高等学校数学学习辅导教材

GAODENG XUEXIAO SHUXUE XUEXI FUDAO JIAOCAI

高等数学课程过关强化试卷

高等数学教学研究组/组编
曹铁川/主编

高等数学(下)

(理工类·重点院校)

真正的一线教师力作
针对性强　信息超值
考点覆盖率 100%
考试成功率 100%
保你轻松过关得高分

ISBN 7-5611-2294-2
9 787561 122945 >

ISBN 7-5611-2294-2 定价:19.00元(本册9.50元)

大连理工大学出版社

责任编辑/刘 杰　封面设计/王福刚

高等学校数学学习辅导教材

高等数学课程过关强化试卷

高等数学(下)

(理工类·重点院校)

高等数学教学研究组　组编

曹铁川　主编

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学课程过关强化试卷：高等数学(下)(理工类·重点院校)/曹铁川主编．—大连：大连理工大学出版社，2003.4
ISBN 7-5611-2294-2

Ⅰ．高…　Ⅱ．曹…　Ⅲ．高等数学—高等学校—习题　Ⅳ．O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 17824 号

大连理工大学出版社出版
地址：大连市凌水河　邮政编码：116024
电话：0411-4708842　传真：0411-4701466　邮购：0411-4707961
E-mail：dutp@mail.dlptt.ln.cn　URL：http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：185mm×260mm　印张：8　字数：181 千字
印数：1～8 000
2003 年 4 月第 1 版　　2003 年 4 月第 1 次印刷

责任编辑：刘　杰　　责任校对：刘智伟
封面设计：王福刚

定　价：19.00 元(本册 9.50 元)

前　言

高等数学是理工科院校最重要的基础课之一。学习该课程既为后续专业课奠定必需的数学基础，同时也是提高自身数学素养的必经途径。与初等数学相比，高等数学在研究内容及研究方法上有着许多本质差异，加之大学课堂教学密度大，进度快，对学生的自学能力要求高。因而使得一部分刚升入大学的一年级新生不很适应，感到高等数学不好学，甚至视为畏途，特别是期末考试之前，面对众多的知识点，五花八门的题型，常理不清头绪，抓不住重点，不能有效地复习备考。

怎样才能学好高等数学呢？其要领是多方面的，其中一个重要方面就是要做够一定数量的习题。因为习题通常是知识的载体，在正确方法的指导下，通过演算题目，可以加深对数学概念的理解，对数学思想的领悟，以及对数学思维能力的培养。反过来，为了检测学生是否达到了教学要求，也要通过解答试题来考核，因此笔试仍是各高校期末考试的主要形式。

能否有效地对学生进行考核，试卷就显得至关重要。一份好的试卷要能够体现出教学大纲的要求，能够考查出学生对基本概念、基本方法和基本原理的理解，同时在一定程度上考查出学生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想象能力及运用所学知识解决实际问题的能力，甚至是创新能力。《高等数学课程过关强化试卷》（理工类·重点院校）正是力求体现上述功能而编制的。

本试卷集的命题原则参照了原国家教委审定的工科院校“高等数学教学基本要求”，以及高等学校工科教学课程指导委员会近年来关于工科数学教学内容改革的一系列建议，主要针对的是重点理工科院校非数学类专业的本科学生，以及普通理工科院校对数学要求较高专业的本科学生。试卷兼收并蓄了传统教材和面向21世纪教材的内容，如同济大学的《高等数学》（四、五版），清华大学的《微积分教

程》，西安交通大学的《工科数学分析基础》，大连理工大学与原吉林工业大学合编的《工科数学基础》，同济大学的《微积分》等。

本试卷集的题型结构包括填空题、选择题、解答题和证明题。其中填空题的知识点对较单一，难度不大，要求学生运用基本公式和方法正确计算和推导。选择题的概念性较强，计算量一般不大，主要考查学生对基本概念和原理的掌握程度。解答题和证明题是考试的主要题型，主要考查学生对高等数学的公式、方法、原理掌握和运用的熟练程度，并有效地反映学生的能力。

