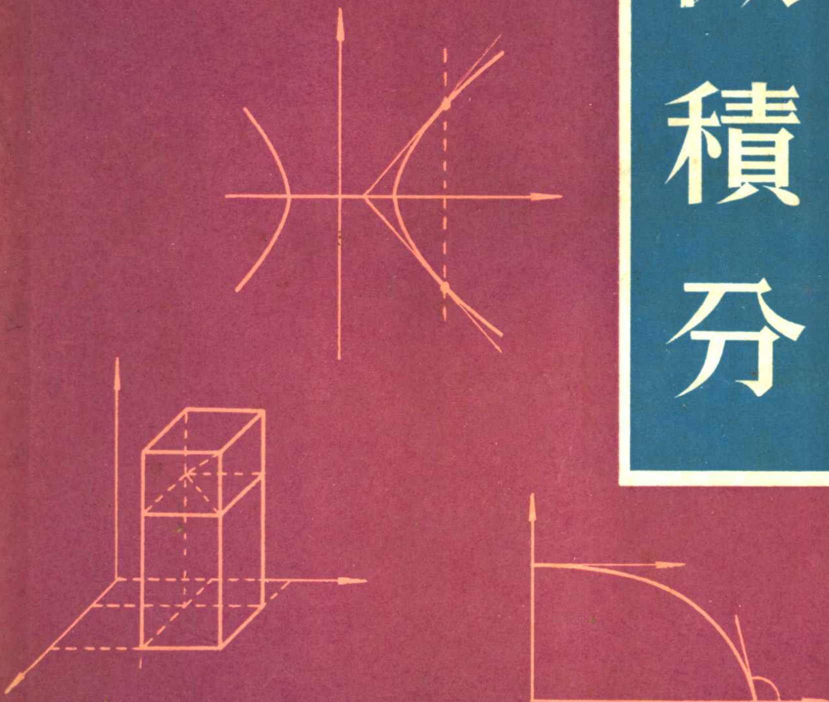
《微積分》編寫組

微積分



商 務 印 書 館

微　　　積　　　分

《微積分》編寫組

商　務　印　書　館

內 容 提 要

本書內容包括函數和極限、一元函數微分學、一元函數積分學、多元函數、微分方程和優選法共六章，供工科院校數學教學時數較少的專業作教材，也可供理科院校部分專業使用。

微 積 分

《微積分》編寫組

出版者 商務印書館香港分館
香港皇后大道中三十五號

印刷者 商務印書館香港印刷廠
香港九龍炮仗街七十五號

1975年7月港一版 1978年4月重印

目　　录

绪　言

一

科学的发生和发展一开始就是由生产决定的．高等数学（其中主要的部分是微积分）和其他科学一样，也是在社会生产的推动下发展起来的．

在中国古代，由于长期生产劳动的实践，已经孕育着微积分思想的萌芽．如西汉刘歆在《西京杂记》中提到的"记里车"，东汉张衡制造的"浑天仪"，蜀汉诸葛亮使用并改进的"木牛流马"，都要设计制造圆形的物件，要求更精确的圆周率，从而产生了魏晋时刘徽提出的"割圆术"，他从圆内接正六边形做起，令边数成倍地增加，即从6而12，而24，而48，……而384，……而3072，用这个正3072边形面积来逼近圆面积，就得到π的更精确的值3.1416，"割之弥细，所失弥少；割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。"这就包含着微积分中"无限细分，无限求和"的思想方法．又如隋代建造的赵州桥（图0-1），这座跨度达37米的大石拱桥，系用一条条长方形条石砌成，一段段直的条石却砌成了一整条弧形曲线的拱圈，这就是微积分中"以直代曲"这个基本思想的生动

图 0-1

现实原型.

