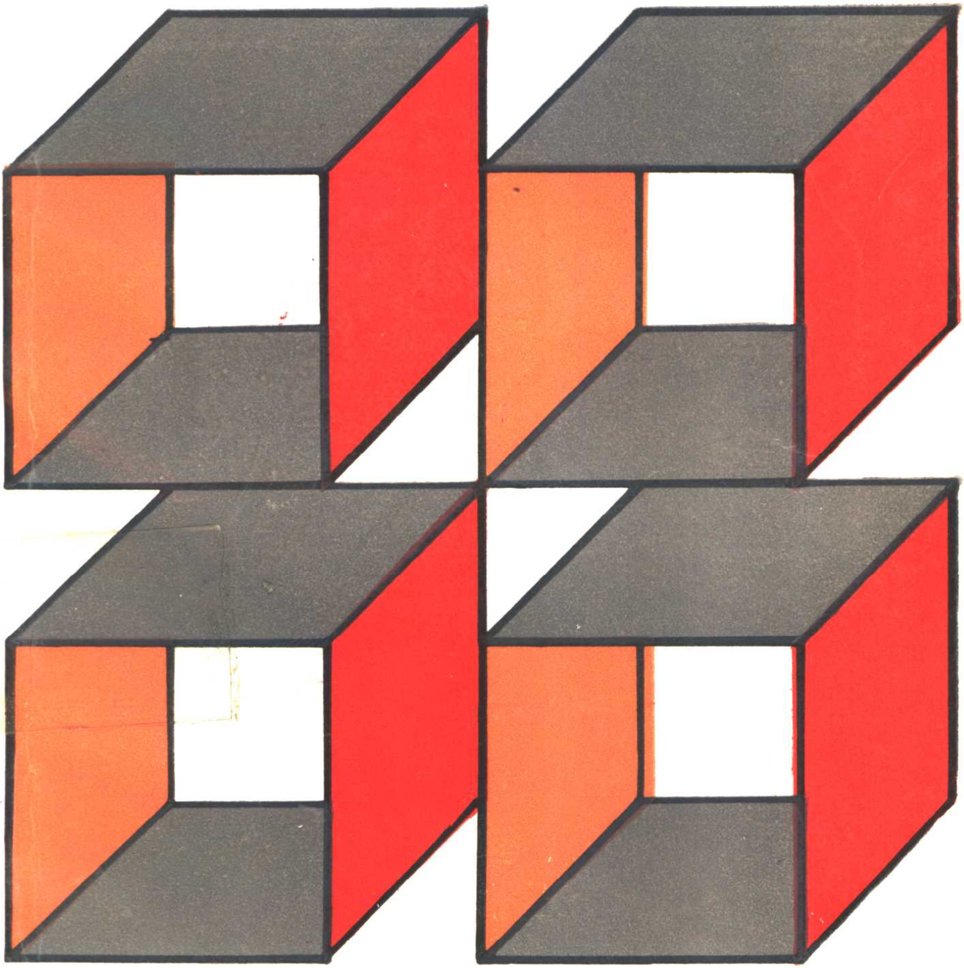
高等学校教材

（第二版）

数学分析

华东师范大学数学系编

·下册·



高等教育出版社

(京)112 号

内 容 提 要

本书第一版于1987年国家教育委员会举办的全国优秀教材评选中获全国优秀奖．第二版是在此基础上并总结近年来的教学实践以及国外教材研究成果修订而成，使全书内容更充实、结构更合理．

本书分上、下册出版．

下册内容：数项级数、函数列与函数项级数、幂级数、傅里叶级数、多元函数的极限与连续、多元函数微分学、隐函数定理及其应用、向量函数微分学、重积分、重积分(续)与含参量非正常积分、曲线积分与曲面积分．

本书可作为高等师范院校或综合大学数学专业教材．

高等学校教材

数 学 分 析

(第 二 版)

下 册

华东师范大学数学系 编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

四川省金堂新华印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 13.875 字数 333,000

1981年6月第1版

1991年10月第2版 1991年10月第1次印刷

印数 0 001—7 097

ISBN 7-04-003500-6/O·1062

定价 4.15 元

目　　录

第十二章　数 项 级 数

第十三章　函数列与函数项级数

第十四章　幂　级　数

第十五章　傅 里 叶 级 数

第十六章 多元函数的极限与连续

第十七章 多元函数微分学

第十八章 隐函数定理及其应用

*第十九章　向量函数微分学

第二十章　重　积　分

第十二章　数 项 级 数

§1　级数的收敛性

读者已经在初等数学中知道：有限个实数$u_1, u_2, \cdots, u_n$相加，其结果是一个实数．本章将讨论"无限个实数相加"所可能出现的情形及其有关特性．例如，在第二章提到《庄子·天下篇》"一尺之棰，日取其半，万世不竭."的例中，把每天截下那一部分的长度"加"起来：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots,$$