按照教学要求，各套试卷包含了主要知识点，内容齐全，覆盖面广。认真解答这些试卷可对高等数学进行较系统的复习。每套试卷的满分为100分，其中基本题约占70分，中等难度的综合题约占20分，难题或创新题约占10分。每套试卷均有较高的区分度，使用本试卷可以检测出学生个体之间的差异，也可使优秀学生脱颖而出。当然，各试卷之间在难度和要求上也存在着一定的区别，可根据各校的具体情况有选择地使用和参考。

本试卷集分为两部分，第一部分为试题部分，第二部分为答案和解答部分。在解答中给出了主要步骤，希望同学们先独立去解答，然后再对照答案比较推敲，并总结解题经验和技巧，从中提炼出一些有代表性的思想。相信同学们做了若干套试卷后，定会增强信心，开阔眼界，提升解题能力。

本书由曹铁川主编和统稿。参与试题命制的有朱晓平（同济大学）、武忠祥（西安交通大学）、韩云瑞（清华大学）、崔荣泉（西安冶金科技大学）、蒋志刚、金光日（大连理工大学）。各命题教师长期工作在教学第一线，有着丰富的教学经验，谙知试题设计方案和编制技巧，对试卷的广度和深度有着较准确的把握，因而试卷命题合理，针对性强，富有启发性，具有较高的信度和效度，是大学生学习高等数学和课程过关的良师益友，对于数学教师也不失为一本有用的教学参考书。

对于本书中的不足与疏漏，恳请读者批评指正。

编　者

2003.4.10

班级________ 姓名________ 得分________

试卷一

（时间 110～120 分钟）

一、填空题(本题 16 分，每小题 4 分)

1. 曲面 $z - e^z + 2xy = 3$ 在点(1,2,0) 上的切平面方程是______。

2. 设函数 $f(x) = \pi x + x^2(-\pi < x < \pi)$ 的 Fourier 级数展开式为 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$，则其中系数 $b_3 =$ ______。

3. 设 Ω 是平面 $x + y + z = 1$ 与三个坐标平面所围成的四面体的全表面外侧，则曲面积分 $\oiint_{\Sigma}(2x + y^2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y - z^2x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - (z + x^2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ______。

4. 设 $u = xy\cos z$，则在点$(2, -1, 0)$ 处 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}u) =$ ______。

二、选择题(本题 12 分，每小题 4 分)

1. 设 $z = x^y$，则 $\mathrm{d}z =$ (　　)。

A. $x^y\left(\ln x\mathrm{d}x + \frac{y}{x}\mathrm{d}y\right)$　　B. $x^y\left(\frac{y}{x}\mathrm{d}x + \ln x\mathrm{d}y\right)$

C. $x^y\left(\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y\right)$　　D. $x^y\left(y\mathrm{d}x + \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}y\right)$

2. 微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 3x - 2e^x$ 的一个特解 y^* 的形式为(　　)。

A. $(ax + b)e^x$　　B. $(ax + b)xe^x$

C. $(ax + b) + ce^x$　　D. $(ax + b) + cxe^x$

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$($k$ 为常数)，则(　　)。

A. 无论 k 取何值，都绝对收敛　　B. 无论 k 取何值，都条件收敛

C. 无论 k 取何值，都发散　　D. 敛散性与 k 的取值有关

三、解答下列各题(本题 24 分，每小题 6 分)

1. 求微分方程 $x\ln x\mathrm{d}y + (y - \ln x)\mathrm{d}x = 0$ 满足 $y|_{x=e} = 1$ 的特解。

2. 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} x^2yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，这里 Ω 是由 $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4 - x^2}$，$-2 \leqslant x \leqslant 0$，$0 \leqslant z \leqslant 1$ 所确定。

3. 求圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 所割下部分的面积。

4. 已知向量场 $\boldsymbol{A} = (y^2 + z)\boldsymbol{i} + (z^2 + x)\boldsymbol{j} + (x^2 + y)\boldsymbol{k}$，在点 $M(2,3,-1)$ 处沿向量 $\boldsymbol{l}$ 方向有最大环量密度，求 $\boldsymbol{l}$ 的三个方向余弦以及最大环量面密度的值。

四、(本题 8 分)