到十六、十七世纪,欧洲处于由封建社会向资本主义社会发展的时期,适应资本原始积累的需要,在残酷剥削劳动人民的基础上,生产力得到了很大的发展.机械在制造业和采矿中的使用、远洋航运的发展以及使用枪炮的战争活动,提出了许多迫切需要解决的科学技术课题,从而推动了力学、天文学和数学的发展.航海事业需要确定船只的方位,需要测定地球的经纬度和确定地球与其他星球之间的位置关系,它推动了对天体运动的深入研究;船舶的研制,必须探讨流体运动的规律;战争用枪炮射击弹丸,必须研究抛射体运动;机械、建筑、水利等方面也都提出了种种课题.在实际需要的基础上,通过大量观察和系统实验,人们逐步采用较新的数学方法来帮助总结事物的运动规律.例如:开普勒根据长期天文观测资料总结出行星运动三大定律;伽里略系统地研究了落体速度变化的规律,并提出了惯性定律,他把物理实验与数学分析方法结合起来,精确地用数学公式描述了物理学规律.以机械运动中基本问题之一的速度、路程和时间三者关系这个问题为例,在等速运动的情况下,显然,速度=路程÷时间;但在变速运动的情况下,单位时间所行的路程已不是常数,对这种速度随时间变化的问题,原来的初等数学就无能为力了.因为初等数学是常量数学,只能反映相对静止的状态,无法描述变速运动中速度、时间和路程之间的复杂关系.这里的矛盾要求数学突破只研究常量的局限性,发展为用辩证的思想方法研究物体运动过程的新工具.微积分就是在当时的社会历史条件下,适应客观现实的需要,在有了变数的基础上产生的.正如《自然辩证法》指出的:"数学中的转折点是笛卡儿的变数.有了变数,运动进入了数学,有了变数,辩证法进入了数学,有了变数,微分和积分也就立刻成为必要的了,而它们也就立刻产生,并且是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的,但不是由他们发明的."

二

为了对微积分所研究的问题大体上先有一个初步的认识，现在我们提出三个在初等数学中难以解决的问题，并作一些初步的分析.

问题一 求自由落体在下落后一秒钟这个时刻的瞬时速度.

这是求一个作变速运动的物体在某一时刻的瞬时速度问题.我们知道,根据物理实验总结出自由落体的运动规律为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中，s 是下落的路程(米)，g 是重力加速度(米/秒^2)，通常取 $g=9.8$，t 是下落的时间(秒). 这一公式给出了自由落体下落的路程与时间的关系，现在就是要我们从这一关系中求出物体在下落后一秒钟这一时刻的速度.

我们先回忆一下初等数学中求速度的方法. 假定一个运动物体在时刻 t_1 走过的路程是 s_1,到时刻 t_2,它走过的路程是 s_2,那末,在 $t_2-t_1=\Delta t$ 这段时间内,物体走过的路程为 $s_2-s_1=\Delta s$,因此,物体在这一段时间内的运动速度为

$$v=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

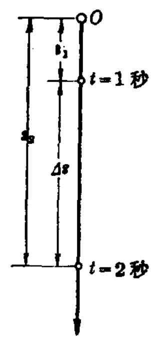


图 O-2

对于等速直线运动，由于物体的速度是不变的,从上式求得的速度是物体在任一时刻的速度. 但是对于变速运动，上式给出的只是 Δt 这段时间内速度的平均值,并不是某一时刻的瞬时速度. 而且这样的平均值随着所取时间间隔的不同而不同,例如,自由落体在 $t=1$ 秒到 $t=2$ 秒这段时间内,下落的路程为

$$s_2-s_1=\frac{1}{2}g(2)^2-\frac{1}{2}g(1)^2=\frac{3}{2}g=\frac{3}{2}\times 9.8=14.7(米),$$

而在 $t=2$ 秒到 $t=3$ 秒这段时间内，下落的路程为

$$s_3-s_2=\frac{1}{2}g(3)^2-\frac{1}{2}g(2)^2=\frac{5}{2}g=\frac{5}{2}\times 9.8=24.5(米).$$

这两段时间间隔虽然都是 1 秒，但下落的路程不一样，平均速度也不相等.

在初等数学中研究运动速度只能做到这一步，因此，用初等数学方法不能解决我们这里所提出的问题.

如何求自由落体在某一时刻(例如 $t=1$ 秒)的瞬时速度，这就是微积分中要解决的一个问题.

问题二 求一个曲边三角形的面积.

