21世纪数学系列教材

线性代数教程

林升旭 编

华中科技大学出版社
E-mail: hustpp@wuhan.cngb.com

- 重视能力的培养 关注素质的提高
- 基本练习 小结 综合练习
- 适用 简明 通俗
- 深入浅出 学以致用

21世纪数学系列教材

线性代数教程

林升旭

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数教程/林升旭
武汉:华中科技大学出版社,2004年1月
ISBN 7-5609-3065-4

Ⅰ.线…
Ⅱ.林…
Ⅲ.线性代数-高等学校-教材
Ⅳ.O151.2

线性代数教程 林升旭

责任编辑:吴锐涛 封面设计:刘 卉
责任校对:朱 霞 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87542624

录 排:华中科技大学出版社照排室
印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:787×960 1/16 印张:12.5 字数:192 000
版次:2004年1月第1版 印次:2004年1月第1次印刷 定价:16.00元
ISBN 7-5609-3065-4/O·300

内容提要

本书根据教育部颁布的《高等学校工科各专业线性代数课程的基本要求》,在作者多年的教学与研究的经验基础上编写而成。

本书共分为六章:行列式、矩阵运算、初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、矩阵的对角化及二次型、向量空间及线性变换。为便于自学与复习,每章有内容小结,每节后配有基本练习题,每章末配有综合练习题,书末附有练习答案与解题提示。

本书适合作为高等工科院校各类办学形式的本科教学用书,也可供工程技术人员学习参考。

前　言

线性代数是理工科本、专科学生必修的一门重要基础课，它既是学习计算数学、微分方程、离散数学等后续课程的必备基础，也是在自然科学和工程技术各领域中应用广泛的数学工具。本教材是编者应华中科技大学武昌分校之邀，并根据教育部颁布的《高等学校工科各专业线性代数课程的基本要求》，以现行华中科技大学《线性代数》教材为基础，结合自己长期从事"线性代数"的教学与研究的经验编写而成的。

本书在编写上力求内容适度、结构合理、条理清晰、循序渐进，文字叙述力求简明扼要、深入浅出。本书具有如下特点：

(1) 突出基本概念、定理和方法。用提出问题、引入具体直观例子或实例来阐明重要概念、定理和方法。每节都有较多的典型范例，以帮助学生加深对该节主要内容的理解与掌握。对于某些定理，则不拘泥于繁琐的理论推导，而用例子剖析引导，从而减少理论上的难度，使之易教、易学。

(2) 每章均有提纲挈领的内容小结。使学生对该章的主要知识能更清晰地认识和理解，抓住要点。

(3) 有丰富的练习题。每节有基本练习题，每章末选配有综合练习题。题型有思考判断题、填空题、计算题和适量的证明题。书末附有答案与解题提示，以便于自学与检查。

本书共分六章：行列式，矩阵运算，初等变换与线性方程组，向量组的线性相关性，矩阵的对角化及二次型，向量空间及线性变换。前四章是基础部分，第五章是应用部分，第六章是选学部分。本书适于40学时左右的教学要求。

在本教材编写过程中，得到了华中科技大学武昌分校校、系领导的大力支持和帮助。容敏丽、刘国钧、汪昌瑞、陈祖诰、周怀治、林益等教授审阅了此稿，并提出了宝贵的意见，在此表示衷心的感谢。

限于作者水平，书中错漏之处在所难免，恳请读者批评指正。

林升旭

2003年11月于华中科技大学

目　录

第一章　行　列　式

行列式是由研究线性方程组产生的，它是线性代数中的一个基本工具，在讨论许多问题时都要用到它.本章先介绍二、三阶行列式，并把它推广到 n 阶行列式上，然后讨论行列式的基本性质及行列式按行（列）展开的计算方法，最后利用 Gramer 法则求解线性方程组.

§1.1　行列式的概念

一、二，三阶行列式

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1-1}$$

其中 x_1,x_2 表示未知量，$a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 表示未知量的系数，b_1,b_2 表示常数项.用消元法由(1.1-1)式消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2,$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，得

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

同样地，从(1.1-1)式消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1,$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为了方便叙述和记忆，引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

称 D 为**二阶行列式**，有时记为 $D=\det(a_{ij})$.

