

电法勘探用 边界单元法

田宪谟 黄兰珍 著

地质出版社

电 法 勘 探 用

边 界 单 元 法

田 宪 谟 黄 兰 珍 著

地 质 出 版 社

电法勘探用

边界单元法

田宪谟 黄兰珍

责任编辑: 陈军

地质出版社出版发行

(北京和平里)

地质出版社印刷厂印刷

(北京海淀区学院路29号)

新华书店总店科技发行所经销



开本: $850 \times 1168 \frac{1}{32}$ 印张: 5.875 字数: 152000

1990年12月北京第一版 · 1990年12月北京第一次印刷

印数: 1—1050 册 国内定价: 4.20 元

ISBN 7-116-00765-2/P·650

前 言

边界单元法 (Boundary Element Method) 是新发展起来的一种数值计算方法。1978年英国Southampton大学土木工程系科学家C.A.Brebbia在其著作《工程师用的边界单元法》中首次使用了边界元法这个术语^[32]。边界元法问世后,得到了迅速的发展。近年来,随着电子计算机和近代数学理论的发展,边界单元法在工程力学、固体力学、水力学、地质力学等学科领域中获得了越来越多的应用。与有限差分法、有限单元法相比,边界单元法具有一系列的优点,受到了国内外科学工作者的很大重视。我国地球物理学家对这种计算方法进行了深入研究,并取得了较大进展。特别在电法勘探领域中,边界单元法得到了更多的实际应用,并取得了较好的地质效果。

通过用边界单元法解决电法勘探中的一些位场计算问题和处理实际资料,我们认识到该法具有下面一些主要特点:

1. 用边界单元法求解电法中位场的边值问题,可以降低问题的维数。原为三维空间问题可以降为二维问题来处理;原为二维平面问题可以降为一维问题来处理。这样,边界单元法与区域型解法(有限单元法、有限差分法)相比较,前者离散线性方程组的阶数低、原始数据量少、准备工作简便、工作效率高、计算成本低、要求计算机内存量小。对三维问题来说,此法优点更为显著,可实现域型解法难以求解的三维地电体的位场问题。

2. 进行数值处理时,仅对边界剖分,因而对边界的拟合程度高,离散化误差仅来源于边界,从而提高了计算结果的精度,改善了数据处理效果。

3. 边界单元法适合于处理无限域的位场问题。由于该法可以只计算区域内所需要的任意指定点处的位场值,避免了不必要

的计算,节省了计算工作量。

近年来,为了研究复杂条件下电法异常的正演数值计算和反演解释方法,我们运用边界单元法的常数元解法和线性元解法求解了常用电法的一系列位场边值问题。有电阻率法均匀场、线源场和点电源场中二维或三维地电体位场的边值问题;矿体充电法和围岩充电法的二维和三维充电体充电场的边值问题;激发极化法二维、三维体极化体和面极化体极化场的边值问题;电磁法中远源场二维电磁体电磁场的边值问题;并且用解析法和物理实验方法验证了边界单元法数值计算结果的正确、可靠性。实际应用表明,在电测资料处理、解释推断中,边界单元法是一种有效的经济的数值计算方法。

边界元法适于处理和计算地形不平、地下为不规则的多地电体的位场问题。为了便于读者了解边界单元法原理和计算结果的可靠、正确性,书中给出了部分单一的规则地电体位场的算例。该法同样适用于解决引力场、磁场、地温场和弹性波场等地球物理场的边值问题。

本书第一章的第三节、第二章的第一节、第四章的第二节及附录五、六由黄兰珍执笔,其余部分皆由田宪谟编写。何永富副教授和寸树苍助研参加了该课题的部分研究工作。王益民副教授、罗德银工程师提供了部分应用实例和物理模拟资料。在研究工作中,作者得到了傅良魁、李金铭、周熙襄、于汇津、史保连教授的大力支持和帮助,李金铭教授审阅了本书稿,在此谨向他们表示衷心的感谢。