在初等数学中，我们已学过三角形、矩形、梯形等面积的计算. 在生产建设和科学实验中，经常要求我们计算许多不规则的平面图形的面积. 如果这些图形都是由直线围成的，那末，我们总可以把它分割成有限个三角形和矩形，分别算出这些三角形和矩形的面积，然后加起来就得到整个图形的面积. 但现在是要计算曲边三角形——即一边是曲线的三角形——的面积，例如，由抛物线 $y=x^2$，直线 $x=1$ 和 x 轴围成的曲边三角形(图 0-3)的面积，这种图形的面积怎样计算呢?

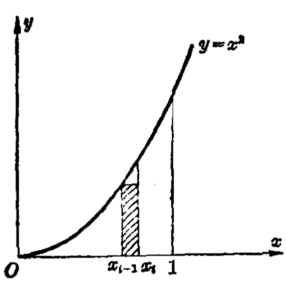


图 0-3

我们可以用平行于 y 轴的直线将曲边三角形分成许多小块，但由于 $y=x^2$ 的图形是曲线，无论怎样分，每一小块总有一边是曲线，因此，在这里我们遇到了“直”与“曲”的矛盾.

古代的“割圆术”和古代劳动人民用一块块条石砌成拱形的桥洞给了我们启示，从整体看是曲的，从局部看是直的，在局部上可

以“以直代曲”．因此可以创造条件来促使矛盾的转化．把曲边三角形的底边分成 n 个相等的小区间(记小区间长度为 Δx)，过这些区间的端点引平行于 y 轴的直线，将曲边三角形分成 n 个狭窄的曲边梯形（即有一腰是曲线的梯形）．对于每个窄的曲边梯形，分别作一个小矩形来代替它，这样，“化整为零”，“以直代曲”，把这个曲边三角形化为许多小矩形．例如第 i 个小矩形，它的底为 Δx，高为 $y=x_{i-1}^2$，记这个矩形的面积为 ΔA_i，则

$$\Delta A_i=x_{i-1}^2\cdot\Delta x.$$

我们对每个窄曲边梯形都这样做，然后“积零为整”，将 n 个这样的小矩形面积累加起来，用 A_n 表示它们的和，即

$$A_n=\Delta A_1+\Delta A_2+\cdots+\Delta A_n,$$

那末，A_n 就是这个曲边三角形面积的近似值．不难想象，当曲边三角形分成的块数愈多，也就是 n 取值愈大，A_n 愈接近于曲边三角形的面积．但不管 n 取什么值，A_n 总是这个曲边三角形面积的一个近似值，而不是精确值．怎样才能使近似值转化为精确值呢？这就是微积分中要解决的另一问题．

问题三　用一块正方形铁皮制作一只无盖油盘，应怎样做才能使其容积最大？

在生产实践中，为了充分利用原料，经常会碰到怎样用料最省，或消耗最少，或效率最大等问题，这在数学上叫做最大值与最小值问题．

在一块边长为1尺的正方形铁皮上，四角截去边长为 x 的小正方形(图 0-4)，再按图中虚线折起来，做成一个无盖油盘．从图可以看出，如果剪去的正方形太小，制成的油盘底面积虽然较大，但高就小(注意，剪去的正方形的边长就是油盘的高)，所得油盘的容积不大；反过来，如果剪去的正方形太大，底面积较小，得到油盘的容积也不大．那么，剪去的正方形的边长该多大才能得到容积最大的油盘呢？

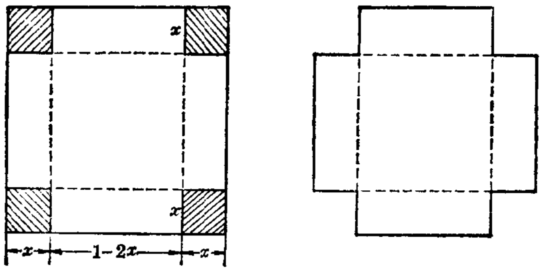


图 0-4

从图看出，油盘的容积为

$$V=x(1-2x)^2.$$

对一些 x 的值我们可以算得 V 的值如下表：

x	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{10}$
V	0.0160	0.0370	0.0625	0.0720	0.0741	0.0729	0.0640