二阶行列式的计算满足对角线法则，即：从左上角到右下角的主对角线上的元素之积减去从右上角到左下角的副对角线上的元素之积.二阶行列式的计算结果是一个数.

由此法则，方程组的解 x_1,x_2 中分式的分子也可以记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1,$$

其中 D_i 表示把 D 中第 i 列换成(1.1-1)式右边的常数列所得的行列式.

于是,当 $D\neq 0$ 时,二元线性方程组(1.1-1)的解就惟一地表为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

例 1.1.1 用二阶行列式解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -1, \\ 5x_1 + 3x_2 = 3. \end{cases}$$

解 计算二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -6,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 11.$$

于是得到解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -6, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 11.$$

设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.1-2}$$

求解此方程组,可由前两方程消去 x_3,得到一个只含 x_1,x_2 的二元方程;再由后两个方程(或第一和第三个方程)消去 x_3 得到另一个二元线性方程,按照上述解二元线性方程组的方法消去 x_2,得

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{22}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32},$$

把 x_1 的系数记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \tag{1.1-3}$$

其中 D 称为**三阶行列式**.这是由三行三列的 9 个元素构成并由(1.1-3)式计算得到

的一个数.(1.1-3)式右边有 6 个项,每项是位于 D 中既不同行又不同列的三个元素之积,并按照一定的规则,带有正号或负号.这可以用如图 1.1 所示的对角线法则来计算.D 中,从左上角到右下角的对角线叫**主对角线**,从右上角到左下角的对角线叫**副对角线**.主对角线上三个元素之积及平行于主对角线上三个元素之积的项带正号(如图 1.1 中实线连接),副对角线上三个元素之积及平行于副对角线上的三元素之积的项带负号(如图 1.1 中虚线连接).

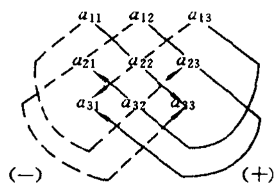

图 1.1

我们称(1.1-3)式的 D 为三元方程组(1.1-2)的系数行列式.根据上面算法,有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}a_{32}b_2$$

$$-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}a_{33}b_2-b_1a_{23}a_{32},$$

则 x_1 可表为

$$x_1=\frac{D_1}{D}.$$

同理可得

$$x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

D_i 是把系数行列式 D 中的第 i 列删去,换上方程组(1.1-2)式右边的常数列所得的行列式.

例 1.1.2 解三元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=4, \\ x_1-x_2+2x_3=5, \\ 2x_1-x_2+x_3=3. \end{cases}$$

解 用对角线法计算行列式,得

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=8,\quad D_1=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=8,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3 & 4 & -1\\1 & 5 & 2\\2 & 3 & 1\end{vmatrix}=16,\quad D_3=\begin{vmatrix}3 & 2 & 4\\1 & -1 & 5\\2 & -1 & 3\end{vmatrix}=24.$$

解得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=3.$$

用对角线法则计算二、三阶行列式，既直观又快捷，可惜对高于三阶的行列式，对角线法就不再适用了. 为了求 $n>3$ 的 n 元线性方程组，有必要把二、三阶行列式进一步推广. 为此我们先分析(1.1-3)式所示的三阶行列式的展开项的结构，从中找出其一般规律.

(1) 在三阶行列式中，每项的元素都是取之于不同行不同列的三元素的乘积.

(2) 每一项的三个元素的行下标按自然顺序排列时，其列下标都是 1,2,3 的某一个排列. 每一排列都对应着三阶行列式的一项，故有 3! =6 项.

(3) 项的符号由对换决定. 在(1.1-3)式中，加正号的三项的列下标排列为

$$123,231,312.$$

它们是自然排列 123 经零次或二次(偶次)对换得到的，例如排列 231 是将 123 中的 1 和 2 对换；然后再将 1 和 3 对换得出的，而加负号的三项的列下标排列为

$$321,132,213.$$

它们是 123 经一次(奇数次)对换得到的. 这就是说行列式每项所带的符号与排列对换次数的奇偶性有关.

