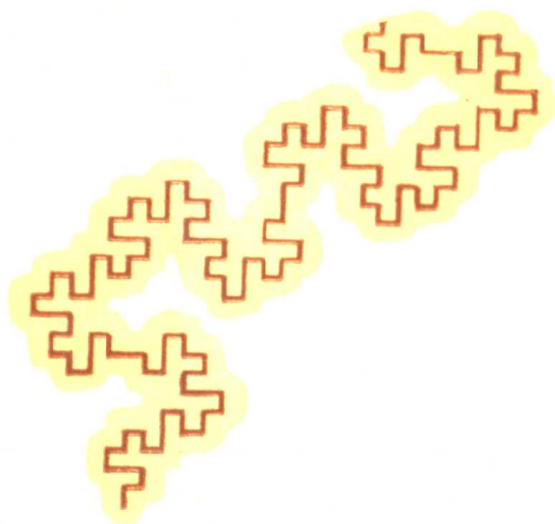


分形与混沌

——在地质学和地球物理学中的应用

[美] D. L. 特科特 著 陈颀 郑捷 季颖 译



地震出版社

分形与混沌

——在地质学和地球物理学中的应用

〔美〕D.L.特科特 著
陈颀 郑捷 季颖 译

地震出版社

1993

(京)新登字095号

分形与混沌

——在地质学和地球物理学中的应用

[美] D.L.特科特 著

陈颀 郑捷 季颖 译

责任编辑: 杨懋源

责任校对: 王花芝

地质出版社 出版

北京民族学院南路9号

北京朝阳展望印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

850×1168 1/32 7.375印张 198千字

1993年4月第一版 1993年4月第一次印刷

印数 0001—1500

ISBN 7-5028-0771-3/P·493

(1164) 定价: 6.50元

内 容 提 要

分形和混沌是本世纪60年代出现的新理论。本书作者精通固体地球物理学和地质学；在此基础上，他应用分形和混沌理论的观点去研究地学现象，做了许多耐人寻味的探讨，从新的角度提出了不少值得深入研究的问题。本书中，除反映了以上内容之外，还深入浅出地、准确地介绍了分形与混沌的基本概念和分析方法。凡稍有数学基础的读者均可以读懂和运用。因此，本书不失为一本向地学以及其它自然科学领域的工作者介绍分形与混沌理论入门的好书。

前 言

受Bob Smalley的影响,我开始接触分形和重整化群方法是在1981年。当时Bob正从康奈尔大学的物理系转到地质系来攻读博士学位。他组织了一系列研讨会,这使我认识到这些技术与地质学和地球物理学问题的关系。虽然Bob的博士研究是在观测地震学方面,但他仍和我一起完成了有关重整化群和分形方面的几个研究课题。我的另外几位研究生,如黄捷(Jie Huang)和 Cheryl Stewart,又进一步加深了我对于混沌与动力学系统的认识。这些学生所做的早期的研究工作都收入到本书之中。

本书旨在地质和地球物理范围内介绍分形、混沌和动力学系统的基本概念。我在引进这些基本概念时不用太多的数学,这将有助于理解和应用。当然,要介绍所有的应用是不可能的。在介绍时,我力图使从事地球科学以外的科学家也能容易地接受它。很可能,我并不是在所有情况下都能做到这一点。

紧接着前言之后,我用七章篇幅介绍分形。第2章介绍自相似分形的基本概念,以后的几章介绍自相似分形在岩石破碎、地震活动性和构造学、矿石的品位和储量以及在丛集方面的应用。第7章引入自仿射分形。第8章讲自仿射分形在地貌学研究中的应用。第9章简要地介绍动力学系统。接下来的五章

通过逻辑斯蒂映射、滑块模型、洛伦兹方程、地幔对流和力式常次发电机引进混沌的基本概念。第15章讲重整化群方法。第16章则介绍自组织临界性。

本书每章之后都有习题。因此本书可以作为大学高年级学生和研究生的教科书，这要看学生的基础知识和所使用的材料内容而定。在学习1—6章和10—11章中的自相似分形和混沌时，要求学生有初步的数学基础即可。学习7—8章自仿射时需要一些频谱分析方面的技术。而第9、12、13章还要求在微分方程方面具备一定的知识。

