

〔美〕R·W·柯普兰著

中小学数学教学论著译丛

儿童怎样学习数学

——皮亚杰研究的教育含义

上海教育出版社

责任编辑 陈 和
封面设计 张瑞邦

统一书号：7150·3346

定 价： 2.00 元



——皮亚杰研究的教育含义

儿童怎样学习数学

(美) R·W·柯普兰 著

中小学数学教学论著译丛

李其维 康清镛 译
左 任 侠 校

上海教育出版社

· HOW CHILDREN LEARN MATHEMATICS
TEACHING IMPLICATIONS OF PIAGET'S RESEARCH

(Third Edition)

Richard W. Copeland

Macmillan Publishing Co., Inc.

New York 1979

中小学数学教学论著译丛

儿童怎样学习数学

——皮亚杰研究的教育含义

(美) R. W. 柯普兰 著

李其维 康清德 译

左任侠 校

上海教育出版社出版

(上海永嘉路123号)

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 850×1166 1/32 印张 12.75 字数 302,000

1985年12月第1版 1985年12月第1次印刷

印数 1—8,500本

统一书号: 7150·3346 定价: 2.00元

中译者前言

美国柯普兰(R. W. Copeland)所著《儿童怎样学习数学》一书,正如其副题明示,主要论述“皮亚杰研究的教育含义”。全书既有理论的扼要介绍,又紧密结合数学教学实际,并且还还为读者提供了如何进行科学研究的具体范例。这本书还有一大特点,即它是“从儿童怎样学,而不是从教师怎样教”的角度来阐述儿童逐步把握数学概念的过程的,作者以此作为全书的宗旨,显然是深得皮亚杰理论的要领。

目前,国内译介皮亚杰著作和思想的文章日渐增多,皮亚杰的大名也逐渐为人所知。皮亚杰一生著作很多,涉及的知识领域十分广泛。一般从事教育的同志不可能通读这些著作。但如果要准确地理解他的基本理论,从中获得有益的启示,以期改进教学工作,加速对儿童智力的开发,那么选择一、二本研究、评论皮亚杰理论的专著作比较深入的阅读,还是很有必要的。柯普兰也原是为 此目的而写作这本书的,它的主要读者对象是师范院校的学生和中小学教师。在某种意义上,这是一本小型的皮亚杰著作选。作者浓缩和概括了皮亚杰的十二本著作以及多篇教育专论的丰富内容,写得简明而通俗。这本书共有廿二章,基本上可分为三大部分。第1、2、3章介绍皮亚杰发生认识论的基本观点、他对教育的基本看法以及儿童智慧发展的阶段论。第21、22两章,介绍了一种贯彻皮亚杰思想的教学形式,并对全书作出总结。从第4至第20章则具体分析儿童把握各种数学概念和规则的发展过程,它们构成全书的主要内容。

尽管这本书是迄今为止介绍皮亚杰理论的同类书籍中较为浅近的一本,不过对从未接触过皮氏著作或接触不多的读者来说,阅读时可能还会有一定困难。因此,我打算在此占点篇幅,把皮亚杰的理论及其对教育的影响作一概略的介绍,或许对读者理解本书有所助益。如读者在阅毕全书后,对此没有蛇足之感,那更是作者所愿。

一、发生认识论的基本出发点

一般把皮亚杰称作儿童心理学家或发展心理学家,其实确切地说,他是一名发生认识论者。他创立了叫作发生认识论的理论体系。所谓发生认识论就是通过科学概念的个体发生、发展来研究人的认识的可变性。因此,皮亚杰理论的着眼点是认识论,是个体认识的发展史。

既然要从发展的角度来探讨认识论问题,就必然要重视儿童心理学和发展心理学,因为认识(知识)的增长是不能与智慧的发展分割开来的。所以皮亚杰有时又把发生认识论比作“智慧的胚胎学”。好象生物的胚胎发育一样——遗传的基因群与后天环境中的诸因素相互作用而逐步衍生出成熟的个体来,智慧也要经历这样一个类似的过程。皮亚杰还认为,知识的增长,智慧的发展,不只是量的累积,而必然伴随着认知结构的质的变化,如同个体发育过程中的身体结构也是日趋复杂的一样。因此,在整个皮亚杰的体系中,发生认识论、“智慧的胚胎学”与认知结构的形成理论,三者是统一的。