从这些数据可以看出，当 x 由大变小时，V 相应地由小变大，但 $x=\frac{1}{7}$ 时的 V 反而较 $x=\frac{1}{6}$ 时的 V 为小，当 x 继续变小时 V 也随着变小．从而看出最大的容积 V 大约在 $x=\frac{1}{6}$ 的附近达到．也就是说，当正方形铁皮四角截去 $\frac{1}{6}$ 见方的小块时，制成的油盘的容积可能是最大的．在第二章中我们将说明，确实在 $x=\frac{1}{6}$ 时 V 最大(容积 V 随 x 的变化而变化的情况如图 0-5 所示)．象这类问题，在高等数学中也有系统的解决办法．

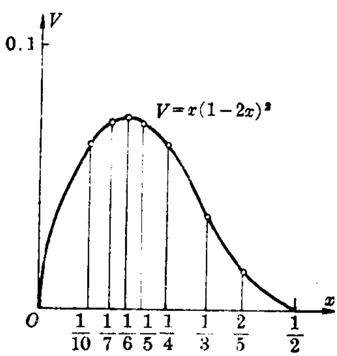


图 0-5

三

上面提出的三个问题在形式上虽然很不相同，但解决这些问题的基本思想却是一样的，就是要在分析矛盾的基础上，进一步促使矛盾转化，发展出新的数学概念和方法——微积分．这些我们将在以后逐步加以阐明．

旧的微积分教材，不讲矛盾，不讲转化，不讲辩证法，而是乞灵于形式逻辑的推理论证，把具有活生生的实践来源的高等数学搞得玄而又玄，使得体现在高等数学中的辩证思想完全人为地被形而上学的框架窒息了．

过去人们把微积分看得非常神秘，高深莫测，其实微积分并不神秘，它不过是随着社会生产的发展而产生，是事物矛盾的法则体现在数学领域中的一门学科．这应该成为我们现在学习微积分的基本认识．

第一章　函数和极限

第一节　变量和函数

一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的．事物的互相联系及其内部规律性，在数量这一侧面就表现为各个数量之间以及各数量在变化过程中的相互依赖关系，在数学上叫做函数关系．这就是我们所要讨论的对象．

一、变　　量

在我们研究事物的过程中，常会遇到各种不同的量：如时间、长度、温度、重量等等．各种量，按照不同的情况，有的取不同的数值，有的取同一个数值．我们称在某一过程中取不同数值的量为变量，只取同一数值的量为常量．习惯上，为了易于辨别，一般用 x、y、z 等字母表示变量，用 a、b、c 等字母表示常量．

应当注意，一个量是常量还是变量，是对某一过程来说的，不是绝对的．情况变了，常量和变量也可能相互转化；另外，在问题的讨论过程中，如果某个变量的变化相对于其他变量来说可以忽略不计，或者在容许范围内为了处理问题的方便，我们也可把它当作常量来对待．

变量有时可以毫无限制地取实数值，有时要受到某种限制，这要根据问题的具体性质来决定．例如温度的变化不能低于 $-273°C$，圆的内接正多边形的边数只能是不小于 3 的自然数．

通常我们用区间表示变量的变化范围．一般，区间可用括号或不等式或图形这三种办法来表示．例如，如果变量 x 在 a 与 $b(a<b)$

两数之间变化，就把这个区间记为(a, b)或$a<x<b$，a和b叫做区间的端点．这种区间叫做开区间，在图形上就是数轴上介于点a和点b之间的全部点，端点a和b用圈点表示，如图 1-1．如果把端点和区间内的点一起来考虑，就叫闭区间，记为$[a, b]$或$a\leqslant x\leqslant b$，这时图中的a与b就用实点表示．还可以有半开半闭的区间$[a, b)$与$(a, b]$，它们可分别记为$a\leqslant x<b$与$a<x\leqslant b$．图 1-2 表

