陈文灯 黄先开 主编

聚焦考研
Focus NETM

文登培训学校考研系列数学指定用书·第九版

数学复习指南

http://www.cooo.com.cn

2004版

一本好的数学辅导书，应该具备三个要素：一是看它是否以题型为思路，而不是搞题海战术；二是该书是否具前瞻性，能否适应现在和今后的考试；三是该书是否严格遵循大纲，难度与考试试卷相符或略微偏高。

——陈文灯

理工类

世界图书出版公司

陈文灯 黄先开 主 编
曹显兵 施明存 副主编

聚焦考研

2004版

文登培训学校考研系列数学指定用书 · 第九版

数学复习指南

北京聚骄文化发展有限公司 策划

理工类

世界图书出版公司
北京 · 广州 · 上海 · 西安

图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南. 理工类 / 陈文灯,黄先开编著. —9 版.—北京:世界图书出版公司北京公司,2002.3

ISBN 7-5062-5211-2

Ⅰ.数...　Ⅱ.①陈...　②黄...　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题　Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 014886 号

数学复习指南(理工类)

(2004 版文登培训学校考研系列　数学指定用书)

主　　编: 陈文灯　黄先开
副 主 编: 曹显兵　施明存
责任编辑: 世　华
封面设计: 王　野　滕晓娜

出　　版: 世界图书出版公司北京公司
发　　行: 世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　电话 62116800　邮编 100010)
销　　售: 各地新华书店
印　　刷: 廊坊人民印刷厂

开　　本: 787×1092 毫米　1/16
印　　张: 39.125
字　　数: 925 千字
版　　次: 2003 年 2 月第 9 版　2003 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-5211-2/O·332　　**定价:49.80 元**

服务热线: 010－62198078

律师声明

敬启者：

我们，中华人民共和国执业律师，受当事人北京聚骄文化发展有限公司（以下简称为“我方当事人”）委托，全权处理我方当事人代理出版事务及发行聚焦考研 2004 版《数学复习指南（理工类）》一书工作中的著作权事宜。现依据中华人民共和国法律，专发此声明。

我方当事人是聚焦考研 2004 版《数学复习指南（理工类）》一书的出版事务代理者，该书作者已与我方当事人签署了著作权独家许可使用协议书，保证其对我方当事人是独家授权。依照我国著作权法的有关规定及我方当事人与作者的合同约定，我方当事人享有对该作品的独家使用权。同时作者保证独家授权我方当事人在聚焦考研 2004 版《数学复习指南（理工类）》一书上使用其名字，即其署名权也由我方当事人独家使用。

在此，我们代表我方当事人及其签约作者郑重声明：任何单位、个人未经我方当事人书面授权，擅自出版、发行我方当事人享有著作权的聚焦考研 2004 版《数学复习指南（理工类）》一书，或者未经我方当事人书面同意，擅自在其出版、发行的图书上使用与我方当事人有协议约定的作者姓名（无论是否经过作者授权），这些行为均违反《中华人民共和国著作权法》及其他相关法律，将严重侵犯我方当事人的合法权益。因此，侵权人应当公开向我方当事人和签约作者道歉，并赔偿由此给我方当事人造成的全部经济损失和商誉损失。

上述侵权行为一经发现，我们将代表我方当事人通过必要的法律途径、立即采取相关法律措施，追究侵权人的法律责任。

特此声明。

北京市浩天律师事务所
肖　群　律师
张景伟　律师
2003 年 1 月 16 日

作者声明

本人在数学研究生入学考试方面的著作权授予北京聚骄文化发展有限公司独家使用，其他出版单位不得以本人的名义署名或抄袭相关著作的内容。

特此声明。

陈文灯

2003 年 1 月 16 日

第九版修订说明

“卧薪尝胆汗泪流，破釜沉舟志未酬；安得妙笔抒锦绣，大师文灯点春秋。”一位署名新浪网友的读者通过网址给我发来这封邮件，令我惴惴多日。对于网友的溢美与厚望，我实在受之有愧，惶恐难当。不过，卧薪尝胆与破釜沉舟，想必能激起广大考生的共鸣。因为它比较真实、比较准确地反映了考生的艰辛之旅与求索之志。考研不易啊！这些年来，我从讲考研班和写考研书上都做了些工作，在全国各地交了很多忘年的学生朋友，他们对于我的授课方式和拙著提出了很多很好的建议，这对我丰富授课内容和完善拙著起了十分重要的作用。我正是带着这种惟恐误人、惟恐负人的责任与沉重，穷尽心智，开始了2004版《数学复习指南》等书的修订工作。