应用 Lagrange 乘数法,求抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x - y - 2 = 0$ 之间的最短距离。

五、(本题 8 分)

设球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ 上任一点 (x,y,z) 处的密度 $\mu = (x + y + z)^2$,试计算该球体的质量。

六、(本题 8 分)

设有幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$,

(1) 求它的收敛半径及收敛域;

(2) 求其和函数;

(3) 求常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$ 的和。

七、(本题 8 分)

设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数,且 $y' \neq 0$,$x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数。

(1) 试将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{d^2x}{dy^2} + (y + \sin x)\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3 = 0$ 变换为 $y = y(x)$ 满足的微分方程;

(2) 求变换后的微分方程的通解。

八、(本题 8 分)

设 $f(x)$ 是正值连续函数,D 为单位圆盘:$x^2 + y^2 \leqslant 1$,l 为其边界(正向),证明

(1) $\oint\limits_l xf(y)dy - \dfrac{y}{f(x)}dx = \oint\limits_l -yf(x)dx + \dfrac{x}{f(y)}dy$;

(2) $\oint\limits_l xf(y)dy - \dfrac{y}{f(x)}dx \geqslant 2\pi$。

九、(本题 8 分)

当陨石穿过大气层向地面高速坠落时,陨石表面与空气摩擦所产生的高热使陨石燃烧并不断挥发。试验表明,陨石挥发的速率(即体积减少的速率)与陨石的表面积成正比。现有一陨石是质量均匀的球体,且在坠落过程中始终保持球体状。若它在进入大气层开始燃烧的前 3 秒内,减少了其体积的 $\dfrac{7}{8}$,问此陨石完全燃烧尽需要多长时间?

班级______ 姓名______ 得分______

试卷二

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、求解下列各题（本题 24 分，每小题 6 分）

1. 求与向量 $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ 都垂直的单位向量。

2. 求与已知平面 $8x + y + 2z + 5 = 0$ 平行，且与三坐标面所围成的四面体体积为 18 的平面方程。

3. 已知 $xyz = a^3 (a > 0)$，求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

4. 求函数 $u = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ 在闭区域 D 上的最大值，这里 $D: x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 2\pi$。

二、求解下列各题（本题 28 分，每小题 7 分）

1. 设 $z = f(x\ln y, x - y^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，试求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

2. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\pi^{n+1}} \sin \dfrac{\pi}{n+1}$ 是否收敛？若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

3. 计算二重积分 $\iint\limits_D \arctan \dfrac{y}{x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是圆 $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 1$ 及直线 $y = x$，$y = 0$ 所包围的在第一象限内的区域。

4. 设 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ 1, & 0<x<\pi\end{cases}$，$S(x)$ 是 $f(x)$ 以 2π 为周期的 Fourier 级数的和函数，写出 $S(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的函数表达式，并求 $S\left(-\frac{1}{2}\right)$ 及 $S(-5)$。

三、(本题 10 分)

某均匀物体由上下两部分组成，上部是半径为 a 的半球体，下部是底面半径为 a 高为 3 的直圆锥体，且半球体的底面圆与圆锥的底面重合，问 a 为何值时，此物体的重心恰好在球心位置？

四、(本题 10 分)

有一质点沿圆周 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=1\\ z=\sin t\end{cases}$，从点 $M(1,1,0)$ 到点 $N(0,1,1)$ 的过程中，受到一变力 $\boldsymbol{F}$ 的作用。$\boldsymbol{F}$ 的方向始终指向并垂直于 z 轴，其大小与质点距 z 轴的距离成反比，比例系数为 $k>0$，求变力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功。

五、(本题 10 分)

计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\sum$ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(z\leqslant 1)$ 在第一卦限部分，方向取下侧。

六、(本题 8 分)

求微分方程 $(1+x)y''+y'=\ln(x+1)$ 的通解。

七、(本题 10 分)

设有级数 $2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，

(1) 求此级数的收敛域；

(2) 求此级数的和函数所满足的二阶常系数线性微分方程；

(3) 求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$ 的和。

班级______ 姓名______ 得分______

试卷三

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、填空题(本题 28 分，每小题 4 分)

