0 & 2 \\ +) & 84320 & 8 & 1 \\ \hline & 1977373 & 1 \leftarrow & \end{array}$$

求驗① $28642+58206+10028+57=96933$，

② $100042+8028+30001+48=138119$，

③ $637524+314724+147325+387463=1387036$。

减法的驗算　减法是加法的反运算，如 $a+b=c$ 化作减法时則为 $c-a=b$ 或 $c-b=a$。被减数与加法中的总和相对应，减数和差数与加法中的加数和被加数相对应，所以减法的驗誤公式可以由加法的驗誤公式移項而得。即：

被减数的 $r-$（减数的 $r+$差数的 r）$=9$ 的整倍数。

例： 187642 − 72872 = 114770，

被減数的 $r=1$，減数的 $r=8$，差数的 $r=2$，

据前一公式：被減数之 $r-$（減数之 $r+$差数之 r）

$$=1-(8+2)=1-10=-9。$$

（－9）仍为9的整倍数，所以上列計算应該是正确的。否則，就一定要查出它的錯誤根源，并把它改正过来。

如果将上述驗誤公式进行适当的移項，还可以进一步收到簡化手續的效果。如：187642 − 72872 = 114770。

$$\begin{array}{ccc} 1 & 8 & 2 \\ & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{10 \to 1}} \end{array}$$

或

$$\begin{array}{rr|l} & 187642 & 1 \\ -) & 72872 & 8 \\ \hline & 114770 & 2 \end{array} \quad \left.\begin{matrix}8\\2\end{matrix}\right\}10 \quad 1$$

上面仅是檢查单項減法的驗算，下面再举两个檢查多項減法和加、減法混合运算結果的例子。

例1：87264 − 5426 − 7863 − 42607 = 31368。

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 8 & 6 & 1 & 3 \end{array} \qquad 0$$

例2：4827 + 80042 − 7603 − 428 + 57 = 76895。

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 5 & 7 & 5 & 3 & 8 \\ 3 & 5 & & & 3 & 2 \\ \hline & & 7 & 5 & & 8 \end{array} \quad 2$$

上例划横綫一条，被加各数横和弃九后的余数写在横綫上面，被減各数的余数写在横綫下面（差数与減数相当，故也写在横綫下面）。横綫上下的数字分別求总和并弃去9的倍数，如果相等，表示計算应該沒有差錯。如本例，驗算結果均为2，

故相加相减的結果，应該等于 76895。

划一条横綫，似乎还麻煩，更进一步簡化的方法是将横綫上面的数字移到式子的上面，下面的移到式子下面，分別相加弃 9，观察其結果是否相等，以判定計算正确与否。

$$\begin{array}{l} \qquad\cancel{3}\qquad\quad\cancel{5}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cancel{3}\ 2 \\ 4827+80042-7603-428+57=76895 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cancel{7}\qquad\quad\cancel{5}\qquad\qquad\qquad\cancel{8}\ 2 \end{array}$$

試驗証① $87264-4832-9986-48324=24122$，

② $9684302-746830-48246-70004=8819227$，

③ $96425+10001-18702-8000=79724$，

④ $34268-7426-8024+5632=24452$。

乘法的驗算　它的驗誤公式是：

被乘数的 $r\times$ 乘数的 $r-$ 乘积的 $r=9$ 的倍数(或为 0)，

或被乘数的 $r\times$ 乘数的 $r-9$ 的倍数 $=$ 乘积之 r。

証明：　設被乘数 $N_1=9n_1+r_1$，

乘数 $N_2=9n_2+r_2$，

乘积 $N_m=9n_m+r_m$；

$\because\ N_1\cdot N_2=N_m$，　$\therefore (9n_1+r_1)(9n_2+r_2)=9n_m+r_m$；

展开得：$9\cdot 9n_1n_2+9n_1r_2+9n_2r_1+r_1r_2=9n_m+r_m$；

移項得：$r_1r_2-r_m=9n_m-(9\cdot 9n_1n_2+9n_1r_2+9n_2r_1)$

$=9[n_m-(9n_1n_2+n_1r_2+n_2r_1)]$。

由于 n、r 恒为正整数，所以$[n_m-(9n_1n_2+n_1r_2+n_2r_1)]$也一定是个正整数(或为 0)，从而$(r_1r_2-r_m)$为 9 的倍数（或为 0）。

例 1：$7854\times 9728=76403712$，

$r_1=6$，$r_2=8$，$r_m=3$，

$r_1\cdot r_2-r_m=6\times 8-3=48-3=45=5\times 9$；

或 $7854 \times 9728 = 76403712$,

$$\begin{array}{cccc} \underbrace{6 \quad 8}_{48} & & 3 \\ & 3 & \uparrow \end{array}$$