为了阐明 n 阶行列式展开项的符号规律，我们引入 n 元排列的逆序与对换的概念.

二、n 元排列的逆序与对换

自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 按一定次序排成一排，称为 n 元排列，记为 $i_1i_2\cdots i_n$. $12\cdots n$ 称为自然排列，n 元排列总共有 $n!$ 个. 例如自然数 1,2,3 共有 3! =6 个排列，我们用 $i_1i_2i_3$ 表示这 6 个排列中的一个.

定义 1.1 在一个 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，若一个大的数排在一个小的数的前面，则称这两个数构成一个逆序. 一个排列逆序个数的总和就称为这个排列的逆序数，记为 $\tau[i_1i_2\cdots i_n]$.

例 1.1.3 求下列排列的逆序数

(1) 32415， (2) 35412， (3) $n(n-1)\cdots 21$.

解 我们用从右到左的方式，求各数字的逆序数.

(1) 排列 32415 中，数 5 前面没有比它大的数，逆序为 0；数 1 前面有 3 个数比 1

大，逆序为 3，数 4 前面没有数比 4 大，逆序为 0；数 2 前面有 1 个数比 2 大，逆序为 1；数 3 排在最前面，逆序为 0，即

$$\tau[32415]=0+3+0+1+0=4.$$

(2) 同理

$$\tau[35412]=3+3+1+0+0=7.$$

(3) $\tau[n\ (n-1)\cdots 21]=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

定义 1.2 排列的逆序为奇(偶)数，则称此排列为**奇(偶)排列**.

在例 1.1.3 中，32415 是偶排列，35412 是奇排列. 而对于排列 $n\ (n-1)\cdots 21$，当 $n=4k,4k+1$ 时，该排列为偶排列；当 $n=4k+2,4k+3$ 时，该排列为奇排列. 自然排列 $123\cdots n$ 的逆序数为 0，它是一个偶排列.

定义 1.3 一个排列中的某两个数的位置互换，其余的数不动，就得到一个新排列，称这样的变换为**一次对换**. 而相邻两个数的对换称为**邻换**.

对换有如下性质：

定理 1.1 一次对换改变排列的奇偶性.

或者说：一个排列进行奇数次对换，排列改变奇偶性；进行偶次对换，排列奇偶性不变.

证 首先证明：一次邻换改变排列的奇偶性. 设 n 元排列为

$$\cdots ij\cdots,$$

将相邻两个数 i、j 对换变成新排列

$$\cdots ji\cdots,$$

由于除 i、j 两数外其余的数不动，所以其余的数之间的逆序没有改变. 若 $i>j$，则新排列的逆序数比原排列的逆序数减少 1；若 $i<j$，则新排列的逆序数比原排列的逆序数增加 1，故一次邻换改变排列奇偶性.

其次，设排列为

$$\cdots ia_1a_2\cdots a_sj\cdots,$$

数 i 与 j 之间相隔 s 个数. 要实现 i 与 j 的对换，可先把 i 与 a_1 邻换，再把 i 与 a_2 邻换，依次下去，经 $s+1$ 次邻换就把 i 调换至 j 之后，即

$$\cdots a_1a_2\cdots a_sji\cdots,$$

然后再把 j 依次邻换至 a_1 之前，这样要经过 s 次邻换才能做到. 从而共经 $2s+1$ 次邻换就完成了 i 与 j 的对换，得到

$$\cdots ja_1a_2\cdots a_si\cdots,$$

利用一次邻换改变排列奇偶性，即可证明定理.

推论 1 任意一个 n 元排列都可经过一定次数的对换变为自然排列，并且所做

对换的次数的奇偶性与该排列的奇偶性相同.

这是因为 $12\cdots n$ 是偶排列，而一次对换改变排列的奇偶性，当排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 是奇(偶)排列时，必须做奇(偶)次对换才能变成自然排列 $12\cdots n$. 故所做的对换次数的奇偶性与排列的奇偶性相同.

推论 2　全体 n 元排列的集合中，奇排列与偶排列各一半.