我愿将这本书奉献出来用以纪念Ted Flynn。他在1989年不幸去世之前，是美国宇航局地球动力学分部的负责人。他在这个岗位上，十几年精心地指导一项计划，把改变传统厘米级大地定位测量技术的愿望由梦想变成了现实。Ted还极端热情地支持了用于地壳动力学的分形和混沌的研究，而当时人们很少注意这些课题。特别是他积极地促成了地震、分形和混沌会议于1989年1月在阿斯洛马(Asilomar)召开。这次会议建立了物理学家、应用数学家和地震学家之间的对话，使他们集中地将动力学系统研究结果用于地震预报。

我也衷心感谢与John Rundle, Charlie Sammis, Chris Parton 和 Pek Bak 等人进行的广泛讨论。第8章则是我与Bill Newran合作的产物。没有Maria Petricola为我精心准备手稿，本书的出版也是不可能的；谨在此一并感谢。

Donald L. Turcotte

目 录

前言	(I)
第 1 章 标度不变性	(1)
第 2 章 分形集合的定义	(6)
第 3 章 碎形	(21)
第 4 章 地震活动性和构造学	(37)
第 5 章 矿石的品位和储量	(54)
第 6 章 分形丛集	(67)
第 7 章 自仿射分形	(76)
第 8 章 地貌	(97)
第 9 章 动力学系统	(107)
第 10 章 逻辑斯蒂映射	(118)
第 11 章 滑块模型	(130)
第 12 章 洛仑兹方程	(142)
第 13 章 地幔对流是混沌的吗	(156)
第 14 章 力武常次发电机	(168)
第 15 章 重整化群方法	(175)
第 16 章 自组织临界性	(193)
第 17 章 结束语——我们现在何处	(203)
参考文献	(204)
附录 A 名词简释	(215)
附录 B 单位和符号	(218)
部分习题答案	(223)
译者后记	(227)

混沌

第1章 标度不变性

当观察一块石头时，你会发现它像一座微缩的山脉。大自然的神工鬼斧，可以把大尺度的山脉微缩成小尺度，在一块一两英尺大小的石块上，你可以找到自然界中各种图形和构造的变化形态。石头上的苔藓像森林，晶体的颗粒像悬崖。多数情况下石头的表面与天然山脉表面相比，更引人入胜，在形态上更多种多样，在色彩上更加五光十色，特别对于从结晶山脉上滚落下来的石头更是如此。(引自 J. Ruskin 著《现代画家》一书5卷15章，1860)

地质现象的尺度，是学地质的学生最初接触的概念之一。学生们被告之，在对一些地质现象拍照时，一定要放上一个能表示尺度大小的物体，如一枚硬币，一把锤子或站上一个人。没有这些物体，很难确定这些照片反映的是10m还是10km范围的现象。因为在这样尺度范围的各种褶皱看起来都是相似的。另一个例子是关于岩石海岸线的航空照片，如果没有表示特征长度的物体，一棵树或一所房屋，那么就很难确定照片是从多高的地方拍摄的。针对这些问题，Mandelbrot(1967)引进了分形的概念。海岸线的长度是由一定长度的直尺来测量的。由于标度不变性，随着测量用直尺长度的减少，得到海岸线的长度按照一种幂指数规律增加，这个指数的值就确定了海岸线的分维数。由于直尺的长度可

以减少到毫米或更小,因此关于海岸线长度不可能得到某一定值。

许多地质现象具有标度不变的特征。这样的例子有:岩石碎片、断层、地震、火山喷发,矿藏、油井等。这些现象的频度和大小之间的分布具有标度不变性。分形分布的特点要求大于某一尺度物体的数目,与物体大小之间存在着幂指数关系。在分形概念被提出之前很长一段时间,人们从经验上就认识到幂指数型的统计关系适用于许多地质现象。最显著的例子是在统计地震频度-震级关系时的Gutenberg-Richter公式(Gutenberg and Richter, 1954)。在地震数目和地震震级关系中的比例因子叫作 b 值。在过去近50年时间里,已经发现 $b = 0.9$ 几乎是个普适的关系。现在进一步认识到 Gutenberg-Richter 关系式就是地震数目和其特征破裂大小之间的分形关系,分维数 D 简单地等于 b 值的2倍,典型值 $D = 1.8$ 对广泛的地震活动都是成立的。