由于笔者水平有限,书中不妥和错误之处,敬请读者批评指正。

田宪谟 黄兰珍

1989年3月于成都

目 录

第一章 电阻率法中位场的边界单元法数值计算	1
§ 1 稳定电流场的基本问题	1
一、位函数所满足的微分方程	1
二、位函数所满足的边界条件	3
§ 2 面电流场二维地电体位场的数值计算	4
一、均匀面电流场二维纯地形视电阻率计算	5
二、均匀面电流场中二维地电体视电阻率计算	16
三、线电流场二维地电体上视电阻率计算	24
§ 3 点源场二维地电体位场的数值计算	28
一、点源场电阻率法二维地形改正	28
二、点源场二维地电体上视电阻率计算	38
§ 4 点源场三维地电体位场的数值计算	51
一、点源场电阻率法三维地形改正	51
二、点源场三维地电体上视电阻率计算	58
§ 5 电阻率测深法正演计算用的边界元法	69
一、水平地层电测深数值计算	69
二、点源场二维电测深数值计算	80
第二章 充电法中充电场的边界单元法数值计算	86
§ 1 二维矿体充电电场计算	86
一、二维充电体的充电场数值计算	86
二、电位与电位梯度的计算	92
§ 2 围岩充电电场计算用的边界单元法	94
一、二维地电体围岩充电场的数值计算	94
二、剩余电位和剩余电位梯度的计算	97
第三章 激发极化法中极化场的边界单元法数值计算	100

§ 1 体极化电场的数值计算	100
一、体极化场位函数所满足的微分方程和边界条件	100
二、点源极化场二维体极化激电体上视极化率的计算	101
三、点源极化场三维体极化体上视极化率的计算	108
§ 2 面极化电场的数值计算	115
一、点源极化场二维面极化体视极化率的计算	115
二、面极化体视极化率的计算	121
第四章 电磁法中电磁场的边界元法数值计算	124
§ 1 平面波场中二维地电体电磁场的数值计算	125
一、H极化平面波场二维地电体电磁场的数值计算	125
二、E极化平面波场二维地电体电磁场的数值计算	130
§ 2 电磁场与视电阻率的计算	137
一、视电阻率的计算	138
二、电磁场与视电阻率计算实例	138
第五章 应用实例	142
§ 1 边界单元法在浙江某金矿电测资料解释中的应用	142
一、矿区地质与岩石、矿石的电学性质	142
二、工作方法与资料处理、解释	142
§ 2 边界单元法在川南煤田地下岩溶与暗河的电测资料解释中的应用	144
一、实际三维地形视电阻率剖面曲线	144
二、已知的白兴洞暗河上联合剖面法观测资料处理与解释	146
三、52线联剖和中梯实测资料处理与解释	149
附录一 基本解	153
附录二 加权剩余表达式	159
附录三 c_i 的计算	161
附录四 总体矩阵方程组	163
附录五 数值积分公式	174
附录六 程序设计	175

第一章 电阻率法中位场的边界 单元法数值计算

边界单元法^①的基本原理是从所研究的边值问题出发, 根据加权剩余法的基本理论, 并利用格林公式导出所讨论的电性连续体的边界积分方程; 然后, 将其离散化, 建立离散方程和线性代数方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{F}$; 最后求解该方程组, 即得到待求位场值。

本章首先给出稳定电流场的边值问题, 进而讨论用边界元法数值求解平面场、点源场中二维、三维地电体上位场的方法与 ρ_s 计算。

§ 1 稳定电流场的基本问题

电阻率法是通过供电电极向地下输入电流强度为 I 的电流, 在地下建立稳定电流场, 通过观测和研究位场的分布规律来解决地质问题的一组电法勘探方法。理论研究的基本任务是求解位场和探讨其分布规律。

一、位函数所满足的微分方程

(一) 点源场中位函数所满足的微分方程

设在电导率为 σ 的无限岩石中, 位于 $A(x_A, y_A, z_A)$ 点有一电流源, 供电极 A 的表面为 S , 经 S 面流入岩石中的电流为 I , 则由电流密度矢量 $\mathbf{j}$ 的散度定义, 有

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{I}{\Delta v}$$

式中 Δv 为电极 A 表面 S 所围成的体积。

① 边界单元法也称为边界元法

而

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{I}{\Delta v} = \begin{cases} \infty & M=A \\ 0 & M \neq A \end{cases}$$

式中M和A是在空间中的两个点，下面我们将把M当作场点，而把A当作源点。

根据狄拉克 δ 函数的定义和性质

$$(i) \quad \delta(M-A) = \delta(x_M - x_A, y_M - y_A, z_M - z_A)$$

$$= \begin{cases} \infty & M=A \\ 0 & M \neq A \end{cases}$$

$$(ii) \quad \int_v f(M) \delta(M-A) dv = f(A) \quad A \in v$$

又因
$$\int_v \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{I}{\Delta v} dv = \begin{cases} I & A \in v \\ 0 & A \notin v \end{cases}$$