三、n 阶行列式的定义

有了排列的逆序和奇偶性概念，我们就可把三阶行列式(1.1-3)表成如下形式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{[i_1i_2i_3]}(-1)^{\tau[i_1i_2i_3]}a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}.$$

定义 1.4　把 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$，排成 n 行 n 列，按照下式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{[i_1i_2\cdots i_n]}(-1)^{\tau[i_1i_2\cdots i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}. \qquad (1.1\text{-}4)$$

计算得到的一个数，称为 **n 阶行列式**，简记为 $D=\det(a_{ij})$ 或 $D=|a_{ij}|_{n\times n}$，其中 $\sum\limits_{[i_1i_2\cdots i_n]}$ 表示对所有 n 元排列求和.

(1.1-4)式右边的每一项乘积 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 中的 n 个元取之于 D 中不同行不同列；当行下标按自然顺序排列时，相应的列下标是 $12\cdots n$ 的一个 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$，若是偶排列，则该排列对应的项取正号；若是奇排列，则取负号，用 $(-1)^{\tau[i_1i_2\cdots i_n]}$ 表示. 行列式 D 中共有 $n!$ 个乘积项.

例 1.1.4　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这个行列式主对角线上方的元素都为零，我们称它为**下三角行列式**. 若主对角线下方的元素都为零的行列式，称为**上三角行列式**.

解　我们关注的是 D 的展开式中不为零的那些项. 由于第一行除 a_{11} 外，其余元素为零，所以在 D 的通项中第一个元素 a_{1i_1} 只能取 a_{11}；而第二个元素 a_{2i_2} 不能取 a_{21}，这是因为展开式的每一项中不能存在两个相同列的元素，故只能选取 a_{22}；同理 a_{3i_3} 只能选取 a_{33}；$\cdots$末行只能选取 a_{nn}，从而

$$D=(-1)^{\tau[12\cdots n]}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理，对上三角行列式有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，对角行列式有：

$$\Lambda=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上面行列式中未写出的元素都表示零元素．称主对角线外的元素皆为零的行列式 Λ 为对角行列式．

同理可得

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2\,n-1} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

例 1.1.5 确定四阶行列式中项 $a_{32}a_{14}a_{43}a_{21}$ 所取的符号.

解 把该项的行下标按自然顺序排列得 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$，其列下标排列的逆序数为

$$\tau[4123]=1+1+1+0=3,$$

故该项带负号.

应当指出，n 阶行列式可以有若干种定义，例如，若把 n 阶行列式每一项的列下标按自然顺序排列，则行下标是 n 元排列的某一排列，这便得到行列式的另一个定义式

$$D=\sum_{[j_1j_2\cdots j_n]}(-1)^{\tau[j_1j_2\cdots j_n]}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}. \tag{1.1-5}$$

因为把 n 阶行列式 D 的通项

$$(-1)^{\tau[i_1i_2\cdots i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

的列下标的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 经 N 次对换变为自然排列 $12\cdots n$ 的同时，相应的行下标排

列 1 2⋯n 经 N 次对换变成排列 $j_1j_2\cdots j_n$，即

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn},$$

根据定理 1.1 的推论 1，对换次数 N 与 $\tau[i_1i_2\cdots i_n]$有相同的奇偶性，而 N 与 $\tau[j_1j_2\cdots j_n]$也有相同的奇偶性，从而 $\tau[i_1i_2\cdots i_n]$与 $\tau[j_1j_2\cdots j_n]$有相同的奇偶性，所以

$$(-1)^{\tau[i_1i_2\cdots i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=(-1)^{\tau[j_1j_2\cdots j_n]}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn},$$

因此可知式(1.1-5)是行列式(1.1-4)的等价定义.

练习 1.1

1. 计算下列三阶行列式

$$\begin{vmatrix}0&1&2\\1&2&0\\2&0&1\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}a&1&a\\-1&a&1\\a&-1&a\end{vmatrix}.$$

2. 解下列线性方程组

(1) $\begin{cases}x_1\cos\theta-x_2\sin\theta=a,\\x_1\sin\theta+x_2\cos\theta=b;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=-2,\\2x_1+x_2-3x_3=1,\\x_1-x_2+x_3=0.\end{cases}$

3. 确定下列排列的逆序数和奇偶性.