关于地质现象的统计分布,幂指数分布不是唯一的一种,还有如正态分布和对数正态分布等其它种类。但是,幂指数分布是其中唯一的不含特征长度的分布。这样,幂指数分布可以应用于那些具有标度不变性的地质现象。如果一定数目的事件在统计上互相独立,那么,中心极限定理就提供了应用高斯分布的基础。而标度不变性则提供了应用幂指数分形分布的基础。分形概念对于连续分布的对象也适用。Mandelbrot(1982)利用分形概念人工造出了一些地形图,这些地形看起来和真的极为相似。分形是粗糙度(不平度)的一种度量。我们见到的地形是由诸如断裂、褶皱和弯曲等构造过程产生的,然而又经过侵蚀和沉积将其再加以改变。有明显的证据表明:侵蚀是标度不变的或分形的过程;河系是典型的分形树的例子。地形经常是复杂的和混沌的。但复杂性也有程度的区别。分析像地形这样的连续函数的标准方法,是对其中的一个线迹进行傅立叶级数分析,求出对应于波长 λ_i 的系数 A_i 来。如果 A_i 与 λ_i 之间的关系是一种幂指数关系,那么地形就

具有分形的结构。对于地形和构造测深来说,作为一个好的近似,人们发现傅立叶振幅和波长之间存在着比例关系。对于布朗噪声情况也是如此。布朗噪声可以通过下述的随机行走过程产生。向前走一步并上抛一个硬币,如果硬币的头像向下,则向右走一步,如果头像向上,则向左走一步,不断地重复这个过程,这种随机行走噪声可以描述为分形的布朗噪声。行走或噪声发散程度与所走步数的平方根成正比。随机行走的谱分析结果表明,傅立叶系数是与波长成比例的。

许多地球物理数据具有幂指数频谱。这包括有重力、地磁和地表地形。由于幂指数频谱由振幅和斜率两个量决定,因此利用这两个量可以进行数据集的结构分析。分形结构也可以用来作为对资料两点间进行内插值处理的依据。

分形的发明者B. Mandelbrot极为出色地提出了分形的基本思想(Mandelbrot, 1982),而Feder则从应用的角度阐述了分形的涵义(Feder, 1988)。

在定量描述那些标度不变分布时,分形是一种简单实用的工具。不仅如此,今天我们还认识到,分形在地质问题上的应用还有着更为深刻的背景。Lorenz(1963)研究流体热对流时,经简化得到一组非线性的偏微分方程。这组方程首次显示了混沌行为。初始条件无穷小的变化,会引起得到的解有巨大的差别。这就是混沌。微分方程完全是确定性的,但由于问题对于初始条件有指数型的敏感性,混沌解的演化是不能预测的。这种解必须从统计角度来研究,而且可以应用的统计学往往是分形的。

最常见的混沌例子莫过于流体的湍流。很早以前就知道,必须用统计方法研究湍流,而且其谱的统计学是分形的。地核中的流体流动产生了磁场,这种流动据猜测可能是湍流,因此它具有混沌行为也就不足为怪了。地磁场的不规则的倒转也正是这种混沌行为的特征。事实上,力武常次(1958)提出的发电机方程的解

显示了自发的倒转,成为确定性混沌的例子(Cook and Roberts, 1970)。

迭代方程也能表现出混沌行为。典型的例子是May(1976)所研究的逻辑斯蒂方程。这种简单的二次关系式具有巨大的应用价值。当方程中单个参数变化时,迭代解的周期将变为两倍,直到解出现完全的混沌为止。Lyapunov 指数是混沌行为的定量的检验,它是相邻轨道在演化过程中是收敛还是发散的度量。如果Lyapunov 指数是正的,那么相邻轨道将发散,混沌行为将会出现。这种逻辑斯蒂方程和相似的迭代关系,对于研究人口发展和其它生态问题是大有用处的。同样,逻辑斯蒂方程也能产生分形集合。

长期以来,滑块模型一直被认为是断层行为的一种简单模拟。通过一个弹簧拖拉滑块沿着一个界面滑行,界面和滑块间的摩擦力会造成断层特有的粘-滑运动。Huang和Turcotte(1990a)已经证明,一对滑块所表现出的混沌行为,与逻辑斯蒂方程中显示的行为是完全一样的。这表明,与位移有关的地壳变形是混沌的,这种变形是一种统计意义上的过程。这与地震遵循分形统计学的观测结果是完全一致的。

非线性是产生混沌行为的必要条件。同时,它也是标度不变性和分形统计学的必要条件。历史上,连续介质力学主要是利用三类偏微分方程,这三类方程是地球物理学的基础。除了产生场的场源区域以外,重力场、电场和磁场都满足拉普拉斯方程;波动方程则提供了认识地震波传播的基础;热传导方程是理解地球内部热传播的基础。所有这三类方程都是线性的,都不能产生混沌解。不仅如此,所有方程的解都不是标度不变的,除非有标度不变的边界条件。