则
$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{I}{\Delta v} = I \delta(M-A)$$

于是，由关系式 $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ 和 $\mathbf{E} = -\nabla U$ ，对电流密度矢量 $\mathbf{j}$ 求散度后，便可得点源稳定电场位函数 U 所满足的泊松方程

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla U) = -I \delta(M-A) \quad (1.1.1)$$

当点电流源A位于地表时，根据电位倍加原理，则式(1.1.1)应写成

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla U) = -2I \delta(M-A) \quad (1.1.2)$$

(二) 特殊条件下位函数所满足的微分方程

1. 无源域中位函数

对于无源域，即在所求解的地电断面内无电源（点源或线源）时，位函数 $U(x, y, z)$ 在直角坐标系中满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.1.3)$$

2. 分区均匀的岩石中的位函数

(1) 有源情况

由于所求解域内岩石的电导率 σ 为常量，

故有 $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$ ，所以式 (1.1.2) 在直角坐标系中可以写成

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -2 \frac{I}{\sigma} \delta(M-A) \quad (1.1.4)$$

当电流强度 I 为单位 1 时，则上式应写成

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -2 \frac{1}{\sigma} \delta(M-A) \quad (1.1.5)$$

(2) 无源情况

由于所求解的域内岩石电导率 σ 为常量，并且域内无电源，故 (1.1.2) 式可以简写成

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1.6)$$

(3) 源 A 位于原点

如果点电源 A 位于原点，则式 (1.1.4) 和 (1.1.5) 可分别写成

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -2 \frac{I}{\sigma} \delta(M) \quad (1.1.7)$$

和

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -2 \frac{1}{\sigma} \delta(M)$$

式 (1.1.2) — (1.1.7) 分别为待求的非均匀岩石和分区均匀岩石中位函数 $U(x, y, z)$ 所满足的微分方程。

二、位函数所满足的边界条件

(一) 边界条件

为了求解电法勘探中稳定电流场的位函数，仅有所满足的微分方程还不够，还必须考虑其在所研究区域满足的边界条件。

1. 本质边界条件

位函数 $U(x, y, z)$ 在边界 Γ 上满足

$$U(x, y, z) = \bar{U}(x, y, z) \quad (1.1.8)$$

式中 $\bar{U}(x, y, z)$ 为所研究区域 Ω 边界 Γ 上的已知电位值。

当观测点位于距“源”为无穷远的边界上时，位函数 $U(x,$

y, z) 为零, 即

$$U(x, y, z) = 0 \quad (1.1.8)'$$

2. 自然边界条件:

位函数 $U(x, y, z)$ 在边界 Γ 上满足

$$q(x, y, z) = \bar{q}(x, y, z) \quad (1.1.9)$$

式中 $\bar{q}(x, y, z) = \frac{\partial \bar{U}(x, y, z)}{\partial n}$ 为给定条件下的边界上已知电位导数值, n 为边界 Γ 的外法线方向单位矢量。

当观测点位于地表时, 由于电流密度的法线方向分量为零, 即 $j_n = 0$, 故位函数 $U(x, y, z)$ 满足

$$\bar{q}(x, y, z) = \frac{\partial \bar{U}(x, y, z)}{\partial n} = 0 \quad (1.1.9)'$$

(二) 衔接条件

在电导率分别为 σ_1 和 σ_2 的岩层或岩体交界面上, 具有如下衔接条件。

1. 电流的连续性

根据电流连续性原理, 在岩石或矿体交界面处, 电流密度的法线分量是连续的, 有

$$\sigma_1 \frac{\partial U_1(x, y, z)}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial U_2(x, y, z)}{\partial n} \quad (1.1.10)$$

2. 电位的连续性

根据电位的连续性原理, 在岩石或矿体交界面处, 电位 $U(x, y, z)$ 满足

$$U_1(x, y, z) = U_2(x, y, z) \quad (1.1.11)$$

综上所述, 电阻率法中稳定电流场的基本问题是在给定的边界条件 (1.1.8) — (1.1.11) 下, 求取满足拉普拉斯方程 (1.1.6) 和泊松方程 (1.1.4) 的电位 $U(x, y, z)$ 值。

§ 2 面电流场二维地电体位场的数值计算

电法勘探常用的导电纸、薄水层和二度电阻网络模拟法等都

是研究面电流场的位场分布问题。当用中间梯度法进行观测时，由于供电电极A、B相距很大，且观测点又位于其间的三分之一的区域内，所以中间梯度法视电阻率计算可归结为求解均匀面电流场二维地电体位场的边值问题。