这就是"无限个数相加"的一个例子．从直观上可以看到，它的和是1．再如下面由"无限个数相加"的表达式

$$1+(-1)+1+(-1)+\cdots$$

中，如果将它写作

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots,$$

其结果无疑是0，如写作

$$1+((-1)+1)+((-1)+1)+\cdots=1+0+0+\cdots,$$

其结果则是1．因此两个结果完全不同．由此提出这样的问题："无限个数相加"是否存在"和"；如果存在，"和"等于什么？可见，"无限个数相加"不能简单地引用有限个数相加的概念，而须建立它本身严格的理论．

定义 1　给定一个数列$\{u_n\}$，对它的各项依次用"+"号连接起来的表达式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

称为**数项级数**或**无穷级数**(也常简称**级数**)，其中u_n称数项级数

(1)的通项.

数项级数(1)也常写作

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 或简单写作 } \sum u_n.$$

数项级数(1)的前 n 项之和，记为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k=u_1+u_2+\cdots+u_n, \tag{2}$$

称它为数项级数(1)的**第 n 个部分和**，也简称**部分和**.

定义 2 若数项级数(1)的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S(即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$)，则称数项级数(1)**收敛**，称 S 为数项级数(1)的**和**，记作

$$S=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \quad \text{或} \quad S=\sum u_n.$$

若 $\{S_n\}$ 是发散数列，则称数项级数(1)**发散**.

例如：由数列 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ 所产生的数项级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots \tag{3}$$

的第 n 个部分和 $S_n=1-\dfrac{1}{2^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1,$$

所以数项级数(3)收敛，而且它的和等于 1.

数项级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots \tag{4}$$

的部分和数列

$$S_n=\begin{cases}1, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k,\end{cases} \quad k=1,2,\cdots$$

显然这个数列是发散的，因此数项级数(4)发散.

再考察一个例子.

例 1 讨论数项级数

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots \tag{5}$$

的收敛性.

解 级数(5)的第 n 个部分和

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

由于
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$
所以级数(5)收敛,且

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=1.$$ □

由于级数(1)的收敛或发散(简称敛散性)是由它的部分和数列$\{S_n\}$来确定,因而也可把级数(1)作为数列$\{S_n\}$的另一种表现形式. 反之,任给一个数列$\{a_n\}$,如果把它看作某一数项级数的部分和数列,则这个数项级数就是

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})+\cdots. \tag{6}$$

这时数列$\{a_n\}$与级数(6)具有相同的敛散性,当$\{a_n\}$收敛时,其极限值就是级数(6)的和.

基于级数与数列的这种关系,读者不难根据数列极限的性质推出下面有关级数的一些定理.

定理 12.1 (级数收敛的柯西准则) 级数(1)收敛的充要条件是:任给正数 ε,总存在自然数 N,使得当 $m>N$ 和任意的自然数 p,都有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon. \tag{7}$$

根据定理 12.1, 我们立刻可写出级数(1)发散的充要条件: 存在某正数 ε_0, 对任何自然数 N, 总存在自然数 $m_0(>N)$ 和 p_0, 有

$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|\geqslant\varepsilon_0. \tag{8}$$

由定理 12.1 立即可得如下推论, 它是级数收敛的一个必要条件.

推论 若级数(1)收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

例 2 讨论调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

的敛散性.

解 这里调和级数虽然满足推论的结论, 即

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

但令 $p=m$ 时, 却有

$$\begin{aligned}|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{2m}|&=\left|\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m}\right|\\&\geqslant\left|\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}+\cdots+\frac{1}{2m}\right|\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

因此, 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$, 对任何自然数 N, 只要 $m>N$ 和 $p=m$ 就有(8)式成立. 所以调和级数是发散的. □

例 3 应用级数收敛的柯西准则证明级数 $\sum\frac{1}{n^2}$ 的收敛性.