亦或

$$\begin{array}{r l}
7\,8\,5\,4 \cdots\cdots 6 & \multirow{2}{*}{$\big\}48 \quad 3$} \\
\times)\quad 9\,7\,2\,8 \cdots\cdots 8 & \\
\hline
6\,2\,8\,3\,2 & \\
1\,5\,7\,0\,8 & \\
5\,4\,9\,7\,8 & \\
+)\quad 7\,0\,6\,8\,6 & \\
\hline
7\,6\,4\,0\,3\,7\,1\,2 \cdots\cdots 3 & \leftarrow
\end{array}$$

上列計算合乎乘法驗誤公式，所以应該被認为是正确的。

乘数、被乘数横和弃九的余数的相乘积，舍去 9 的倍数，也应該用横和弃九法处理。如 $6 \times 8 = 48$, $4 + 8 = 12$,横和弃九为 3，或直接了当写作 $48 \rightarrow 3$，立即求出它横和弃九的余数。

例 2：求驗 $14028 \times 5625 = 78807500$。

$$\underbrace{6 \qquad 0}_{0} \quad \neq \quad 8$$

0 与 8 不等，表示計算一定錯了。經檢查，发現乘积应为 78907500、78907500之横和弃九的余数正好是 0，这表示它应該是14028与5625相乘的正确得数。

試求驗下列乘积正确与否：

①$826 \times 432 = 356832$,

②$7408 \times 8426 = 62419808$,

③$86 \times 72 \times 894 = 5546247$。

除法的驗算　其驗誤公式为：

除数之 r × 商数之 r + 余数之 r − 被除数之 r = 9 的倍数，

或　除数之 r × 商数之 r + 余数之 r − 9 的倍数 = 被除数之 r。

作除法运算时，其結果如果合乎这一驗誤公式，那么計算应該是正确的。否則，計算一定錯了。

証明：設被除数$N_Q=9n_Q+r_Q$，

除数$N_1=9n_1+r_1$，

商数$N_2=9n_2+r_2$，

余数$N_3=9n_3+r_3$，

应該注意N_3与r_3不同，前者表示二数相除所剩的余数，后者表示該余数横和弃九后的余数。所以r_3是N_3的一部分，两者相差为9的倍数。

如$7836\div186=42$余24，其中$N_3=24$，r_3为24横和弃九的余数，即$r_3=6$。

$\because\quad \dfrac{\text{被除数}-\text{余数}}{\text{除数}}=\text{商数}$，

$\therefore\quad$ 除数×商数＋余数＝被除数；

即 $N_1\times N_2+N_3=N_Q$。

代入 $(9n_1+r_1)(9n_2+r_2)+(9n_3+r_3)=9n_Q+r_Q$；

展开 $9\cdot9n_1n_2+9n_1r_2+9n_2r_1+r_1r_2+9n_3+r_3=9n_Q+r_Q$；

移項 $r_1r_2+r_3-r_Q=9n_Q-(9\cdot9n_1n_2+9n_2r_1+9n_1r_2+9n_3)$

$=9[n_Q-(9n_1n_2+n_2r_1+n_1r_2+n_3)]$。

上式等号右端括弧內的数値始終是一个整数，所以$(r_1r_2+r_3-r_Q)$必然等于9的整数倍数。

即 除数之r×商数之r＋余数之r－被除数之r

＝9的倍数。

例1：驗算 $528676\div1160=455$余876是否正确？

解：本題 $r_Q=7$，$r_1=8$，$r_2=5$，$r_3=3$，

$\therefore\ r_1\cdot r_2+r_3-r_Q=8\times5+3-7=43-7=36$

＝9的倍数。

或　　　$528676 \div \underbrace{1160 = 455}$ 余 876

7　　8　　5　　3

40

4　　1

故知本題所給算式应該是正确的。

例 2：驗算　2641661455 ÷ 63924 = 41325 余 2115。

4　　$\underbrace{6\quad\quad 6}$　　0

36

0　　0

≠

驗算結果不相等，表示計算一定錯了。經檢查，发現余数应为 2155，横和弃九后为 4 。除、商二数的两个r的乘积为36，横和弃九后余 0 ，加上 2155 的余数 4 ，恰好与被除数的余数 4 相等，表示余数 2155是正确的。

求驗下列計算是否正确：

① 95810÷286＝335，

② 2281.343÷811＝2.813，

③ 87643÷924＝94余787，

④ 94628÷3002＝313余104。

乘方的驗算　　乘方是連續的乘法，如 $a\cdot a\cdot a = a^3$，所以乘方的驗誤公式，可以由乘法的驗算公式导出。

$A^n = A\cdot A\cdot A\cdots\cdots A$，

按乘法的驗誤公式，

$(A\dot{z}r \times A\dot{z}r \times A\dot{z}r \times \cdots\cdots \times A\dot{z}r) - A^n\dot{z}r$

＝ 9 的倍数，

即　　$(A\dot{z}r)^n - A^n\dot{z}r =$ 9 的倍数。

例 1：　求驗　$25^4 = 390625$。