徐荣南 编

高等数学解题思路分析

江苏教育出版社

高等数学解题思路分析

徐 荣 南

江苏教育出版社

(苏)新登字第003号

高等数学解题思路分析

徐荣南

出版发行:江苏教育出版社
(南京中央路165号,邮政编码:210009)
经　　销:江苏省新华书店
印　　刷:常熟第六印刷厂
(江苏常熟赵市镇, 邮政编码:215518)

开本 787×1092 毫米　1/32　印张 14.5　字数 318,000
1991年9月第1版　　1991年9月第1次印刷
印数 1—2,990 册

ISBN 7—5343—1394—5

G·1237　　定价: 3.95元

说　　明

电大理工各专业开设的高等数学课教材是邵士敏主编的《高等数学讲义》(上、下册)．基于电大学员是接受远距离电视教学的，一般缺乏面授辅导，特别是在做作业、习题时，会遇到困难．为了解决这一矛盾，我们对典型的、基本的题型作了解题思路分析，学员可按这种一般解题思路去解决同类型的习题．另外，对教学进度中所布置的作业、习题按序作了习题解析．这样，凡学高等数学的学员备有本书后，等于身边有了一位辅导老师．需要指出的是，学员必须在自己独立思考解题的基础上，确遇有困难时再求助于指导，这样才有利于独立思考能力的培养和解题技巧的掌握，同时本书给数学教师也提供了方便．

本书可供电大、职大、业大、函大的学生以及其他自学高等数学的读者使用，也可供工程技术人员参考使用．

由于作者水平有限，书中难免有错误，恳请读者批评指正．

编者

1990.7

序《高等数学》是大、专院校理工科

大 序

大专院校理工科

《高等数学》是大、专院校理工科各专业都要开设的一门基础课程。初等数学与高等数学的分界线在于：前者研究静态的量性对象，后者研究动态的量性对象，即所谓常量数学与变量数学。而微积分的诞生恰是完成了数学研究对象由常量到变量的再扩充。常量数学与变量数学在研究方法上也各有所侧重，前者以形式论证与代数演算为主，后者则以分析方法为主，其中包括抽象分析论证与变量分析计算。中学生学习数学课程主要是在老师的启发、诱导下进行思考，而大学生却应逐步走上以独立思考为主；同时中学生是以学习基础知识为主，主要是为进一步培养成专门人才而打好基础，大学生则是以直接培养成专门人才为目标的，可见中学生与大学生学习数学的对象、学习方法、教学与思维方式、以及奋斗目标都将发生变化，而高等数学一课却正是中学与大学交替过程中的一门关键课程。

在学习高等数学这门课程中，习题求解是一个重要的教学环节，对于解题这个环节，解析几何的创始人笛卡尔曾在他的专著《方法论》中强调指出："怎样从数学解题过程中总结出一般思想方法及其法则"是至关重要的。"我所解决的每个问题，都成为以后解决其他问题的规则。"此外，华罗庚教授曾经指出："如果读书而不做书中所附的习题，那就好比入宝山而空返。"这就是说，学习数学课程，首先必须做习题，然而十分重要的是在解题过程中研究方法和进一步总结出新的

法则。

我国正处在四化建设的历史时期，亟需广大青年掌握科学技术与科学知识。电视大学是远距离教学的一所开放性大学，学员之广是任何一所其他类型的大学所不能及的，国家对电大教学也十分重视。我的老同学和老朋友徐荣南同志长期从事电大《高等数学》的教学工作，并在教学过程中十分重视贯彻方法论教学方式和总结解题方法，他早已有志于结合自身的教学经验来编著一部有关《高等数学解题思路分析》的著作，以供广大电视大学学员及自学者学习《高等数学》参考使用。我不仅十分支持他的想法，而且由此而认为老同学徐荣南同志不愧为一位有远见卓识的数学教学工作者。

就本书而言，我认为这是一部在高等数学教学过程中贯彻数学方法论教学的经验之作，该书的出版，不仅是贯彻数学方法论教学实践的一项重要成果，而且对高等数学的教学实践，特别是电大系统的高等数学课程的教学实践具有重要的参考价值。为此，特为本书作序。

朱梧槚

1991年5月6日于南京

目　　录

第一章 函　数

一、内 容 提 要

(一)实数与绝对值

1. 数是量的程度，是数学的最基本的研究对象之一。整数和分数统称有理数。有理数和无理数统称实数。任何实数都可用数轴上的点来表示。

2. 在数学中常常利用不等式和绝对值来表示实数的范围，为此要求大家熟悉不等式和绝对值的运算法则。

(二)函数

1. 常量与变量　在所考虑的问题或过程中，某些量可取不同的数值，这种量称为变量；而另一些量保持一定的数值(不变的)，或其变化对所考虑的问题而言可以忽略，则称为常量。应注意：