一、均匀面电流场二维纯地形视电阻率计算

在地形起伏不平地区进行中间梯度法观测时，地形将会对观测结果产生严重影响。为提高资料解释的地质效果，应研究纯地形上位场和视电阻率分布，并进行地形改正。

(一) 均匀面电流场二维纯地形位场的数值计算

当 MN 很小时，由视电阻率的微分形式

$$\rho_s = \frac{j_{MN}}{j_0} \rho_{MN} \quad (1.2.1)$$

和欧姆定律的微分公式

$$E_{MN} = j_{MN} \rho_{MN} = \frac{\Delta U_{MN}}{MN} \quad (1.2.2)$$

$$\text{有} \quad \rho_s = \frac{1}{j_0} \cdot \frac{\Delta U_{MN}}{MN} \quad (1.2.3)$$

可见，当电流密度 j_0 和测量电极距 MN 已知时，求解满足如下给定边值问题的电位 U ，便可获得视电阻率 ρ_s 值。

1. 位场的边值问题

给定的地电断面如图 1.2.1 所示。二维地形走向为 y 方向；地下介质的电阻率为 ρ_1 ；均匀场电流密度为 j_0 ；域 Ω 的边界 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ ； MN 为测量电极。

其中任一点 $M(x, z)$ 的电导率 $\sigma(x, z)$ 和电位 $u(x, z)$ 都是二维坐标的函数，位函数精确解 $u_0(x, z)$ 满足

$$\text{控制微分方程} \quad \nabla^2 u_0(x, z) = 0 \quad M \in \Omega \quad (1.2.4)$$

$$\text{本质边界条件} \quad u_0(x, z) = \bar{u}(x, z) \quad M \in \Gamma_2 \quad (1.2.5)$$

$$\text{自然边界条件} \quad q_0(x, z) = \frac{\partial u_0}{\partial n} = \bar{q}(x, z) \quad M \in \Gamma_1 \quad (1.2.6)$$

式中 $\bar{u}$ 和 $\bar{q}$ 分别为定义在边界 Γ_2 和 Γ_1 上的已知函数。

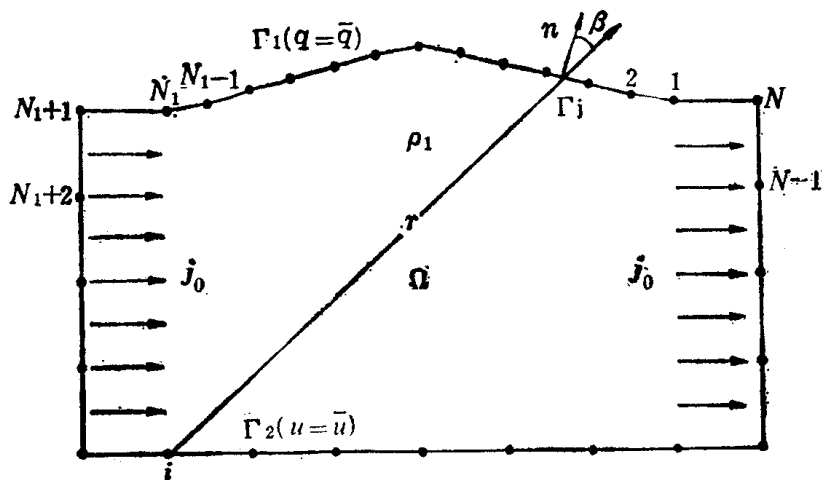


图 1.2.1 均匀电场中纯地形及其域 Ω 边界剖分与赋值

由 (1.1.9)' 式可知地表 Γ_1 上 $\bar{q}=0$ 。根据关系式 $\mathbf{j}_0=\sigma\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{E}=-\frac{\partial u}{\partial x}$ ，可知 Γ_2 上 $\bar{u}=-xj_0\rho_1$ 。

2. 加权剩余方程与边界积分方程

首先运用加权剩余法导出边界积分方程。引入近似解 $u(x, z)$ ，用 $u(x, z)$ 代替 (1.2.4)，(1.2.5) 和 (1.2.6) 式中的 $u_0(x, z)$ ，得

$$\begin{aligned} \epsilon &= \nabla^2 u \neq 0 & M \in \Omega \\ \epsilon_1 &= \bar{q} - q \neq 0 & M \in \Gamma_1 \\ \epsilon_2 &= \bar{u} - u \neq 0 & M \in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