1. 设向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角的正弦是______。

2. 设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\cos^2x+\cos^2y+\cos^2z=1$ 所确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ______。

3. 交换积分次序 $\int_x^{2x}\mathrm{d}y\int_{y-x}^{x}f(x,y)\mathrm{d}x=$ ______。

4. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛域为______。

5. 微分方程 $y'''+y''+y'+y=0$ 的通解是______。

6. 向量场 $\boldsymbol{A}=(3xy^2+z^2)\boldsymbol{i}+(y^3-x^2z^2)\boldsymbol{j}+xyz\boldsymbol{k}$ 在点 $M(1,2,-1)$ 处的旋度 $\boldsymbol{rot}\boldsymbol{A}(M)=$ ______。

7. 曲线 $\begin{cases}y=2x\\ z=3x^2+y^2\end{cases}$ 在点(1,2,7)处的切线方程为______。

二、(本题 7 分)

设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处由内侧指向外侧的法向量，求函数 $u=\dfrac{1}{z}\sqrt{6x^2+8y^2}$ 在 P 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数。

三、(本题 6 分)

设 $z=f\left(2x+3y,\dfrac{x}{y}\right)$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}$。

四、(本题 7 分)

某商店卖两种品牌的上衣，甲品牌上衣每件进价为 30 元，乙品牌上衣每件进价为 40 元。根据经验，当甲品牌上衣售价为每件 x 元，乙品牌上衣售价为每件 y 元时，每天可卖出甲种上衣 $70-5x+4y$ 件，乙种上衣 $80+6x-7y$ 件。问以什么样的售价销售这两种上衣，可获取最大收益？

五、(本题 7 分)

计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V$，这里 Ω 是曲面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与 $z=\dfrac{1}{3}(x^2+y^2)$ 所围成的区域。

六、(本题 7 分)

计算曲线积分$\int_c (y+3x)^2 dx + \left(3x^2 - y^2\sqrt{y}\right)dy$,其中 c 为曲线 $y = x^2$ 上由点 $A(-1,1)$ 到点 $B(1,1)$ 的一段弧。

七、(本题 8 分)

计算曲面积分

$$I = \oiint_{\Sigma}\left[\frac{1}{y+3}f\left(\frac{x+4}{y+3f}\right)' + 3xy^2\right]dydz + \left[\frac{1}{x+4}f\left(\frac{x+4}{y+3}\right) + 3x^2y\right]dzdx + z^3dxdy$$

其中 $f(u)$ 具有连续导数,$\sum$ 为锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 与两半球面 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$,$z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ 所围立体的全表面外侧。

八、(本题 7 分)

判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ 的敛散性,并说明理由。

九、(本题 8 分)

把 $f(x) = x^2$ 在$(-\pi,\pi]$上展开为 Fourier 级数,并证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$。

十、(本题 7 分)

求微分方程 $y'' - 3(y')^2 = 3$ 满足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ 的特解。

十一、(本题 8 分)

设函数 $f(t)$ 在$[0,+\infty)$上连续,且满足方程

$$f(t) = e^{4\pi t^2} + \iint_{x^2+y^2\leq 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy,求\ f(t)$$

班级______ 姓名______ 得分______

试卷四

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、填空题（本题 20 分，每小题 4 分）

1. 设 $z = e^{\sin xy}$，则 $dz =$ ______。

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ 0, & 0 < x < \pi \end{cases}$，是以 2π 为周期的函数，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数 $s(x)$ 在 $x = \pi$ 处收敛于______。

3. 一个分布着质量的曲线弧 $y = x^2 (0 \leqslant x \leqslant 1)$，其上任一点处的线密度与它的横坐标相同，则该曲线弧的质量为______。

4. 设 $\sum$ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$（外侧），则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} (x^3 + y) dydz + (y^3 + z) dzdx + (z^3 + x) dxdy =$ ______。

5. 向量场 $\boldsymbol{A} = x^2 y\,\boldsymbol{i} + 2yz^2 \boldsymbol{j} - 3z^2 x \boldsymbol{k}$ 在点 $M(2, -1, 1)$ 处的散度 $\operatorname{div} \boldsymbol{A}(M) =$ ______。