(1) 变量的相对性。即某量在一些过程中是常量，在另一些过程中又可能是变量。

(2) 找出变量的变化范围——变域。

2. 函数　在某个过程中，有两个变量 x、y，x 的变域是 D，对于 D 内的每一个变量 x，如果变量 y 依照一定规律总有唯一确定的数值与之对应(本课程只讨论单值函数)，则变量 y 叫做变量 x 的函数，x 叫自变量，y 叫因变量。构成函数有三个环节：对应关系、定义域、值域，前两个是主要的。

3．函数的表示法

（1）分析法。这种方法便于理论研究，但不直观。在实际问题中也存在不能用分析法表示的函数，只能用其他方法表示。

（2）图示法。就是用函数的图像来表示函数的方法。有直观性，但它的精确度往往受到限制。

（3）表格法。就是用列表的方法表示自变量与因变量的对应关系，其优点可以达到所需要的精确度，但缺乏直观性，不便于理论研究。在数学中，这种表示方法常和其他方法结合使用。

实际问题中往往把这三种方法结合起来。

（三）函数的简单性质

函数的简单性质，包括函数的奇偶性、单调性、有界性与周期性。研究这些简单性质时一定要与函数图像的形状结合起来。

1．奇偶性　设函数 $f(x)$ 定义在对称区间 $(-l,l)$（l 也可是无限）上，若有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上是一个偶函数；若有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上是一个奇函数。应注意：

偶函数的图像关于 y 轴对称；奇函数的图像关于原点对称。

2．单调性　设 $f(x)$ 定义在 (a,b)（a,b 是有限或无限的）上，对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时有

$$f(x_1)<f(x_2)\ (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内为一单调增加（或减少）的函数。

3．有界性　设 I 为某一区间，若存在一正数 M，使得对一切 $x\in I$ 都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 内有界。否则称 $f(x)$ 在 I 内无界。

4．周期性　若 $f(x+T)=f(x)$，T 为最小正数，则称 $f(x)$ 为周期函数。应注意：一般周期函数的周期 T 是较难求的。但要记住 $\sin x,\cos x,\operatorname{tg} x,\operatorname{ctg} x$ 是周期函数及其周期，并由此会求 $\sin 2x,\sin(2x+\varphi),\cos(\omega x+\varphi)$ 等的周期。

（四）反函数的概念

1．在研究同一过程中的两个变量 x、y 的关系时，若把 x 当作自变量，y 是依赖于 x 的变化而变化的，这时 y 就是 x 的函数，记为 $y=f(x)$．若把 y 看成自变量，当 y 的值取定以后，x 的值也随之唯一确定，这时 x 是 y 的函数，这个函数记作 $x=f^{-1}(y)$，称 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数，而 $y=f(x)$ 称为直接函数（或原函数）。

2．反函数的图像　由于习惯上采用字母 x 表示自变量，而用字母 y 表示函数，因而 $y=f(x)$ 的反函数就写成 $y=f^{-1}(x)$。把函数与反函数的图像画在同一个直角坐标系中，两个图像对称于直线 $y=x$。应注意：

（1）直接函数与反函数是互为的关系。

（2）一般在画反函数的图像时，都利用直接函数的图像来作直线 $y=x$ 的对称图像。

（五）初等函数

1．基本初等函数　基本初等函数是指：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数。

2．复合函数　设 $z=\varphi(y)$，$y=f(x)$ 是两个函数。设 x 在定义域中变化时，$y=f(x)$ 的值在函数 $z=\varphi(y)$ 的定义域内变化，这样，当 x 确定以后，根据 $y=f(x)$ 确定了 y 的值；从 y 的值，根据函数 $z=\varphi(y)$ 又确定了 z 的一个值。x 与 z 之间

形成了一个函数，这个函数称为复合函数，记作$z=\varphi[f(x)]$。

3．初等函数　由常数和基本初等函数通过有限次四则运算与复合运算，得到的一个式子的函数，称为初等函数。初等函数是在实践中最常见的函数。

二、解题思路分析

(一)绝对值不等式

解这类不等式，首先要去掉绝对值符号。常用的有下面两个不等式：

1．$|x|<a(a>0)\Longleftrightarrow -a<x<a$;

2．$|x|>k(k>0)\Longleftrightarrow x>k$ 或 $x<-k$。

在证明绝对值不等式时，常用的有：

3．$|a+b|\leqslant|a|+|b|$(三角不等式)；

4．a,b 为实数，则 $a^2+b^2\geqslant 2ab$。

(二)函数

1．求函数值　当 x 用确定的数(或式)代入函数式中去时，要注意留有圆括号(　　)。例如，已知 $f(x)=2x^2-3x+1$，求 $f(-2)$。

解：$\because$　$f(\quad)=2(\quad)^2-3(\quad)+1$，

$\therefore$　$f(-2)=2\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+1=15$。