式中 $q = \frac{\partial u}{\partial n}$ ； ϵ 、 ϵ_1 和 ϵ_2 是近似误差函数或称为剩余。

加权剩余法的基本思想是强制分布在区域 Ω 和它的边界 Γ 上的误差函数，在加权平均的意义上等于零〔见附录二〕。引入权函数 u^* 后，可写出该位场问题相应的加权剩余方程

$$\int_{\Omega} \epsilon u^* d\Omega = \int_{\Gamma_1} \epsilon_1 u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \epsilon_2 q^* d\Gamma$$

$$\text{即} \quad \int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \int_{\Gamma_1} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma \quad (1.2.8)$$

选取权函数 u^* 为拉普拉斯方程的基本解, u^* 满足奇异微分方程

$$\nabla^2 u^*(x, z) + \delta(x - x_i, z - z_i) = 0 \quad (1.2.9)$$

其基本解为〔详见附录一的 (1.14) 式〕

$$u^*(x, z) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$$

式中 $r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (z - z_i)^2}$; (x_i, z_i) 是点“ i ”的坐标。

由于该问题待求电位 u_i 点“ i ”属于边界 Γ_1 上, 为建立所需要的边界积分方程, 如图 1.2.2 所示, 以边界点“ i ”为中心, ϵ 为半径作一个圆 S_ϵ 。该圆包含在 Ω 内的部分记为 Ω_ϵ , 这部分的弧记为 l_ϵ ; 区域的边界 Γ 在圆内的部分记为 Γ_ϵ 。于是, 对 (1.2.8) 式左端的面积分相继作两次分部积分, 获得

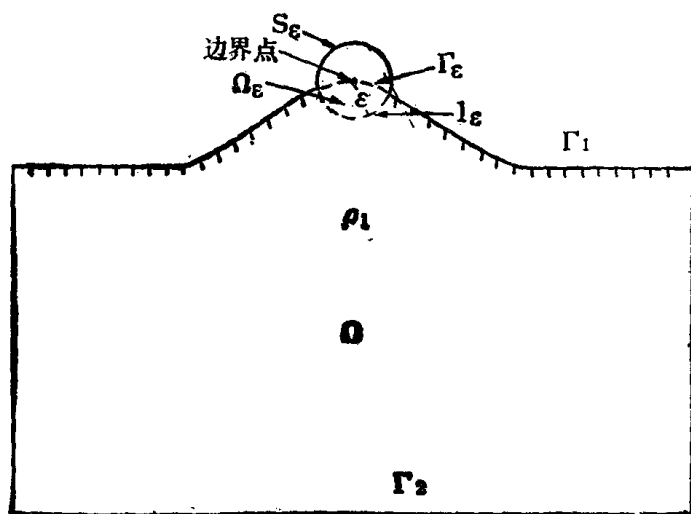


图 1.2.2 以边界点“ i ”为中心的圆 S_ϵ 。

$$\int_{\Omega - \Omega_\epsilon} (\nabla^2 u^*) u d\Omega = - \int_{\Gamma_1 - \Gamma_\epsilon + l_\epsilon} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} q u^* d\Gamma +$$

$$+ \int_{\Gamma_1 - \Gamma_s + l_s} uq^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{u}q^* d\Gamma$$

式中 $q^* = -\frac{\cos(r, n)}{2\pi r}$ 。

由方程 (1.2.9) 和拉克函数性质, 则上式变为

$$\int_{\Gamma_1 - \Gamma_s + l_s} \bar{q}u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} qu^* d\Gamma = \int_{\Gamma_1 - \Gamma_s + l_s} uq^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{u}q^* d\Gamma \quad (1.2.10)$$

其中 $q = \frac{\partial u}{\partial n}$, $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$, n 为边界的外法线方向。设边界 Γ 在 i 点附近是光滑的, 则有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{l_s} \bar{q}u^* d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon} \int_{l_s} \bar{q} d\Gamma = 0$$

因为在 l_s 边界上 $r = -n$, $\frac{\partial u^*}{\partial n} = -\frac{\partial u^*}{\partial r}$, 所以

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{l_s} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{l_s} u d\Gamma = \frac{1}{2}u_i$$

又由于

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_1 - \Gamma_s} \bar{q}u^* d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \bar{q}u^* d\Gamma$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_1 - \Gamma_s} uq^* d\Gamma = \int_{\Gamma_1} uq^* d\Gamma$$