临界现象都与分形和混沌有关。重整化群是研究临界现象的一种方法。这种方法首先对小尺度模型进行计算,然后被重整化

至大的或更大的尺度。如果有网格状的一组元素，每个元素具有一定的渗透概率，重整化群方法的一个应用就是计算渗透的开始问题。当元素渗透率达到某一临界值时，这一组元素的渗透流动就会突然地发生。一旦流动开始后，相联结元素之间便具有分形结构。

自组织临界现象的概念是 Bak 等 (1988) 提出来的，可以用来分析地震活动性。它的含义是这样的，一个自然系统处在稳定态的边缘，一旦受到扰动偏离这个状态后，它将演化回到边缘的稳定态。在临界态不存在天然的长度标度，因而是分形的。用一个简单的细胞自动机模型可以说明这种自组织临界现象。在这个模型中的破坏统计学是分形的，它与地震的频度-震级关系式非常相似。

第 2 章 分形集合的定义

自从Mandelbrot(1967)最早引入分形概念以来,分形得到了广泛的应用。它把从纯粹数学乃至许多工程的经验方面这样广阔范围内已有的概念统一了起来。目前还不清楚,用单一的数学定义是否能包括所有方面的应用,但我们将定义一个分形集合,对其进行定量的讨论。

$$N_s = \frac{C}{r_s^D} \quad (2.1)$$

上式中 N_s 是特征线度为 r_s 的物体(fragments,也称为碎片)的数目, C 是比例常数, D 称作分维数。分维数可能是整数,这时它与欧几里得空间的维数是等价的。在欧几里得空间,点的维数是零,线段的维数是1,正方形维数是2,立方体维数是3。但一般说来,分维数不一定是个整数,而是个分数,这就是分维数一词的由来。

现在用一条单位长度的线段来说明,为什么把 D 称之为分维数。图2.1给出了几个分形的例子。在图2.1(a)中单位长度的线段被等分为两段,于是 $r_1 = 1/2$,只保留其中的一段,这样 $N_1 = 1$ 。保留的一段再等分为两段, $r_2 = 1/4$,而也保留其中的一段,这样 $N_2 = 1$ 。为了确定 D ,将式(2.1)改写为:

$$D = \frac{\ln(N_{s+1}/N_s)}{\ln(r_s/r_{s+1})} \quad (2.2)$$

式中 $\ln$ 是以 e 为底的自然对数。对于我们考虑的这个例子, $\ln(N_2/N_1) = \ln 1 = 0$, $\ln(r_1/r_2) = \ln 2$, $D = 0$ 。这是一个点的欧几里

得维数。以上的做法可以延伸 n 次，每次都有 $N_1 = 1$ ， $\ln(N_{1+1}/N_1) = \ln 1 = 0$ 。当无限次进行上述过程时，保留的线段长度趋于零，而变成了一个点。因此，一个点的欧几里得维数是0，这是合适的。图2.1(b) 所表示的过程与上述过程是相似的，只不过把单位线段等分成三等份， $r_1 = 1/3$ ，而每次只保留其中的一小段，即

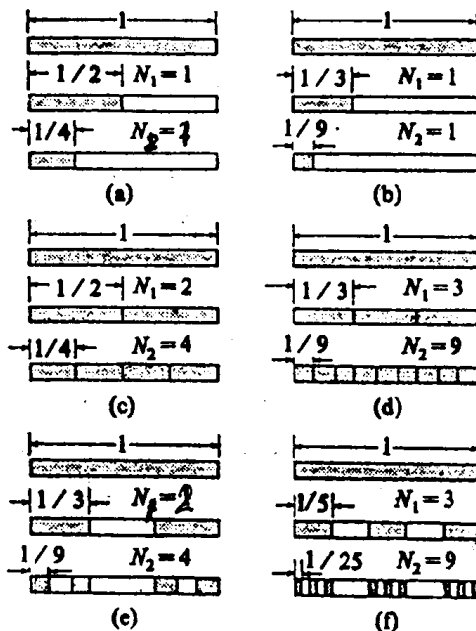


图2.1 在1级情况下，单元长度的一条线段等分为整数个较小的线段，保留其中一部分线段，再对这些保留下来的线段进行同样的级序更高的操作，图中给出了2级操作的情况。(a)一条线段等分为两部分，保留其中的一部分， $D = \ln 1 / \ln 2 = 0$ (点的分维数)；(b)一条线段等分为3部分，保留其中的一部分， $D = \ln 1 / \ln 3 = 0$ (点的分维数)；(c)一条线段等分为两部分，两部分皆保留， $D = \ln 2 / \ln 2 = 1$ (线的分维数)；(d)一条线段等分为三部分，三部分皆保留， $D = \ln 3 / \ln 3 = 1$ (线的分维数)；(e)一条线段等分为三部分，保留二部分， $D = \ln 2 / \ln 3 = 0.6309$ (非整数的分维数，Cantor集合)；(f)一线段等分成5部分，保留3部分， $D = \ln 3 / \ln 5 = 0.6826$ (非整数的分维数)