2．求函数的定义域　首先要根据确定函数定义域的一般原则，列出不等式(组)。这样，求函数定义域的问题就转化为求解不等式(组)了。确定函数定义域的一般原则是：当函数是用分析式表示的时候：

(1) 整式函数的定义域是全体实数；

(2) 分式中分母不为0；

(3) 偶次根号下非负；

(4) 对数真数是正数；

(5) 反三角函数 $\arcsin x, \arccos x, |x| \leqslant 1$；

(6) 实际问题。例如，圆面积 $S=\pi r^2, 0<r<+\infty$。

注意：1° $f(x) \neq f \cdot x$；

2° $f(x)$ 并非专指式子，可以指图，指表。一句话，$f(x)$ 是指对应关系。但本课程中无特殊指明时，都是指式子；

3° 即使 $f(x)$ 指式子，可以是一个简单式子，也可以是分段表示的式子。如

$$y=\begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

是一个函数，不是两个函数；

4° 函数关系就是指变量间的对应关系，也可叫做映射或变换：

$$x \xrightarrow{f:} y$$

x 叫原像，f 叫映射，$y=f(x)$ 叫像点。

（三）函数性质

1．判断函数的奇偶性　一般采用定义方法，有时还经常用到下列性质：

(1) 两偶函数之和是偶函数，简记：偶＋偶＝偶，两奇函数之和为奇函数，简记：奇＋奇＝奇。

(2) 两奇函数（或偶函数）之积（或商，分母不为 0 ）是偶函数，简记：奇・奇（或偶・偶）＝偶

(3) 一奇函数与一偶函数之积（或商，分母不为 0 ）是奇函数，简记：奇・偶＝奇。

有了这些性质，对常见的奇，偶函数要熟悉。如：$\cos x$，

x^2，x^{2n}（n 为正整数）等是偶函数；$\sin x$，x，$\operatorname{tg} x$，x^{2n+1}，$\frac{1}{x}$等是奇函数。这样，可判断 $x\cos x$，$x^2\sin x$ 是奇函数；$x\sin x$，$x^2\cos x$ 是偶函数等。

3．判断函数的单调性　一般采用定义。有时利用某些性质，如 $f(x)=x^3$ 是增函数，则 $-x^3$ 是减函数。

注意：单调性是局部的。如 $y=x^2$ 在$(-\infty,\ 0)$或$(0,\ +\infty)$内是单调的，但在$(-\infty,\ +\infty)$内就不是单调函数。

4．判断函数的周期性　一般由定义先列出 $f(x+T)-f(x)=0$，再解 T，取其中最小正数，这是较难的事。但要对三角函数是周期函数的要熟悉，并会求其周期.如，$\cos x$ 的周期是 2π，那么 $\cos(\omega x+\varphi)$的周期就要会求出来。

（四）列函数式

由于问题的多样性，列函数式没有统一的方法，必须具体问题具体分析.首先要分清哪些是常量，变量，再根据问题的条件，运用数学、物理、化学甚至经济等方面的知识，来列函数式。

（五）反函数、初等函数

1．求反函数　一般步骤：

(1) 先从 $y=f(x)$中解出 $x=f^{-1}(y)$；

(2) 改写 $y=f^{-1}(x)$；

(3) 指明这就是所求的反函数。

注意：反函数存在的条件是：单值单调函数必有唯一的反函数，也是单调的。但反函数存在不等于一定会求出来。具体地说，$y=f(x)$不一定会解出 $x=f^{-1}(y)$。即使解不出来，也并不表明反函数不存在。

2．分析复合函数的复合过程　一般是由外到里。注意

每一步都是基本初等函数或是基本初等函数的加减运算。

如何来熟悉这些解题思路呢？只有通过具体的解题。自己再多加分析和总结。这样才会更好地理解概念，掌握解题的技能技巧。

三、习题解析

1.1—(2)，(4)，(6)，(9)

对照写出等价的不等式与区间：

(2) $|x-1|<3$；　　　(4) $|1+2x|\leqslant 1$；

(6) $|x+2|\geqslant 5$；　　　(9) $|x^2-2|\leqslant 1$。

解 (2) $|x-1|<3 \Longleftrightarrow -3<x-1<3 \Longleftrightarrow -2<x<4$，

$\therefore$ (2) $\Longleftrightarrow 5°$。

(4) $|1+2x|\leqslant 1 \Longleftrightarrow -1\leqslant 1+2x\leqslant 1 \Longleftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 0$，

