怎样列方程解应用题

江苏省数学学会科普委员会主编

沈　超　编写

初中数学辅助读物

SHUXUE

江苏教育出版社

怎样列方程解应用题

江苏省数学学会科普委员会主编

沈　超　编　写

江 苏 教 育 出 版 社

怎样列方程解应用题

沈　超

江苏教育出版社出版

江苏省新华书店发行　　淮阴新华印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32　印张 2.25　字数 40,000

1984 年 3 月第 1 版　1984 年 3 月第 1 次印刷

印数 1-114,500 册

书号：7351·005　定价：0.22 元

责任编辑　何震邦

编 者 的 话

数学在实际生活中的应用是很广泛的。对于一个中学生或任何一个青少年来讲，不管你将来是在哪一个部门里工作，还是进哪一个学校，都必须要有最基本的数学知识，才能作出某些成绩。因此，每一个同学和青少年都应该努力打好数学基础。

学习数学，首先应该掌握一定的数学概念和数学规律，这是学好数学的基础。同时，也要学会把学到的知识用之于实践。如果掌握了知识不会灵活运用，那么，这些知识便只是一堆废物。因此，我们在学习数学时，必须注意理论和实践两个方面，注意领会有关的数学思想，掌握数学思维的方法，从根本上提高分析问题、解决问题的能力。为了达到这样的目的，在正课学习的基础上，适当看一点课外数学读物，以开拓知识领域，扩大视野，启迪智慧，是十分必要的。

基于这样的指导思想，我们组织部分长期从事中学数学教学和研究的专家、教授、中学教师编写了这套初中数学辅助读物。

这套丛书的内容密切结合现行初中课本，注意数学教材中各个方面的联系及应用，采用以点带面、纵横贯通的方法，阐述初中数学里的重要概念、定理和法则，疏通学习中的难点，剖析教材中的重点。书中涉及的数学知识一般不超越初中数学的范围，某些地方虽稍有拓宽加深，但以初中学

生能看懂为原则。文字上力求适合初中学生的年龄特点，做到生动活泼，浅显通俗。

这套丛书第一批编辑出版的有五种：《怎样列方程解应用题》（沈超编写），《三角形的巧合点》（涂世泽编写），《距离与角度》（王永建编写），《怎样解初中数学题》（赵振威编写），《数学命题和证明》（范惠民编写）。以后将根据初中学生和广大青少年学习初中数学知识需要，继续出版。

由于当前初中学生的程度不一，这套丛书在选题与编写方面都可能存在一些缺点，欢迎各地教学研究部门、中学教师以及广大青少年读者多多提出意见，帮助我们编好这套丛书。

江苏省数学学会科普委员会

一九八四年二月

目　　录

一、列方程解应用题

方程在中学代数中占有很重要的地位，讨论的主要内容是某些方程的解法以及应用方程来解决一些实际问题（即列方程解应用题）。在小学里，我们学过了用四则（即加、减、乘、除四种法则）运算解决一些实际问题的方法，学了方程后，在解决实际问题时，就有了比四则较为简便的方法，并且可以解决一些四则运算不可能解决的实际问题。

本书主要谈怎样列方程(组)解应用题，读者可以采用边读、边画、边想的方法阅读。

§1 为什么列方程解应用题比四则方法简便？

先用两个例子对比一下。

例1 某县今年中小学学生总人数是145035人，比解放前的1948年全县中小学学生总人数的32倍还多1035人。问1948年全县中小学学生总人数是多少？

这个问题用四则来解，其方法如下：

从题中可看出，由145035人中减去1035人刚好是1948年人数的32倍。列成式子，有

1948年全县中小学学生总人数 $=(145035-1035)\div 32$

$=144000\div 32=4500$（人）．(1)

用一元一次方程来解，其方法如下：

设 1948 年全县中小学学生总人数是 x. 于是列得方程

$$32x+1035=145035. \tag{2}$$

解之，得 $x=4500$，即 1948 年全县中小学学生总人数为 4500人。

照理讲，谈到“多”总是想到“加”，谈到“倍”总是想到“乘”. 上面的方程(2)就是这样列出的. 但是用四则来解例 1，要把“多”的减去、用“倍数”去除. 比较这两种思考方法，显然用方程来解顺当简便.

例 2 某运输公司要把 26 吨化肥全部运到某乡，决定调载重 3 吨与载重 4 吨两种汽车共 7 辆. 问这两种汽车应各调若干辆刚好运完？

所谓刚好运完，就是说这 7 辆汽车都装满规定的吨位，这样才不造成浪费.