前面讲到发生认识论是研究科学概念的个体发生的,那么,何谓科学概念?根据皮亚杰的理论,科学概念包含两大类型,一类是逻辑数学的概念,它们的形式化就是人的认知结构;另一类是对于现实世界的(自然的、社会的)规律性的认识,它们的形式化则是现

实的客观因果性结构。发生认识论的最基本观点是，这两类知识和两类结构都派生于人的活动，前者是活动中主体动作内化的结果，后者是活动中客观算符(算子)彼此协调的结果。正因为它们都是在活动中发生发展的，所以这两种结构——外部的因果结构与我们自己的(主体的)运算结构之间存在着某种持久的、尽管不是同一性的联系。皮亚杰曾在一次题为“心理学是什么”的讲演中说：“代数的结构、几何结构、基本的动力结构(因果结构)、一般的逻辑结构，我花了五十多年时间从事的就是这类研究。”^①皮亚杰所指的科学概念就是这些结构，认识的发展即指这些结构的发展。

发生认识论探悉了个体在与外物相互作用的活动中，如何随着智慧的发展，逐步把握那些通过人类实践而沉淀、凝聚起来的“逻辑的格”的。它的主要贡献在于从发展的角度回答了人为什么能获得对世界的真理性认识这一重大的认识论问题。人的知识是不断构造起来的，不仅认识的形式(运算逻辑结构)如此，而且认识的内容(现实结构)亦如此。两类结构之间的紧密联系一方面表现在现实结构的获得不能离开运算逻辑结构，另一方面也表现在现实结构可以转化概括为运算逻辑的结构。它们的关系是内容与形式的对立统一。统一的基础就是主、客体相互作用的活动。

二、两种经验、两种抽象和两种水平的反省

感性活动不同于感知经验，这是我们了解皮亚杰的理论首先要明确之点。皮亚杰反对认为科学知识起源于感知的经验论解释，但并不一般地反对感知经验，感知经验也可以向我们提供有关外物的许多信息。视觉、听觉、触觉等等对形成物理经验形态的知识起着重大的作用，如关于木块浮在水里，水结成冰，物体的颜色，声音的高低，物体表面的光滑程度等等。但它们对另一类更为重要

^① 《美国心理学家》，1978年第7期。

的知识形态——逻辑-数理知识的形成则无能为力了。后者不是产生于静止的感知，而是产生于主体对客体所施加的动作即主体的感性活动之中。

皮亚杰的感性活动概念远比感知经验具有更为丰富的内涵。一般说，感知经验从属于感性活动。在主客体积极的相互作用的活动中，客体才能被更好地感知。更为重要的是，感知所获得的仅是静止的心理表象，只是一些图式化的东西，它们之间的联结在还没有从属于思维的运转方面并与后者协调一致的时候，是远不能达到逻辑的水平，实现对事物的因果认识的。而思维的运转方面则是主体动作的内化与概括，它并不导源于感知的经验而是产生于动作的经验——皮亚杰称之为逻辑-数理的经验。在这个意义上，我们也可以称皮亚杰为广义的经验主义者。

在本书第2章中，皮亚杰谈到了一个具体的关于逻辑-数理的经验例子。皮亚杰有一位数学家朋友。这位朋友小时候有一次在沙滩上玩耍，他把十个卵石排成一行。他发觉无论从哪端开始数都是十个；然后他又把它们排成另外的形状，数出来的数目仍然不变。他感到十分惊奇，并由此产生了对数学的兴趣。皮亚杰认为，这件事对我们成人来说极为平常，但对儿童来说却是一件了不起的发现。他证实了加法交换性的存在——石子的总数不依赖于计数的次序。这一认识不是由感知的直观提供的，感知的直观充其量只形成各种形状的心理表象。正是儿童自己的动作才使儿童有了数和交换性的观念。倘若没有这些实际的动作，那么表象就永远是表象，即使是一连串的表象，也不可能产生对总数和交换性的认识。

皮亚杰还举了另一个关于重量传递性的例子来说明逻辑-数理经验的重要。美国心理学家斯墨茨隆德曾做过一个让五、六岁的儿童学习重量传递性的实验。有三个物体， A 与 B 一样重， B 与 C 一样重。显然，根据等量传递的性质， A 与 C 也应该一样重。

但是实验仅让儿童看着天平，并不让他们实际动手操作。因此，这种外界的强化并不足以建立传递性的认知结构。在不能直接用天平比较 A 与 C 从而直观地告知他 A 与 C 一样重的情况下，儿童是不会根据传递性说出 A 与 C 的重量是相等的。