$\therefore$ (4) $\Longleftrightarrow 10°$。

(6) $|x+2|\geqslant 5 \Longleftrightarrow x+2\leqslant -5$ 或 $x+2\geqslant 5$

$\Longleftrightarrow x\leqslant -7$ 或 $x\geqslant 3$，

$\therefore$ (6) $\Longleftrightarrow 8°$。

(9) $|x^2-2|\leqslant 1 \Longleftrightarrow -1\leqslant x^2-2\leqslant 1 \Longleftrightarrow 1\leqslant x^2\leqslant 3$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2\geqslant 1 \\ x^2\leqslant 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |x|\geqslant 1 \\ |x|\leqslant \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant 1 \\ -\sqrt{3}\leqslant x\leqslant \sqrt{3} \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow -\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$ 或 $1\leqslant x\leqslant \sqrt{3}$，

$\therefore$ (9) $\Longleftrightarrow 6°$。

1.4—(4)，(5)

证明下列各式：

(4) $|x|-|y|\leqslant||x|-|y||\leqslant|x-y|\leqslant|x|+|y|$；

(5) 若 $a>0,b>0$,则

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

证 (4) $x=x+y-y,|-y|=|y|$,

$|x|=|x+y-y|\leqslant|x+y|+|-y|$,

即 $|x|-|y|\leqslant|x+y|$,

$|x|-|-y|\leqslant|x+(-y)|\leqslant|x|+|-y|$,

即 $|x|-|y|\leqslant|x-y|\leqslant|x|+|y|$,

又 $||x||-||y||\leqslant||x|-|y||$,

∴ $|x|-|y|\leqslant||x|-|y||$.

而 $||x|-|y||\leqslant|x-y|$,

∴ $|x|-|y|\leqslant||x|-|y||\leqslant|x-y|\leqslant|x|+|y|$.

(5) ∵ $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant0$,

∴ $$(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\geqslant2\sqrt{a}\sqrt{b},$$

$$a+b\geqslant2\sqrt{ab}.$$

∴ $$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

1.27—(10)

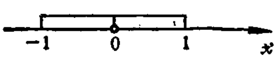
求下列函数的定义域,并表示在数轴上：

(10) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$.

解 ∵ $$\begin{cases}x\neq0\\1-x^2\geqslant0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\neq0\\|x|\leqslant1\end{cases}$$

$$\Longrightarrow-1\leqslant x<0\text{ 或 }0<x\leqslant1,$$

∴ 函数的定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$。在数轴上表示如下：



1.28—(3),(8),(9)

求下列各函数的定义域：

(3) $f(x)=\arccos\frac{2x}{1+x}$；

(8) $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ 1, & 1<x\leqslant 2\\ \sin x, & x>2\end{cases}$

(9) $\psi(x)=\log_2\log_2 x$。

解 (3)

$\because\quad -1\leqslant\frac{2x}{1+x}\leqslant 1,$

$\therefore$ 定义域为 $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$。

(8) 显见 $f(x)$的定义域为 $x>0$ 且 $x\neq 1$。即

$(0,1)\cup(1,+\infty)$

(9) $\because\log_2 x>0$，$\therefore x>1$ 为所求的定义域。

1.9 已知函数 $f(x)=x+1$，求：$f(2)$，$f(-2)$，$-f(2)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$\frac{1}{f(2)}$，$f(a+b)$，$f(x^2)$。

解 $f(2)=2+1=3,$

$f(-2)=-2+1=-1,$

$-f(2)=-(2+1)=-3,$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2},$

$\frac{1}{f(2)}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3},$

$f(a+b)=a+b+1,$

$f(x^2)=x^2+1$。

1.10—(3)

求$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$，设：

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

解

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}=\frac{\dfrac{x-x-h}{x(x+h)}}{h}$$

$$=-\frac{1}{x(x+h)}.$$

1.12 设$\varphi(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求$\varphi(-x)$，$\varphi(x)+1$，$\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$\dfrac{1}{\varphi(x)}$.

解 $\varphi(-x)=\dfrac{1-(-x)}{1+(-x)}=\dfrac{1+x}{1-x}$，

$$\varphi(x)+1=\frac{1-x}{1+x}+1=\frac{1-x+1+x}{1+x}=\frac{2}{1+x},$$

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1},$$

$$\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{1}{\dfrac{1-x}{1+x}}=\frac{1+x}{1-x}.$$

1.21 设 $f(x)=ax+b$，且有 $f(0)=-2$，$f(3)=5$ 求 $f(2)$.

解 $\because$ $f(0)=-2$，$\therefore$ $a\cdot0+b=-2$，$b=-2$.

$\because$ $f(3)=5$，$\therefore$ $3a+b=5$，$a=\dfrac{7}{3}$.