开区间　　　　闭区间

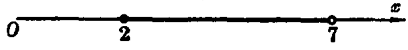
图 1-1

图 1-2

图 1-3

示的是左闭右开区间$[a, b)$．推广来用，$[a, +\infty)$就表示x在不小于a的范围内变化，可记为$x\geqslant a$或$a\leqslant x<+\infty$，也可在数轴上表示为图 1-3 那样．类似地，也有$(a, +\infty)$，$(-\infty, b]$，$(-\infty, b)$与$(-\infty, +\infty)$等．

思考和练习

1．举一、二个实例，说明变量和常量．
2．将下列区间换成其他形式表示：
(1) $-2<x<2$;　　　　(2) $[-3, 5)$;
(3) $-a<x\leqslant a \quad (a>0)$;
(4)


二、函　　数

1．函数概念

实际问题中的变量常不止一个，而是几个，它们一同变化，其

中某些量的变化往往依赖于另一些量的变化，我们称后者为自变量，前者为因变量.

[例 1] 自由落体的运动规律是

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

其中 g 是常量，s 和 t 是变量，分别表示物体下落过程中，下落的路程及时间.

从上面的关系式可以看出路程 s 是随着时间 t 变化的，故 t 可看作自变量而 s 是因变量.

[例 2] 设有一动点，沿圆心在原点而半径为 1 的上半圆周运动，则动点的横坐标 x 和纵坐标 y 都是变数. 若把 x 当作自变量，则 y 就是因变量，而且由解析几何知道成立关系式

$$y=\sqrt{1-x^2}.$$

这些自变量与因变量的关系，就是函数关系. 因变量就是函数. 更确切地说，有如下的函数定义.

函数定义 设在某一过程中有两个变量 x 和 y，变量 y 随着变量 x 一起变化，而且依赖于 x. 当 x 取某个特定的值时，y 按一定的规律有确定的对应值，就称 y 是 x 的函数. 这里 x 是自变量而 y 是因变量. y 与 x 之间存在函数关系这件事，可一般地记为

$$y=f(x) \quad 或 \quad y=y(x).$$

在这个过程中，使函数有意义的自变量 x 的变化范围称为函数的定义域，相应的因变量 y 的变化范围称为函数的值域.

函数的定义域一般由所讨论的问题的含义或函数的数学式子自然地确定. 如在例 1 的函数关系中，自变量 t 表示开始下落后的时间，在考虑物体下落的过程中，t 不能是负的，故定义域为 $t\geqslant 0$. 在例 2 中由表达函数关系的数学式子可知，x 的变化，必须保证被开方数 $1-x^2$ 非负，即在 $1-x^2\geqslant 0$ 时才能由 x 的值确定 y

的相应值，故函数的定义域是 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

[例 3] 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x}$； (2) $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}+\sqrt{x}$.

解：(1) $y=\dfrac{1}{x}$.

显然，这里的分母 x 不能为零，函数的定义域是 $x\neq 0$ 的一切实数，或 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$.

(2) $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}+\sqrt{x}$.

x 所允许取的值既要能确定 $\dfrac{x^2+1}{x-1}$，又要能确定 $\sqrt{x}$. 按照前者应有 $x\neq 1$，按照后者应有 $x\geqslant 0$. 故这个函数的定义域是 $x\geqslant 0$ 而且 $x\neq 1$，或 $[0, 1)$ 与 $(1, +\infty)$.

思考和练习

1. 举一实例说明一个变量是另一个变量的函数.
2. 什么叫函数的定义域？用数学式子给出的函数，如果没有明确给出定义域，应该怎样确定它？
3. 确定下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{5-2x}$； (2) $y=\dfrac{1}{x^3-x}$.

2. 函数的三种表示法

为了研究函数关系，必须采用适当的形式把它表示出来. 所谓表示一个函数或给出一个函数，是指给出自变量和因变量之间的对应关系. 通常表示函数的方法有三种：

(1) 解析法：就是用数学式子表达自变量与因变量之间的对应关系. 通过式子里规定的运算，就可以由自变量的值确定函数的对应值. 前面几个例子中的函数都是用数学式子来表示的.

(2) 图形法：就是用坐标平面上的曲线来表示函数. 通常用横坐标表示自变量，纵坐标表示函数，自变量和函数的每一对值对