通过上面两个例子可以看出，皮亚杰所谓的逻辑-数理的经验，是感性的而不是感知的。正是这种经验，为日后逻辑-数理的抽象结构的形成奠定了基础。一切认知结构都由此而来。皮亚杰在区分了两种经验的同时，又区分了两种性质不同的抽象，即所谓本义的抽象和“反省的”抽象。前者是对感知获得的物理经验的抽象，后者则是对动作中的逻辑-数理经验而言。

反省的抽象对认知结构的形成具有举足轻重的作用。皮亚杰认为，“从一个动作或一个运算中抽出一种属性，只是把这种属性从其它被弃置的属性中分离出来是不够的（即保存其‘形式’而弃置其‘内容’）。这种保存下来的属性或形式还必须另外转移于别处，就是转移到动作或运算的另一种水平上”^①。就是说，任何动作或运算，它们作为主体的活动，总有其形式方面。活动的形式经过重复，概括就会形成一定的格式；而这些格式又趋向于综合，趋向于彼此间的协调。这种协调具有一种组织化或结构化的倾向，从而导致认知结构的产生。皮亚杰所说的所谓“保存”活动的形式的属性并把它们“转移于别处”，即指通过反省抽象产生认知结构之意。在认知结构的逻辑中蕴含、概括着这些形式的属性。当然，反省抽象存在着不同的意识水平。它的最高的层次就是主体对认知结构的自我意识。在多数情况下，这些结构往往不被主体自身所认识：它在意识中是不清晰的，但可通过主体的动作或思维中推理的实际过程而显现出来。

皮亚杰认为，存在着两种性质稍有不同的反省。第一种是由前运算的动作思维（直觉思维，即本书中所说的“滥经”水平的思

^① “皮亚杰的理论”，载缪森主编的《儿童心理学手册》，第一卷，第九章。

维)向具体运算过渡的反省。动作或动作格式之间的协调,它们所产生的反省,必然会“折射”到某个平面并在这个平面上进行加工,于是形成具体运算水平的认知结构。然后,在此基础上,具体运算之间或具体运算格式之间,又产生新的协调。由这种协调而产生的反省又导致新的运算,即形式运算的产生。由于后者不是从动作而是从运算中反省得到的,所以它跟动作只有间接的联系,当然,它们最初的根源都是感性活动中有关动作协调的逻辑-数理经验。“源远”才能“流长”,因此,要使高级水平的智慧运算充分发展,必须重视逻辑-数理经验的积累。

关于动作和运算,具体运算和形式运算的区别,下面我们介绍皮亚杰关于儿童智慧发展阶段论的内容时再作进一步的说明。

三、儿童智慧发展的阶段论

皮亚杰认为,儿童智慧的发展一般都要经历如下四个阶段:感知运动阶段,前运算阶段,具体运算阶段和形式运算阶段。它们彼此衔接而不能超越;大体对应于某个年龄阶段,但又存在着相当大的个体差异。有些人也许由于早期阶段的发展不善,甚至终身不能掌握形式运算。这四个阶段各有其质的特点,但前两个与后两个阶段之间的区别尤为重要。因为以运算的获得为标志,儿童从此步入了逻辑思维的门槛。本书所述的大部分数学观念也是在这之后达到所谓“阶段3”的水平而被儿童把握的。

那么,什么叫运算呢?运算就是内化了的、可逆的、组成系统(结构)且具有守恒性的动作。运算是皮亚杰理论中最核心最关键的概念。皮亚杰曾指出,知识总是与动作联系在一起。这里的“动作”就广义而言,它包括运算;“知识”也是一种广义的知识,它包括逻辑-数理的知识和广义的物质世界因果性的知识。两类知识的密切联系,盖因为它们都是在主体活动中产生的——前者直

接为主体动作协调的产物，它的形式表述就是皮亚杰所独创的运算逻辑；后者虽然反映的是外界信息(客观算子)之间的协调关系，但它不能脱离主体的动作协调而实现。概言之，人们只有通过认知结构和运算逻辑，才能获得大千现实世界的各种具体的科学知识，了解事物之间错综复杂的因果规律。