这个问题用四则来解，其方法如下：

如果所调的 7 辆汽车都是载重 4 吨的，那么共可运 $4\times7=28$(吨) 化肥，现在只要运 26 吨化肥，这样有一辆汽车只运 2 吨，造成了 2 吨运输的浪费. 为了不造成 2 吨运输的浪费，需改调几辆载重 3 吨的汽车. 那么要调几辆载重 3 吨的汽车呢？我们知道，每辆载重 3 吨的汽车比每辆载重 4 吨的汽车要少运 $4-3=1$ (吨)，所以要想减少 2 吨的运输量，需要调载重 3 吨的汽车 $2\div1=2$ (辆)，即 7 辆汽车中有 2 辆是载重3 吨的，5 辆是载重 4 吨的，这样刚好把 26 吨化肥运完. 算法如下：

$$4\times7=28, \quad 28-26=2,$$
$$4-3=1, \quad 2\div1=2.$$

写成综合算式：

$$(4\times 7-26)\div(4-3)=2\div 1=2(\text{辆})。\qquad (1)$$

用一元一次方程来解，其法如下：

设调载重 3 吨的汽车 x 辆，则调载重 4 吨的汽车辆数是 $7-x$，于是列得方程：

$$3x+4(7-x)=26。\qquad (2)$$

解之，得 $x=2$。即调载重 3 吨的汽车 2 辆，载重 4 吨的汽车 $7-2=5$ 辆。

比较这两种方法，显然用一元一次方程来解要容易得多。

那么为什么列方程解应用题一般来说要比四则方法简便呢？

我们从上面两个例子所列得的方程来求 x。例 1 中的方程（2）为

$$32x+1035=145035,$$

所以 $$x=(145035-1035)\div 32,$$

这就是例 1 中的（1）式。

例 2 中的方程（2）为

$$3x+4(7-x)=26,$$

所以 $$x=(4\times 7-26)\div(4-3),$$

这就是例 2 中的（1）式。

由此可以看出，用四则方法来解应用题，要求的数只能由题中给定的已知数来求，而用列方程来解应用题，总是先用一个字母 x 来表示未知数，并设想这个问题是已经解决了的。也就是说，把表示未知数的字母 x 看作是已知的（当然这个数是什么？暂时还不知道）。这样在列方程时，就可以把字母 x 看作是一个数，因而可以根据题中的已知数和未知

数的关系，进行运算，来列方程（即等式），再从方程中求x，显然比较简便。

这就是我们在解决实际问题中为什么要学习方程的原因之一。

另外，我们知道，用四则解应用题只能通过加、减、乘、除的运算来求解，有很大的局限性。有些应用题在求解的过程中还要用到其它运算，比如说开方运算，这类问题就需要用列方程来解。

例 3 矩形的长比宽多3厘米，它的面积为42平方厘米，求这矩形的长与宽。

这个简单问题不可能用四则方法来解，现在把它用列方程的方法来解。

设矩形的长为x厘米，则宽为$x-3$厘米，于是列得方程：

$$x(x-3)=42,$$

即

$$x^2-3x-42=0.$$

这是一个一元二次方程。一元二次方程的一般形式为$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$），它的求根的公式为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

要用到开方运算。所以这个问题不可能用四则方法来解。

因此，在中学里我们学习方程的目的之一，一方面可以用比四则方法更简便的方法来解某些实际问题；另一方面还可以解决某些用四则方法不可能解的实际问题。

§2　怎样列方程解应用题？

一般中学课本上总结出列方程解应用题的五个步骤是：

1．弄清题意；

2．设未知数；

3．列方程；

4．解这个方程；

5．检验（其中要特别注意求得的解是否符合题意），写出答案。

列方程解应用题，实际上是把普通语言叙述的问题"翻译"成数学上的式子，而后通过数学运算来求解。

要把普通语言叙述的问题"翻译"成数学的式子，首先要很好地理解题意，要明确题中涉及到哪些量，这些量之间有什么关系，问题中什么量是已知的，什么量是未知的或不完全知道的。

其次，设未知数。

再次，在弄清题意和设了未知数的基础上列方程。在列方程时，要把问题通盘考虑一下，设想这个问题已经解决（即把未知数 x 看作是已知的），根据问题中所给的条件，把量与量间的一切关系式都一一列出来，而后用两种不同的方式来表示同一个量，列成等式，就得到我们要列的方程。

最后两步骤是比较容易的。

现在用上面的例1与例2进行分析。

例1中只有一种量，即该县中小学学生的人数。因为只有一种量，所以题中只给出这个量的数量之间的关系："倍

数”（即32倍）与“多”（多1035），由“倍数”和“多”得出总人数为$32x+1035$。又知道总人数为145035。$32x+1035$与145035是两种不同形式而表示同一个量（即总人数）。所以列得方程：

$$32x+1035=145035.$$

例2中涉及到三种量，即化肥的总重量(26吨)，每辆汽车的载重量（即3吨与4吨）以及汽车的辆数。这三种量有如下的关系：

每辆汽车的载重量×汽车的辆数＝化肥重量.