证 由于

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(m+p)^2}\\
&<\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\frac{1}{(m+p-1)(m+p)}\\
&=\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)+\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}\right)+\cdots\\
&\qquad+\left(\frac{1}{m+p-1}-\frac{1}{m+p}\right)\\
&=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+p}<\frac{1}{m}.
\end{aligned}
$$

因此，对任给正数 ε，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$①，使得当 $m>N$ 及任何自然数 p，由上式就有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\frac{1}{m}<\varepsilon.$$

依定理 12.1 推得级数 $\sum\frac{1}{n^2}$ 是收敛的. □

定理 12.2 若级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都收敛，c, d 是常数，则由它们的项的线性组合所得到的级数 $\sum(cu_n+dv_n)$ 也收敛，且

$$\sum(cu_n+dv_n)=c\sum u_n+d\sum v_n.$$

定理 12.3 去掉、增加或改变级数的有限个项并不改变级数的敛散性.

由定理 12.1，级数 $\sum u_n$ 的敛散性取决于：对任给正数 ε，是否存在充分大的正数 N，使得当 $n>N$ 及自然数 p 恒有(7)式成立. 由此可见，一个级数是否收敛与级数前面有限项的取值无关.

由此定理知道，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，其和为 S，则级数

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots \tag{9}$$

也收敛，且其和为 $R_n=S-S_n$. (9)式称为级数 $\sum u_n$ 的第 n 个余

① N 也可取正数 $\frac{1}{\varepsilon}$，因为大于正数 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的自然数，也必大于 $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. 因此，今后我们对极限定义中的 N，将不必再局限于自然数，也可取适当的正数.

项(或简称余项)，它表示以部分和 S_n 代替 S 时所产生的误差.

定理 12.4 在收敛级数的项中任意加括号，既不改变级数的收敛性，也不改变它的和.

证 设 $\sum u_n$ 为收敛级数，其和为 S. 记

$$v_1=u_1+\cdots+u_{n_1},\ v_2=u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2},\ \cdots$$

$$v_k=u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k},\ \cdots.$$

现在证明 $\sum v_k$ 也收敛，且其和也是 S. 事实上，设 $\{S_n\}$ 为收敛级数 $\sum u_n$ 的部分和数列，则级数 $\sum v_k$ 的部分和数列 $\{S_{n_k}\}$ 是 $\{S_n\}$ 的一个子列. 由于 $\{S_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$. 故由子列性质(定理 2.8) $\{S_{n_k}\}$ 也收敛，且 $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k}=S$，即级数 $\sum v_n$ 收敛，它的和也等于 S. □

注意: 从级数加括号后的收敛性，不能推断它在未加括号前也收敛. 例如

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots=0+0+\cdots+0+\cdots=0$$

收敛，但级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

却是发散的(因为它不满足定理 12.1 的推论).

习 题

1. 试讨论几何级数(也称为等比级数)

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots\quad(a\neq 0)$$

的敛散性.

2. 证明下列级数的收敛性，并求其和数:

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 11}+\dfrac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$;

(2) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+\cdots$;

(3) $\sum\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(4) $\sum(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

(5) $\sum \frac{2n-1}{2^n}$.

3. 证明：若级数 $\sum u_n$ 发散，$c\neq 0$，则 $\sum cu_n$ 也发散.

4. 设级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散. 试问 $\sum(u_n+v_n)$ 一定发散吗？又若 u_n 与 $v_n(n=1, 2, \cdots)$ 都是非负数，则能得出什么结论？

5. 证明：若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，则级数 $\sum(a_n-a_{n+1})=a_1-a$.

6. 证明：若数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$，则

(1) 级数 $\sum(b_{n+1}-b_n)$ 发散；

(2) 当 $b_n\neq 0$ 时，级数 $\sum\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\frac{1}{b_1}$.

7. 应用第 5, 6 题的结果求下列级数的和：

(1) $\sum \frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$;

(2) $\sum(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$;

(3) $\sum \frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$.

8. 应用柯西准则判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum \frac{\sin 2^n}{2^n}$;　　(2) $\sum \frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$;

(3) $\sum \frac{(-1)^n}{n}$;　　(4) $\sum \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$.

---

9. 证明级数 $\sum u_n$ 收敛的充要条件是：任给正数 ε，存在某自然数 N，对一切 $n>N$ 总有

$$|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon.$$

10. 举例说明：若级数 $\sum u_n$ 对每一个自然数 p 满足条件

$$\lim_{n\to\infty}(u_n+u_{n+1}+\cdots+u_{n+p})=0,$$

则这级数不一定收敛.

§2 正 项 级 数

一 正项级数收敛性的一般判别原则

若数项级数各项的符号都相同，则称它为**同号级数**. 对于同

号级数，只须研究各项都是由正数组成的级数——称为**正项级数**. 如果级数的各项都是负数，则它乘以 -1 后就得到一个正项级数，并由定理 12.2 及上节习题 3 可知，它们具有相同的敛散性.