二、选择题（本题 20 分，每小题 4 分）

1. 设有直线 $l: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-3}{-5} = z - 1$ 及平面 $\pi: 2x + y - 3z = 4$，则直线 l（　　）。

A. 平行于 π　　B. 在 π 上　　C. 垂直于 π　　D. 与 π 斜交

2. 若 $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$，则在点 (x_0, y_0) 处函数 $z = f(x, y)$（　　）。

A. 连续　　B. 全微分 $dz = 0$

C. 必然取得极值　　D. 可能取得极值

3. 设 $z = \varphi(x^2 - y^2)$，其中 φ 具有连续的导数，则下列等式成立的是（　　）。

A. $x \dfrac{\partial z}{\partial x} = y \dfrac{\partial z}{\partial y}$　　B. $y \dfrac{\partial z}{\partial x} = x \dfrac{\partial z}{\partial y}$

C. $y \dfrac{\partial z}{\partial x} = -x \dfrac{\partial z}{\partial y}$　　D. $x \dfrac{\partial z}{\partial x} = -y \dfrac{\partial z}{\partial y}$

4. 设有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^p}$，则（　　）。

A. 当 $p > 1$ 时，该级数条件收敛　　B. 当 $p > 1$ 时，该级数收敛

C. 当 $0 < p \leqslant 1$ 时，该级数绝对收敛　　D. $0 < p \leqslant 1$ 时，该级数发散

5. 设有空间区域 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2, z \geqslant 0$，$\Omega_0: x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$，则（　　）。

A. $\iiint\limits_{\Omega} z dv = 4 \iiint\limits_{\Omega_0} z dv$　　B. $\iiint\limits_{\Omega} xyz dv = 4 \iiint\limits_{\Omega_0} xyz dv$

C. $\iiint\limits_{\Omega} x dv = 4 \iiint\limits_{\Omega_0} x dv$　　D. $\iiint\limits_{\Omega} y dv = 4 \iiint\limits_{\Omega_0} y dv$

三、（本题 8 分）

求椭球面 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 的切平面，使其垂直于直线 $l: \begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 4x + y - 2z = 2 \end{cases}$。

四、（本题 8 分）

设有点 $M_0(1, -1, 2)$ 和 $M(2, 1, -1)$，求函数 $u = xy^2 z$ 在点 M_0 处，沿向量 $\overrightarrow{M_0 M}$ 方向的方向导数，并指出 u 在该点沿哪个方向的方向导数最大？这个最大的方向导数值是多少？

五、(本题 8 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是以(0,0),(1,1) 和(0,1) 为顶点的三角形区域。

六、(本题 9 分)

把函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展为 x 的幂级数,写出其收敛域,并求数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。

七、(本题 9 分)

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''+y=\cos^2 x$,且曲线 $y=y(x)$ 在原点处与直线 $y=2x$ 相切,求 $y=y(x)$ 的表达式。

八、(本题 9 分)

已知曲线积分 $\int_l [e^{-x}+f(x)]y\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关,这里 $f(x)$ 可微且 $f(0)=\dfrac{1}{2}$。试计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}[e^{-x}+f(x)]y\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}y$。

九、(本题 9 分)

一颗地球同步轨道通讯卫星的轨道位于地球的赤道平面内,且可以近似认为是圆轨道。通讯卫星运行的角速率与地球自转的角速率相同,即人们看到它在天空不动。已知地球半径为 R,卫星离地面的高度为 h(h 为定值),计算一颗通讯卫星所覆盖地球表面的面积 S。

班级______ 姓名______ 得分______

试卷五

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、填空题（本题 32 分，每小题 4 分）

1. 设有向量 $\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{n}=k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，其中 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$。如果 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，那么 $k=$ ______。

2. 函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $M_0(1,0,1)$ 处沿 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 方向的方向导数是 ______。

3. 设 $\dfrac{-xy^2\mathrm{d}x+yx^2\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^m}$ 是某二元函数的全微分，则 $m=$ ______。

4. 通解为 $xy=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}$ 相应的微分方程是 ______。

5. 微分方程 $y''-2y'+2y=\mathrm{e}^x$ 的通解是 ______。

6. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域是 ______。

7. 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ x, & 0<x<\pi\end{cases}$，且 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(\pi)+S\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=$ ______。