这种关系叫做**量与量之间的基本关系**。如果设调载重3吨的汽车辆数为x，那么，量与量间有下面一些关系：

x辆载重3吨的汽车共运$3x$吨化肥，

$7-x$辆载重4吨的汽车共运$4(7-x)$吨化肥，

总共运化肥26吨。

两种不同形式的化肥总吨数分别为$3x+4(7-x)$与26，所以列得方程：

$$3x+4(7-x)=26.$$

这是用化肥吨数这个量来表示等量关系(即方程)的。为什么我们用化肥吨数来表示等量关系呢？下面把这个问题分析一下：

首先每辆汽车的载重量是已知的(即3吨与4吨)。其次由于我们设x为载重3吨汽车的辆数，所以$7-x$为载重4吨汽车的辆数，把字母x看作是已知的，这样两种汽车的辆数也是已知的。至于化肥的吨数，我们只知道总共运26吨，但是不知道载重3吨的汽车共运多少吨，载重4吨的汽车共运多少吨，也就是说，化肥的吨数不完全知道。因此，就由

每辆汽车的载重量和汽车的辆数来求各种车辆运送化肥的吨数，来列方程。

总之，我们在初中阶段常遇到的应用题，有的只含有一种量，有的含有三种量。如果题中只含有一种量，那么题中所给的数量（包括未知的）之间的关系只能涉及到多、少、倍数、几分之几等的关系，因此只要按照题中的数量关系来列方程。如果题中含有三种量，这三种量之间必存在一种基本关系（如例 2 中的“每辆汽车的载重量×汽车辆数＝化肥重量”），利用这个基本关系，求出不知道或不完全知道的那个量的所有数量（当然把所设的未知数看作是已知的），而后按照含有一种量的问题来列方程。例 2 中就是根据基本关系由每辆汽车的载重量与汽车的辆数求出化肥重量，由表示这个量的两种不同方式来列方程的。

下面再来分析两个问题：

例 4 某动物繁殖场，收到雌雄成对的大、小动物若干对，其中小动物有 300 对。十个月后，小动物生殖繁育，总数达到它们原来的15倍；而大动物没有繁殖。大小动物合起来看，当初每收到一对动物，现在却变成了23只。问当初收到的动物是多少？

这个问题只含一种量，即动物的只数(一对是两只)，我们把题中给出的和要求的各个数量之间的关系分析一下：

如果设 x 表示当初收到动物的只数，那么由于小动物有 300 对，就是说有 600 只，所以大动物有 $x-600$ 只．十个月后小动物只数是原来的 15 倍，也就是有 $600\times15=9000$ 只。这样一来，十个月后，大、小动物总数为 $9000+(x-600)$（大动物只数没有变）。

从另外一点看，当初的每一对，现在变成了23只，即当初 2 只现在变成23只．当初一共有 x 只，也就是说有$\frac{x}{2}$个“2只”，所以现在的总数为$23\cdot\frac{x}{2}=\frac{23x}{2}$只．

这样，我们得到两种不同方式表示同一个量（即现在的动物总数），于是列得方程

$$9000+(x-600)=\frac{23x}{2}.$$

解之，得 $x=800$，即原来有 800 只动物．

例 5 一辆汽车以每小时 45 公里的速度从 A 站开往 B 站，另一辆汽车以每小时50公里的速度于 1 小时后从 B 站开往 A 站，设 A、B 两站相距 140 公里，问二辆汽车相遇处距 B 站多远？又二辆汽车何时相遇？

这个问题含有三种量：速度、时间、距离，它们之间的基本关系是

$$\text{速度}\times\text{时间}=\text{距离}.$$

题中要求两个未知量，即距离（相遇处距 B 站多远）和时间（何时相遇），所以这个问题有两种解法．下面对这两种解法进行分析，并加以比较．

解法一 设相遇处距 B 站 x 公里．现在来想一想用哪一种量列方程．根据题意，速度是已知的（每小时45公里和每小时 50 公里）．把未知数 x 看作是已知的，这样距离也是已知的（即相遇处距 B 站 x 公里，距 A 站 $(140-x)$ 公里）．对于时间，我们只知道第一辆汽车比第二辆汽车多走了 1 小时，不知道两辆汽车各走了多少小时，所以时间不完全知道．这样把各个时间用未知数 x 表示出来，用时间来列方程：