儿童在大约一岁半到二岁以前处于感知运动阶段。这时他们与客观世界的联系仅表现在感知动作方面，而且最初是主、客体不分的。主体仿佛是世界的中心，还不能意识到自己的存在。随着动作的发展，终于产生了一种皮亚杰称之为“哥白尼式的革命”，儿童开始把自己仅看作是由无限众多客体组成的世界中的一个客体而已。这个“哥白尼式的革命”是感知运动智慧的最大成就。它表现在三个方面。一是恒定客体的格式形成了，如在玩具前拉上一块幕布后，玩具看不见了，但儿童仍知道它还在原处。二是空(间)-时(间)的组织也达到了一定水平。形成了空间“位移群”的基本结构。对恒定客体的定位可以按“位移”的线路追踪出来。位移不仅反映了空间的特性，同时也体现了时间序列的特点，因为位移总是遵循一定顺序发生的。三是因果性认识的萌芽。皮亚杰认为，恒定客体及其位移的体系又是同因果性结构不能分离的。儿童最初的因果性认识产生于自己的动作与动作的结果的分化，然后扩及客体之间的运动关系。当儿童能运用一系列协调的动作实现某个目的——如用手拉动面前的毯子，拿到放在毯子上的玩具的时候，就意味着因果性认识已产生了。即使在如此简单的活动中，也可以看出儿童的因果认识(因果性结构)与逻辑-数理结构之间的密切联系，因为在这一活动中已蕴含着丰富的逻辑-数理经验：有对应的“逻辑”——作为手段的动作与作为目的的效果的对应；有次序的“逻辑”——得到玩具在拉动毯子的动作和毯子的移动之后；有包含的逻辑——整个活动中包括着一系列的简单动作。

在一岁半、二岁到六、七岁之间，儿童处于前运算时期。这一

阶段的特点是语言和心理表象等符号功能逐渐产生了。符号功能的出现对儿童智慧发展来说,意义也很重大。因为有了心理表象,才使心理上的思维成为可能。但是,由于这时候儿童的心理表象还只是物的图象,并不是动作格式的内化,换言之,内化仅具有静态的性质,所以儿童还不能在思维中把事物的图式与造成图式改变的动作的格式协调起来,不能使前者从属于后者,因而无法进行真正符合逻辑的推理。例如,当把一个“矮”而“粗”的杯子里的水倒入另一个高而“细”的杯子时,儿童或注意到高度(液面高了),或注意到宽度(液面大了),于是他们认为水量变了。这就说明,由知觉而得到的心理表象在思维中占有支配地位,他们还没有把初始的图式和倾倒后的图式,跟倾倒动作本身联系起来考虑,因而得出错误的结论。显而易见,即使前运算时期的儿童这时是在进行推理,他们的推理也只是不合逻辑的“滥译”。本书所述各种数学概念的“阶段2”水平,都是指这种情况。

概言之,前运算的儿童尽管有了内化功能,但严格地说,他们还不能把动作加以内化。儿童在前运算水平的心理表象几乎完全是对静态事物的表象,他在再现运动的或变形的表象时会遇到困难。皮亚杰认为,表象不足以产生运算结构,即使它是运动的或变形的表象,因为表象本身仍保持着不连续的性质,也就是说,还未表现出客体守恒性的特征。正如列宁所指出的:“表象不能把握整个运动,例如它不能把握秒速为30万公里的运动,而思维则能够把握而且应当把握。”^①思维的运算只能由动作内化而来。

动作要内化为运算,必须得到可逆性的支持。具有可逆性的内化动作才是真正的运算。这时表象就从属于运算了。所谓可逆性,即指动作可以在心理上逆转。前述例子中儿童之所以回答错误,就因为他还不能“在头脑中”把倾倒的动作逆转过来,使水恢复原来的样子,以致受到眼前知觉的愚弄。

^① 《列宁全集》第38卷,人民出版社,1959年版,第246页。

运算的到来，意味着具体运算这一新的智慧时期的开始。儿童在类、关系、数和测量、时间和空间以及因果性等概念方面，均有了长足的进步。智慧的成就，硕果累累。但所有这些果实，形象地说，都长在“类的逻辑结构”和“关系的逻辑结构”这两棵大树之上，有的甚至结在嫁接于两树的枝条上。还应指出，这两棵树的树干正是可逆性。以可逆性来说明认知结构和解释智慧，这是皮亚杰的一大创见，也是一大特色，把握了这一点，也就掌握了理解皮亚杰理论的钥匙。本书谈到的大部分概念，都是由于可逆性之功而使儿童能够理解的。