8. 向量场 $\boldsymbol{A}=2xy^2\boldsymbol{i}-yz^2\boldsymbol{j}+3x^2z\boldsymbol{k}$ 的旋度 $\mathbf{rot}\boldsymbol{A}=$ ______。

二、（本题 8 分）

求圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0\\ 2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线与法平面方程。

三、（本题 8 分）

设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f\left[xy,\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)\right]$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$。

四、（本题 8 分）

计算曲面 $2z=x^2+y^2$ 被柱面 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所截下部分的曲面面积。

五、(本题 8 分)

球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2az$ 上任一点的密度等于该点到坐标原点距离的平方，试求球体重心的坐标。

六、(本题 7 分)

计算曲线积分 $\int_l x^2 \mathrm{d}s$，其中 l 为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=\sqrt{3} \end{cases}$。

七、(本题 7 分)

计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\sum$ 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1$ 和 $z=2$ 所截部分的外侧。

八、(本题 7 分)

计算曲线积分 $\oint_c (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 c 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$ 从 z 轴正向往负向看去为顺时针方向。

九、(本题 8 分)

非负函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0, f(1)=1$。已知以曲线 $y=f(x)$ 为曲边，以 $[0,x]$ 为底的曲边梯形，其面积与 $f(x)$ 的 $n+1$ 次幂成正比，求 $f(x)$ 的表达式。

十、(本题 7 分)

设数列 $\{na_n\}$ 收敛，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛。

班级__________ 姓名__________ 得分__________

试卷六

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、填空题（本题 30 分，每小题 3 分）

1. 过点(1,2,1)且与平面 $x+y+z=1$ 和 $x-2y+2z=1$ 均平行的直线方程为______。

2. 设 $f(x,y)=x^2e^y+y^2\sin x$，则 $dz|_{(\pi,0)}=$______。

3. 函数 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\mathrm{div}(\mathbf{grad}\ u)=$______，$u$ 在(1,1,1)点处的最小方向导数等于______。

4. 改变积分 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x} f(x,y)dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)dy$ 的积分次序______。

5. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=3$ 处条件收敛，则其收敛区间为______。

6. $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$ 的 Maclaurin 级数为______。

7. 二元向量值函数 $f(x,y)=\begin{bmatrix} xe^{y^2} \\ \sin(x^2+y^2)\end{bmatrix}$ 的导数 $Df(x,y)=$______。

8. 已知二阶线性非齐次微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的三个特解为 e^x，$x+e^x$，x^2+e^x，则满足 $y(1)=2+e$，$y'(1)=3+e$ 的解为______。

9. 设 c 为曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0\end{cases}$，则第一型曲线积分 $\int_c z ds=$______。

10. 一质点 M 在力的作用下，沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限部分由点 $(0,b)$ 移动到点 $A(a,0)$，它在任一点 (x,y) 所受的力为 $\boldsymbol{F}(x,y)=-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}$，则 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 所作的功为______。

二、（本题 10 分）

函数 $v(z)$ 有连续的二阶导数，$u(x,y)=v(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2+y^2$，求 $u(x,y)$。

三、（本题 10 分）

计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} z^2 dV$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant 1, x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 1\}$。

四、（本题 10 分）求椭球面 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{3}=1$ 在第一卦限部分上的切平面与三个坐标面围成的四面体的最小体积。

五、(本题 10 分)

求微分方程组 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&4\\0&2&4\\0&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 的通解。

六、(本题 10 分)

设函数 $f(x)$ 有连续的导数，$f(0)=1$，且曲线积分 $\int_L[\mathrm{e}^{-x}-f(x)]y\mathrm{d}x+[2y+f(x)]\mathrm{d}y$ 与路径无关，求 $f(x)$，并计算 $\int_{L_1}[\mathrm{e}^{-x}-f(x)]y\mathrm{d}x+[2y+f(x)]\mathrm{d}y$，其中 L_1 是曲线 $y=\sqrt{x}$ 上从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 点的有向弧段。

七、(本题 10 分)