$N_1 = 1$ 。第二次再分时, $r_2 = 1/9$, $N_2 = 1$ 。当分割的阶数 $n \rightarrow \infty$ 时, 最后的结果又得到了一个点, $D = 0$ 。

图2.1(c)中, 单位长度线段等分为两部分, 且两部分皆保留, 于是 $r_1 = 1/2$, $N_1 = 2$ 。这个过程重复下去, 有 $r_2 = 1/4$, $N_2 = 4$ 等。从式(2.2)可以求得 $D = \ln 2 / \ln 2 = 1$ 。同样, 对于图2.1(d)我们有 $D = 1$ 。在这两种情况分维数与线段的欧几里得维数是一样的。这是合理的, 因为不管如何分法, 保留下来的线段始终组成一单位长度的线段。但是, 不是所有的分割方法都会给出整数的分维数。图2.1(e)和图2.1(f)就给出了两个这样的例子。在图2.1(e)中, 单位长度线段等分为3部分, $r_1 = 1/3$, 保留其中两部分, $N_1 = 2$ 。这个过程继续下去, 可得 $r_2 = 1/9$, $N_2 = 4$ 。从式(2.2)我们可得 $D = \ln 2 / \ln 3 = 0.6309$ 。这就是Cantor集合, 它一直被数学家们认作是病理学的典型结构。图2.1(f)中单元长度线段被5等分, $r_1 = 1/5$, 两端及中心处的三个单元被保留, $N_1 = 3$, 这个过程重复进行, $r_2 = 1/25$, $N_2 = 9$ 。从式(2.2)得 $D = \ln 3 / \ln 5 = 0.6826$ 。这两个例子具有非整数的分维数, 其值在0与1之间。利用图2.1所介绍的方法, 建造方法还可以变化, 可以得到从0至1的任何分维数。

图2.1介绍的迭代过程可以按照需要一直进行下去, 所保留的线段会越来越短。迭代 n 次后, 第 n 级的线段长度 r_n 与第1级迭代时线段长度 r_1 之间存在着关系: $r_n / r_1 = (r_1 / r_1)^n$ 。于是当 $n \rightarrow \infty$ 时, $r_n \rightarrow 0$ 。对于图2.1(e)所示的Cantor集合, 它的极限情况是Cantor灰尘, 即是一个由保留点组成的无穷集合, 造成灰尘形成的迭代过程也叫作凝结(Curding)。图2.1中做法的标度不变性是显而易见的。我们把第 n 次迭代过程叫作第 n 级。第 n 级时长度为 r_{n-1} 的线段是标度不变的。作为一个特殊的例子, 我们考虑图2.1(e)所示的Cantor集合。在第1级长度为1的线段去掉了中间的1/3, 在第2级, 保留下来的2个1/3长的线段又各自去掉了其中间的1/3部分。

如此继续下去。在第 n 级每个线段与第1级的线段(比例关系)都是一样的。对于继续往更高级重复,这个结论也是对的。应用式(2.1)的必要条件是标度不变性,因为在幂指数关系中不出现特征(或称自然)长度。

上述对于一条线段的分形概念也可以用于一个正方形。图2.2给出了一些例子。对每种情况,单位正方形都分成边长 $r_1 = 1/3$ 的9个正方形。接着,保留下来的正方形再分成9个 $r_2 = 1/9$ 的正方形,依次类推。在图2.2(a)中,仅保留1个正方形,于是 $N_1 = N_2 = N_3 = 1$,由式(2.2)可知 $D = 0$,这相当于一个点的欧几里得维数。当 $n \rightarrow \infty$,保留下来的一个正方形会变成一个点,因此这个结论是合适的。图2.2(b)中保留二个正方形, $r_1 = 1/3$, $N_1 = 2$,在