可逆性分为两种，一种是反演可逆性，另一种是互反可逆性。它们分别支配着类的系统和关系系统，成为类的运算逻辑和关系的运算逻辑的支柱。

反演可逆性，按照皮亚杰的说法，即一个运算可由另一相反进行的运算消除掉，其结果为0。这个消除的运算就是原运算的反演运算，同样，原运算也是消除运算的反演运算。减法就是加法的反演运算。红花加上白花等于全部的花，从全部的花中拿掉红花或白花就等于白花或红花。高杯中的水可以倒入矮杯中，也可以从矮杯中再倒回去。这些运算之间的关系都是反演关系。有了这种反演可逆性，儿童才能认识部分与整体，总类与子类，集合与元素之间的包含关系。

互反可逆性的特征是，原运算与它的互反运算相结合而产生一个等值。如在天平的平衡问题中，如果在天平一端挂一重物，天平失去平衡，如何才能使天平重新恢复平衡呢？有两种方法，一是把重物拿掉，二是在天平的另一端挂上同样重量的物体。前者就是反演运算，其结果是以消除整个东西实现平衡，后者是互反运算，其结果则是在新的条件下实现平衡（即产生一个等值）。互反可逆性涉及两个事物的关系。两个事物之间的最一般关系又分为两种，一种是对称关系，另一种是不对称关系。兄弟关系是对称

的,兄妹关系则是不对称的。数学中的“等于”关系也是对称性的,而“大于”、“小于”则是不对称的。

儿童在具体运算阶段所获得的主要智慧成就有:他们产生了类的认识,掌握了类的逻辑,能够进行加法性和乘法性的分类(详见第五章);他们也能在互反可逆性的基础上,借助传递性,把许多同类事物按某种性质排成一个序列,还能把不同类事物(互补的或非互补的)进行序列的一一对应,也能进行二维(二元)乘法性的序列排列(详见第6章);在包含关系和序列关系综合的基础上,儿童在运算水平上掌握了数概念,并使空间和时间的测量活动成为可能,对空间和时间的认识有了很大发展(详见本书有关各章)。此外,以长度、质量、体积、面积、重量等等守恒性的出现为标志,儿童对现实的物质世界的认识也大大向前跨越了一步。

具体运算对儿童思维能力的扩展作用很大,但毕竟仍有不足,因为它仍离不开具体事物的支持或仅是对具体事物进行类或关系的运算。而且这两个系统还未能综合起来而协调为一个整体的结构。只有到形式运算阶段才能达到这一水平。

形式运算与具体运算的最大区别,就是思维可以脱离具体对象而在抽象形式的层次上展开,思维表现为命题的假设-演绎过程。所以形式运算又称为命题运算。这时候,儿童的逻辑也由上一阶段的关系逻辑和类逻辑发展到命题逻辑或演绎逻辑,或者,更确切地说,关系逻辑和类逻辑被吸收融化到了后者之中,因为即使在形式运算的命题内,关系和类仍是存在的,命题的内容仍是表达某种关系或类的性质。因此,形式运算的演绎逻辑也可以说是一种命题间的逻辑。它的运算是一种对具体运算再加反省的运算,即所谓运算之上的运算。皮亚杰又把形式运算称为二次幂运算(或二阶运算)。

从逻辑-数理方面来说,这一时期的儿童产生了两种新的整体结构:四元转换群结构和组合性格结构。群与格是皮亚杰从抽象

代数学引入的概念,用以作为把这些认知结构形式化的模型。

四元转换群是以可逆性为轴心构造起来的整体认知结构。任何一个命题都有四个转换的命题,或者说,它可以转换成四个互相区别的命题。其中有一个转换是重复原来的命题,称为恒等性转换(I)。另三个转换是依据于反演可逆性的反演性转换(N)和依据于互反可逆性的互反性转换(R)以及建立在这两种可逆性基础之上的对射性转换(O)。这四次转换所获得的四个命题(其中有一个原命题)就构成了一个关于“转换”的群,因为它们之间的关系符合群结构所必须有的四个基本条件。四元转换群中两种可逆性的综合体现在对射性转换上,因为对射就是互反的反演或反演的互反。

组合性结构是形式运算总的系统特征。皮亚杰认为,“形式思维最根本的性质就是在现实性与可能性之间的可逆性”^①。组合性结构就是由这些可能性组成的。它大大增强了智慧的演绎推理能力。组合性结构一经构成,儿童就能把物体和物体、因素和因素组合起来,或是把概念和概念或命题和命题组合起来,去推论某一特定的事实。组合性结构最简单的运用是实际的组合运算;其复杂的形式则是命题的组合,以二元命题为例,它共存在16种逻辑关系,它们是可以相互转换的,由此构成了一个命题的组合系统。