证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}, x\in[-\pi,\pi]$。

八、(本题 10 分)

计算 $I=\iint_S\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，其中 S 为椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=1$ 的外侧。

班级＿＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿＿　得分＿＿＿＿＿＿

试卷七

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、填空题（本题 15 分，每小题 3 分）

1. 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ______。

2. 曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 与平面 $x+2y+3z=0$ 垂直的切线方程是______。

3. 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)x^n}$ 的收敛区间是______。

4. 设 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$（c_1, c_2 为任意常数）为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，则该方程为______。

5. 已知 L 是由抛物线 $y=x^2$，直线 $y=0$ 和直线 $x=1$ 所围成区域的整个边界曲线，则曲线积分 $\oint_L \sqrt{y}\,ds=$ ______。

二、单项选择题（本题 15 分，每小题 3 分）

1. 直线 $L_1: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{4}$ 与直线 $L_2: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{2}$（　）。

A. 相交于一点　B. 重合　C. 平行但不重合　D. 异面

2. 函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处（　）。

A. 不连续　B. 偏导数存在

C. 沿任一方向的方向导数存在　D. 可微

3. 设 $f_x(1,2)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x,2)-f(1-x,2)}{x}$ 等于（　）。

A. 0　B. $f_x(1,2)$　C. $2f_x(1,2)$　D. $3f_x(1,2)$

4. 设函数 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，它在区间 $(-1,1]$ 上的定义为：$f(x)=\begin{cases}-1, & -1<x\leqslant 0 \\ x^2, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x=-1$ 处收敛于（　）。

A. -1　B. 0　C. 1　D. 2

5. 以下四式中正确的是（　）。

A. $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n}, -1<x\leqslant 1$

B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}=0$

C. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}=\dfrac{\sin x}{x}, -\infty<x<+\infty$

D. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\pi^{2n}}{(2n)!}=-1$

三、（本题 8 分）

求函数 $z=x^2+y^2-3x+4y$ 在闭区域 $x^2+y^2\leqslant 25$ 上的最大值和最小值。

四、（本题 8 分）

计算 $I=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}e^{-y^2}dy\int_0^{y}e^{-x^2}dx+\int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{a}e^{-y^2}dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}e^{-x^2}dx$。

五、（本题 8 分）

计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)dV$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$。

六、(本题 8 分)

求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于平面 $z=1$ 和 $z=2$ 之间部分的曲面 $\sum$ 对 z 轴的转动惯量，已知锥面上任一点 (x,y,z) 处的面密度等于该点到坐标原点的距离的平方。

七、(本题 10 分) 设常数 $p>1$

(1) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p+\left(\frac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^p+\left(\frac{n}{n}\right)^p\right]$；

(2) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+2^p+\cdots+n^p}$ 收敛。

八、(本题 10 分)

设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，函数 $f(r)$ 当 $0<r<+\infty$ 时具有二阶连续导数，且 $f(1)=1$，$f'(1)=-1$，又 $f(r)$ 的梯度场是一个无源场，求 $f(r)$。

九、(本题 10 分)

设 Ω 是由分片光滑闭曲面 Σ 所围成的有界闭区域，函数 $u(x,y,z)$ 在 Ω 内及边界 Σ 上都有二阶连续偏导数，$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的外法线单位向量，$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 表示函数 u 在 Σ 上点 (x,y,z) 处沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的方向导数，证明：

(1) $\oiint\limits_{\Sigma}u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\iiint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}V+\iiint\limits_{\Omega}u\cdot\Delta u\mathrm{d}V$，其中 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$；

(2) 若在 Ω 内 $\Delta u=0$，且在边界 Σ 上 $u=0$，则在整个 Ω 上恒有 $u=0$。

十、(本题 8 分)

已知曲线积分 $\int_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{\varphi(x)+y^2}=A$（常数），其中 $\varphi(x)$ 是可导函数，L 是绕原点 $(0,0)$ 一周的任意正向闭曲线。

(1) 设 l 为任一不过原点也不包围原点的正向闭曲线，证明 $\int_l\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{\varphi(x)+y^2}=0$；

(2) 当 $\varphi(1)=4$ 时，求 $\varphi(x)$ 及 A。