定理 12.5 正项级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

收敛的充要条件是：部分和数列 $\{S_n\}$ 有界，即存在某正数 M，对一切自然数 n 有 $S_n<M$.

证 由于 $u_i>0(i=1,2,\cdots)$，所以 $\{S_n\}$ 是递增数列. 而单调数列收敛的充要条件是该数列有界（单调有界定理（定理 2.9））. 这就证得本定理的结论. □

定理 12.6（比较原则） 设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 是两个正项级数，如果存在某正数 N，对一切 $n>N$ 都有

$$u_n\leqslant v_n, \tag{1}$$

那么

（i） 若级数 $\sum v_n$ 收敛，则级数 $\sum u_n$ 也收敛；

（ii） 若级数 $\sum u_n$ 发散，则级数 $\sum v_n$ 也发散.

证 因为改变级数的有限项并不影响原有级数的敛散性，因此不妨设不等式(1)对一切自然数 n 都成立.

现分别以 S'_n 与 S''_n 记级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 的部分和. 由(1)式推得，对一切自然数 n，都有

$$S'_n\leqslant S''_n. \tag{2}$$

若 $\sum v_n$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S''_n$ 存在. 则由(2)式对一切 n 有 $S'_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}S''_n$，即正项级数 $\sum u_n$ 的部分和数列 $\{S'_n\}$ 有界，由定理 12.5 级数 $\sum u_n$ 收敛. 这就证明了(i)；(ii)为(i)的逆否命题，自然成立. □

例 1 考察级数 $\sum\dfrac{1}{n^2-n+1}$ 的收敛性.

解 由于当 $n\geqslant2$ 时，有

$$\frac{1}{n^2-n+1}\leqslant\frac{1}{n^2-n}=\frac{1}{n(n-1)}\leqslant\frac{1}{(n-1)^2}.$$

因为正项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2}$ 收敛(§1例3)，故由定理12.6和12.3，级数 $\sum\frac{1}{n^2-n+1}$ 也收敛. □

在实际使用上，比较原则的下述极限形式常常更为方便.

推论 设

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{3}$$

和

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots \tag{4}$$

是两个正项级数. 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l, \tag{5}$$

则

(i) 当 $0<l<+\infty$ 时，级数(3)、(4)同时收敛或同时发散；

(ii) 当 $l=0$ 且级数(4)收敛时，级数(3)也收敛；

(iii) 当 $l=+\infty$ 且级数(4)发散时，级数(3)也发散.

证 由(5)，对任给正数 ε，存在某正数 N，当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-l\right|<\varepsilon$$

或

$$(l-\varepsilon)v_n<u_n<(l+\varepsilon)v_n. \tag{6}$$

由定理12.6及(6)式推得，当 $0<l<+\infty$(这里设 $\varepsilon<l$)时，级数(3)与(4)同时收敛或同时发散. 这就证得(i).

对于(ii)，当 $l=0$ 时，由(6)式右半部分及比较原则可得：若级数(4)收敛，则级数(3)也收敛.

对于(iii)，若 $l=+\infty$，即对任给的正数 M，存在相应的正数 N，当 $n>N$ 时，都有

$$\frac{u_n}{v_n}>M$$

或

$$u_n > M v_n.$$

于是由比较原则知道，若级数(4)发散，则级数(3)也发散. □

例 2 级数

$$\sum \frac{1}{2^n - n}$$

是收敛的. 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{2^n-n}}{\dfrac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\dfrac{n}{2^n}} = 1.$$

以及几何级数 $\sum \frac{1}{2^n}$ 收敛，所以根据推论，级数 $\sum \frac{1}{2^n-n}$ 也收敛. □

例 3 级数

$$\sum \sin\frac{1}{n} = \sin 1 + \sin\frac{1}{2} + \cdots + \sin\frac{1}{n} + \cdots$$

是发散的. 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}} = 1,$$

根据推论 1 以及调和级数 $\sum \frac{1}{n}$ 发散，所以级数 $\sum \sin\frac{1}{n}$ 也发散. □

二 比式判别法与根式判别法

根据比较原则，可以利用已知收敛或者发散级数作为比较对象来判别其他级数的敛散性. 本段所介绍的两个方法是以几何级数作为比较对象而得到的.

定理 12.7(达朗贝尔判别法，或称比式判别法) 设 $\sum u_n$ 为正项级数，且存在某自然数 N_0 及常数 $q(0<q<1)$.