由基本关系

$$时间=\frac{距离}{速度}$$

知，在相遇时，第一辆汽车已走了$\frac{140-x}{45}$小时，第二辆汽车已走了$\frac{x}{50}$小时，于是列得方程

$$\frac{140-x}{45}-\frac{x}{50}=1。\tag{1}$$

解之，得 $x=50$，$\frac{140-x}{45}=2$，即相遇处距B站 50 公里，第一辆汽车走了 2 小时与第二辆汽车相遇。

解法二 设第一辆汽车走了 x 小时与第二辆汽车相遇。这样，速度是已知的，时间也是已知的（即第一辆汽车走了 x 小时，第二辆汽车走了 $x-1$ 小时）。对于距离，只知道A、B两站相距 140 公里，而不知道两辆汽车在相遇时各走了多少公里。这样，把各个距离以未知数 x 表示出来，用距离来列方程；

由基本关系易知，在相遇时两辆汽车已分别走了 $45x$ 公里与$50(x-1)$公里，于是列得方程：

$$45x+50(x-1)=140。\tag{2}$$

解之，得 $x=2$，$50(x-1)=50$，即在相遇时，第一辆汽车已走了 2 小时，距B站 50 公里。

由这两种解法可以看出，未知数 x 表示不同的量，用以列出方程的量也不同．解法一用 x 表示距离的公里数，就用时间列方程；解法二用 x 表示小时数，就用距离列方程．

又方程（1）中的系数有分数，而方程（2）中的系数都是

整数，这与未知数 x 的选取有关．那么怎样选取未知数 x，有时可以避免方程中分数系数出现呢？这可从量与量之间的基本关系来看．这个问题的量与量之间的基本关系为

$$速度\times时间=距离。$$

解法一是用时间来列方程的．由于时间 $=\frac{距离}{速度}$，所以由距离和速度来求时间，要用到除法，因而就会出现分数系数．解法二是用距离来列方程的．由于距离 $=$ 速度 $\times$ 时间，所以由速度和时间来求距离，只用到乘法，因而可以避免分数系数．

为了解方程时方便，我们总想尽可能避免分数系数的出现，所以在选取未知数 x 时，常考虑在基本关系中能利用乘法求得的那个量来列方程．

§3 举 例

上面对怎样列方程作了一些分析，没有给出正规的解法，下面举一些例子，先作分析，而后写出正规的解法．

例 1 小英三天共识 60 个字，第二天比第一天多识 5 个字，第一天识字的个数是第三天的 $\frac{3}{5}$，问小英这三天各识了几个字？

分析 这个问题只含有一种量，即识字的个数，要求三个未知数，即三天各识字的个数，求三个未知数，题中必需有三个独立条件（所谓独立条件，就是没有一个条件可以由其它条件推出的）．这里三个条件是：(1)三天共识 60 个字，(2)第二天比第一天多识 5 个字，(3)第一天识字的个数是第

三天的$\frac{3}{5}$. 这个问题通常设x表示第一天识字的个数，因为第一天识字的个数与这三个条件都有关系，而后根据条件(2) 和 (3) 来求第二天和第三天识字的个数，再由条件(1)列方程.

解 设第一天识x个字，那么第二天识$x+5$个字，第三天识$\frac{5}{3}x$个字，于是列得方程：

$$x+(x+5)+\frac{5}{3}x=60.$$

解之，得$x=15$，$x+5=20$，$\frac{5}{3}x=25$.

答：小英第一天识15个字，第二天识20个字，第三天识25个字。

例2 两点钟与三点钟之间，钟面上时针和分针何时成直角？

分析 这个问题只含有一种量，即时针和分针所走的距离. 1小时分针走的距离是60分划，而时针走的距离只有5分划. 所以同一时间，分针所走的距离是时针的$\frac{60}{5}=12$倍. 两针成直角就是它们相隔15分划. 但是在两点钟时，时针只在分针前面10分划，所以只有在分针超过时针的情况下才能成直角，即分针要在时针前面15分划时，两针成直角. 这时分针比时针多走了$10+15=25$(分划).

解 设分针走x分钟时两针成直角，在这同一时间，时针走了$\frac{x}{12}$分划，于是列得方程：