32145，　52314786，　24687531.

4. 确定下列五阶行列式中项的符号

(1) $a_{34}a_{25}a_{41}a_{12}a_{53}$；　(2) $a_{23}a_{41}a_{14}a_{35}a_{52}$.

5. 写出四阶行列式中

(1) 所有包含有 a_{12}，a_{23}的项.

(2) 所有包含 a_{23}带正号的项.

6. 用定义计算

(1) $\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&0&n-1\\n&0&\cdots&\cdots&0\end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&a_{1n}\\0&0&\cdots&a_{2\,n-1}&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$.

§1.2 行列式的性质

用行列式的定义计算 n 阶行列式，一般要计算 $n!$ 个乘积项，每一项是 n 个元素的乘积，需要做 $n-1$ 次乘积运算，所以一共需做 $(n-1)n!$ 次乘积运算. 当 n 较大时，例如 $n=25$，乘法次数达到 $24\times 25!$，约等于 3.7227×10^{26} 次，这是一个惊人的数字. 这表明用定义计算较高阶的行列式并不是一个可行的求值方法. 为此，我们介绍行列式的基本性质，利用这些性质来简化行列式的计算.

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

把 D 的行与列互换，得到新的行列式，记为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 D^{T} 为 D 的**转置行列式**. 显然 $(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=D$.

性质 1 行列式与转置行列式相等，即

$$D^{\mathrm{T}}=D.$$

证 设 D^{T} 的第 i 行第 j 列的元素为 b_{ij}，则有 $b_{ij}=a_{ji}$，由(1.1-5)定义式，有

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{[j_1\cdots j_n]}(-1)^{\tau[j_1j_2\cdots j_n]}b_{j_11}b_{j_22}\cdots b_{j_nn} \\ &= \sum_{[j_1\cdots j_n]}(-1)^{\tau[j_1j_2\cdots j_n]}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=D. \end{aligned}$$

性质 1 说明行列式的行和列具有同等地位，因而凡是对行具有的性质，对列也一样具有，反之亦然. 故以下所讨论的行列式性质中，只对行加以证明.

性质 2 若行列式的第 i 行(列)的每一个元素都可表示为两数之和，即

$$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij},\quad j=1,2,\cdots,n,$$

则行列式可表示成两个行列式之和：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

或者说：若两个行列式中除第 i 行之外，其余 $n-1$ 行对应相同，则两个行列式之和只对第 i 行对应元素相加，其余保持不变.

证 左边 $=\sum(-1)^{\tau[i_1\cdots i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots(b_{ip}+c_{ip})\cdots a_{ni_n}$

$$
=\sum_{[i_1\cdots i_n]}(-1)^{\tau[i_1\cdots i_n]}a_{1i_1}\cdots b_{ip}\cdots a_{ni_n}+\sum_{[i_1\cdots i_n]}(-1)^{\tau[i_1\cdots i_n]}a_{1i_1}\cdots c_{ip}\cdots a_{ni_n}.
$$

这正好是右边两个行列式之和.

性质 3 用一个数 k 乘行列式，等于将行列式的某一行(列)元素都乘以 k，即

$$
k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

也可以叙述为：若行列式某行(列)有公因子 k，则可把它提到行列式外面(证明略之).

性质 4 若对换行列式的任意两行(列)，则行列式变号，即

$$
D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array},
$$

$$
D=-D_1.
$$

证 因为 D 中的任一项为

$$
(-1)^{\tau[i_1\cdots p\cdots q\cdots i_n]}a_{1i_1}\cdots a_{ip}\cdots a_{jq}\cdots a_{ni_n},
$$

与之相对应的 D_1 中的一项为

$$
(-1)^{\tau[i_1\cdots q\cdots p\cdots i_n]}a_{1i_1}\cdots a_{jq}\cdots a_{ip}\cdots a_{ni_n},
$$

(行下标已按自然顺序排列)