故 (1.2.10) 式成为

$$\frac{1}{2}u_i + \int_{\Gamma_1} uq^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{u}q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \bar{q}u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} qu^* d\Gamma \quad (1.2.11)$$

方程 (1.2.11) 也可写成如下更紧凑的形式

$$\frac{1}{2}u_i + \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma = \int_{\Gamma} \bar{q}u^* d\Gamma \quad (1.2.12)$$

其中 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, 且假设在 Γ_2 上 $u = \bar{u}$, 在 Γ_1 上 $q = \bar{q}$ 。式 (1.2.12) 便是位于光滑边界上点 i 的电位 u 的表示式。当 i 位于角点处, 不

难得到位的如下边界积分方程

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma \quad (1.2.13)$$

式中 c_i 应当用与边界确定的张角成正比的系数表示 [详见附录三

的 (3.4) 或 (3.7) 式], $c_i = \frac{\theta_i}{2\pi}$ 或 $c_i = -\sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij}$.

3. 数值处理

为了利用边界积分方程 (1.2.12) 和 (1.2.13) 数值计算待求电位 u_i 值, 先将边界加以剖分, 把 Γ 划分成 n 个单元, 这些单元称为边界元。如图 1.2.3 所示。假设在各单元上, u 和 q 值取为常数, 且用中结点值表示, 则称常数元 (图 a); 若 u 和 q 值在单元上是线性变化的, 且用端结点值表示, 则称为线性元 (图 b); 边界元还可取曲线段, 如用二次曲线来逼近边界, 这样的单元称为二次元 (图 c)。

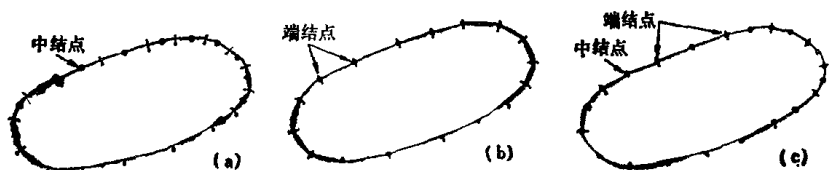


图 1.2.3 边界元的不同类型

(a) 常数元; (b) 线性元; (c) 二次元

本节仅讨论常用的常数元与线性元数值计算的方法技术与算例。

(1) 常数元解法

对于常数元, u 与 q 值按上述假设在各边界单元上为常数, 如图 (1.2.4a) 所示。假设将边界分成 N 个单元, 而其中 N_2 个单元属于 Γ_2 , 其上 $u = \bar{u}$; N_1 个单元属于 Γ_1 , 其上 $q = \bar{q}$, 各单元依反时针编号, 见图 1.2.1。

a. 离散方程

根据积分的可加性, 把 (1.2.12) 式中的积分化为对每个单元 Γ_i 上的积分之和

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma$$

由于 u_i 和 q_i 在 Γ_i 上为常数,所以 u_i 和 q_i 都可以提到积分号外面,故上式可写成离散形式

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \right) u_j = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \right) q_j$$

由于上式对于每个结点“ i ”都成立,因而把结点“ i ”与进行积分的“ j ”段连系起来,可写成

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad i=1,2,\dots,N \quad (1.2.14)$$

式中 $\hat{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma$, $G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma$ 。

同理,当“ i ”点并非位于光滑边界,而是位于角点处时,可将式(1.2.13)写成

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad i=1,2,\dots,N \quad (1.2.15)$$

b. 矩阵方程

若记 $H_{ij} = \hat{H}_{ij} (i \neq j)$ 和 $H_{ii} = \hat{H}_{ii} + c_i (i = j)$, 则(1.2.14)和(1.2.15)可写成

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad i=1,2,\dots,N \quad (1.2.16)$$

把全部结点“ i ”的方程(1.2.16)合起来,构成一个 N 阶线性代数方程组,其可表示为如下矩阵形式

$$HU = GQ \quad (1.2.17)$$

其中 $H = (H_{ij})_{N \times N}$, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$

$$G = (G_{ij})_{N \times N}, \quad Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}^T$$

注意:在 Γ_1 上有 N_1 个 q 值已知;在 Γ_2 上有 N_2 个 U 值已知;因此,(1.2.17)方程组只有 $N = N_2 + N_1$ 个未知量。重新排列方程组