以上所说的是形式运算的逻辑-数理方面,是这一阶段儿童认知结构的形式化。儿童运用他的认知结构能够完成认识世界的任务,并形成了一系列典型的形式运算格式,例如,比例格式,排列组合格式,杠杆平衡格式,概率运算格式,双参照系格式,等等。皮亚杰认为,这些基本运算格式中一个小数目就足以解释非常复杂的物理结构,如度量、空间、时间、运动、物理因果等等概念的发展。这些格式中蕴含着实际的物理内容,它们是形式运算的物理方面。这两方面是密不可分的。逻辑-数理结构与物理结构之间的关系,

^① 皮亚杰和英海尔德:《从儿童到青年逻辑思维的发展》,1958年英文版,第255页。

类同于遗传学中基因型与表现型的关系。

以上我们约略介绍了儿童智慧发展阶段的一般特点，读者倘对此有个基本认识，那么阅读本书就不致感到十分困难了。在阅读本书时还要注意智慧发展阶段与概念掌握的三个阶段的区别。本书介绍的数学观念，大体有三种情况，它们分别在前运算、具体运算和形式运算时期获得，尤以具体运算时最多(见附录)，因为绝大部分数学观念都需要可逆性的支持。这正是强调前运算向运算发展的重要性的原因。

四、皮亚杰理论对教育的影响

皮亚杰理论中，蕴含着丰富的教育意义。它对教育产生了多方面的深远影响。皮亚杰指出：“教育的最高要求应该(使学生)具有逻辑推理能力以及掌握复杂抽象概念的能力”，“智慧训练的目的在于形成智慧而不是贮存记忆，是培养出智慧的探索者，而不仅仅是博学之才。”^①皮亚杰认为他在发生认识论中所发现的东西完全可以运用于教育领域，它能够超出传统的学习理论——他认为这种理论忽视主体的构造作用过于强调外因，从而提供另一种学习的方法。

从皮亚杰理论的基本事实中，可以引导出如下一些教育原则。

1. 关于学习的顺序

学习顺序的问题指学习的(心理)准备性问题，即向一定年龄的儿童讲授的材料存在着固有限制，有准备才能进行有效的学习。皮亚杰反对布鲁纳(J. S. Bruner)等人所主张的所谓只要“采用智慧上诚实的方法”，就可以对任何年龄的儿童，教会他想要教的任何东西。

要在教学中具体贯彻准备性的原则，首先必须做到不去教给

^① 皮亚杰：《教育科学与儿童心理学》，1970年英文版，第61页。

儿童那些明显超出其认知发展阶段的材料；其次教师应力图避免从外部人为地加速儿童对某种问题的认识过程。对内容的彻底掌握比速度快慢更为重要；第三，向儿童教授新概念应尽可能按其在自发的认识过程中的顺序进行。例如，根据皮亚杰的研究，“儿童几何概念的心理发展的次序更加接近于现代几何的演绎结构或公理结构的次序，而并不接近于几何学本身发展的历史次序”（详见本书第16章）。因此应根据这一发展顺序为儿童选择适当的几何活动。

对学习顺序和学习准备性的强调，必然引起两个密切有关的技术性问题：一是关于儿童的准备性如何诊断，二是如何进行个别化的教学以适合各人的准备性。本书详尽介绍了许多鉴别儿童准备性的诊断活动，不妨一试。当儿童对某一概念处于阶段2的过渡水平时，是进行教学的最好时机。从理论上说，应针对每个儿童准备性的特点来制定适合每个人的个别化的教学程序。实际执行可能有一定困难，但教师应尽可能考虑儿童的个别差异，这是皮亚杰式教育的重要原则之一。

2. 课程的内容

课程的内容，也是皮亚杰理论对教育影响的一个重要方面。皮亚杰的许多经典实验基本上均属于一种广义的“数学”。把这些内容引进初中、小学课程（主要是小学），特别是围绕守恒性或不变性（它的基础是可逆性）进行逻辑训练，对儿童思维水平的提高和学习能力的发展，意义极为重大。因为各种基本的推理形式——逻辑的、算术的、几何的以及物理的推理，都是建立在运算守恒性原理之上的。

3. 教学方法

从皮亚杰理论中，至少可以总结出以下几个方法：

① 活动法 如前所说，智慧自动作发端。活动是连结主、客体的桥梁。把活动原则实施于教学过程，就应放手让儿童去动手、