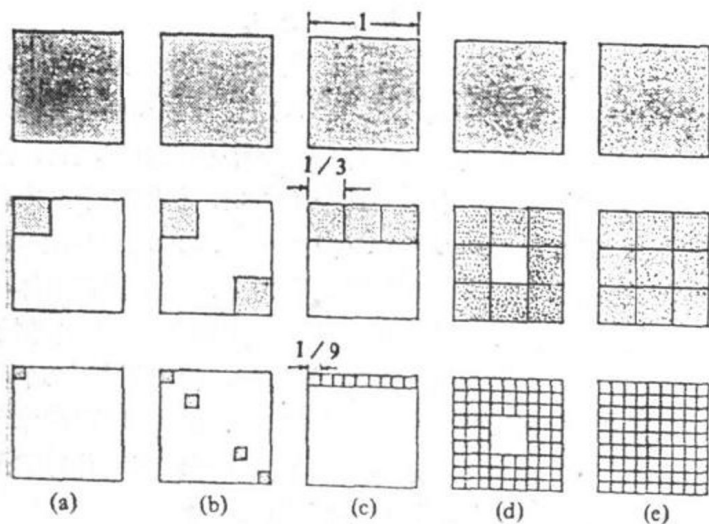


图2.2 在第1级情况下,单位正方形分成 $r_1 = 1/3$ 的9个正方形。在第2级保留下来的正方形再分成 $r_2 = 1/9$ 的9个正方形。下面给出5个例子,每种例子保留 N 个正方形。(a) $N_1 = 1, N_2 = 1, D = \ln 1 / \ln 3 = 0$; (b) $N_1 = 2, N_2 = 4, D = \ln 2 / \ln 3 = 0.6309$; (c) $N_1 = 3, N_2 = 9, D = \ln 3 / \ln 3 = 1$; (d) $N_1 = 8, N_2 = 64, D = \ln 8 / \ln 3 = 1.8928$ (Sierpinski地毯); (e) $N_1 = 9, N_2 = 81, D = \ln 9 / \ln 3 = 2$

第2级划分中 $r_2 = 1/9$, $N_2 = 4$ 。由式(2.2) $D = \ln 2 / \ln 3 = 0.6309$ 。可以预料, 这个结果与图2.1(e)是一样的。类似, 图2.2(c)中保留3个正方形, $D = \ln 3 / \ln 3 = 1$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 保留下来的正方形和图2.1(d)一样变成了一条线, 所以这是一条线的欧几里得维数。图2.2(d)中只去掉中心处的正方形, 一级划分时 $r_1 = 1/3$, $N_1 = 8$; 2级划分时 $r_2 = 1/9$, $N_2 = 64$ 。由式(2.2)可得 $D = \ln 8 / \ln 3 = 1.8928$ 。这个图形叫作Sierpinski地毯。在图2.2(e)中, 所有9个正方形均保留, 于是 $r_1 = 1/3$, $N_1 = 9$, $r_2 = 1/9$, $N_2 = 81$ 。由式(2.2)得 $D = \ln 9 / \ln 3 = 2$ 。这是一个正方形的欧几里得维数。这个结论是合适的, 因为不论在什么级的划分中, 其图形始终保持单位正方形的形状。这样, 通过迭代可以得到在0和2之间的任何分维数, 所有的每种图形都是标度不变的。

图2.1和图2.2讨论的一维和二维例子可以推广到三维情况。图2.3给出了这样的两个例子。图2.3(a)所示的是Menger海绵。将一个单元立方体分成边长 $r_1 = 1/3$ 的27个小立方体, 去掉各面中心的6个立方体和体积中心的那个立方体, 保留20个立方体, $N_1 = 20$ 。由式(2.2)可知 $D = \ln 20 / \ln 3 = 2.7268$ 。Menger海绵可以用于在孔隙具有分形分布特征的前提下, 用来模拟流体在多孔介质中的流动。图2.3(b)给出了分形立方体的另外一个例子。对角线两端的 $r_1 = 1/2$ 的两个小立方体去掉, 保留了其余6个小立方体, $N_1 = 6$ 。由式(2.2), $D = \ln 6 / \ln 2 = 2.585$ 。在以后的章节中我们将多次应用这种图形。迭代建造的方法可以产生从0到3的任何分维数。每个建造都具有标度不变特点。

上面的例子说明如何通过几何方法得到非整数和非欧几里得的维数。然而, 每种建造方法中图形的结构都不是连续的。但建造连续的分形是可能的, 我们用图2.1(e)的Cantor集合来加以说明。图2.4给出了第4级的Cantor集合。代替过去把线段中段去掉的做法, 在各级我们都把线段的中段保留而作为一水平线段。而