《数学复习指南》自第一版问世至今已九个年头了，今年根据刚刚考过的试题和《数学复习大纲》的基本要求，结合最近三年命题的特点及我在去年评阅试卷和在文登学校考研班上的教学实践进行了修订，对难度较大的题型均作出思维定式处理，对文字错误进行了地毯式的校对。读者在短期内，对照本书归纳总结的方法、技巧，研读相关的典型例题便可融汇贯通、举一反三、触类旁通。本书这次修订后更加突出和完善以题型为纲的特点，内容更加充实、丰满，例题更具典型性，总结的解题方法和规律更有仿效的价值、更可开拓思路。另外，本书的篇前篇是我们多年教学经验的浓缩，相信在考研中能助考研学子一臂之力。

本书特点如下：

(1)对大纲所要求的重要概念、公式、定理进行剖析，增强读者对这些内容的理解和记忆，避免犯概念性及错用公式、定理的错误。

(2)针对“考研”题型，安排相应章节，深入分析探究，总结出解题方法、技巧，便于读者掌握和应用。

(3)用“举题型讲方法”的格式代替各书普通采用的“讲方法套题型”的作法，使读者应试时思路畅通，有的放矢。

(4)介绍许多新的快速解题方法、技巧，大大提高读者的解题速度和准确性。同时，设计和改造的众多的新题，使读者在做似曾相识的题型中了解和掌握考研综合题的编制过程和规律性，减少对试题的神秘感，多几分“攻坚”的信心和勇气。

(5)广泛采用表格法，使读者对要点一目了然。

勿庸置疑，本书是面向考研学生的，但近几年来有两类学生也使用本书：一是在读本科生，他(她)们借助本书作阶段或期末复习之用；二是专升本学生。近几年专升本考试试题中的难题与本书的较简单例题不谋而合，这就促使专升本考生和辅导老师使用本书。

恳请广大读者和使用本书的老师们提出批评和指正。

陈文灯 陈文灯印

2003.2

目 录

第二篇 线性代数

第三篇* 概率论与数理统计

注：带＊篇、章，数二考生不作要求。

篇前篇　高数解题的四种思维定势

先赠送给大家四句话，相信在考研中能起到关键作用，请考生务必牢记.

第一句话：在题设条件中若函数 $f(x)$ 二阶或二阶以上可导，"不管三七二十一"，把 $f(x)$ 在指定点展成泰勒公式再说.

【例 1】 设 C 为实数，函数 $f(x)$ 满足下列两个等式：

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = C,\quad \lim_{x\to\infty} f'''(x) = 0.$$

求证：$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0, \lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 0.$

【证明】 由泰勒公式有

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_1),\quad x < \xi_1 < x+1, \qquad ①$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2),\quad x-1 < \xi_2 < x. \qquad ②$$

由 ① + ② 得，$f''(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_2) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1).$ ③

由 ① − ② 得，$2f'(x) = f(x+1) - f(x-1) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2).$ ④

当 $x\to\infty$ 时，$\xi_1\to\infty, \xi_2\to\infty$，于是有

$$\lim_{x\to\infty} f''(x) = 2C - 2C + \frac{1}{6}\times 0 - \frac{1}{6}\times 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} 2f'(x) = C - C - \frac{1}{6}\times 0 - \frac{1}{6}\times 0 = 0.$$

因此　$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0, \lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 0.$

【例 2】 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶导数连续，$f(0) = f(1) = 0$，并且当 $x\in(0,1)$ 时，$|f''(x)|\leqslant A$. 求证：$|f'(x)|\leqslant \frac{A}{2}, x\in[0,1]$.

【证明】 由于 $f(x)$ 在$[0,1]$上具有二阶连续导数，则 $f(x)$ 可展成一阶泰勒公式，即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2, \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}.$$

取 $x = 0, x_0 = x$，则

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + f''(\xi_1)\frac{(0-x)^2}{2!},\quad 0 < \xi_1 < x \leqslant 1; \qquad ①$$

取 $x = 1, x_0 = x$，则

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + f''(\xi_2)\frac{(1-x)^2}{2!},\quad 0 \leqslant x < \xi_2 < 1. \qquad ②$$

② − ① 得

$$f'(x) = f(1) - f(0) + \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2]$$

$$\xlongequal{f(0)=f(1)=0}\frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2].$$

又 $\quad |f''(x)|\leqslant A,x\in(0,1)$,则

$$|f'(x)|\leqslant\frac{A}{2}[x^2+(1-x)^2]=\frac{A}{2}(2x^2-2x+1).$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$2x^2-2x+1\leqslant 1$.故 $|f'(x)|\leqslant\frac{A}{2}$.

【例3】 试证:若偶函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数,且 $f(0)=1$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f(\frac{1}{n})-1\right]$ 绝对收敛.

【证明】 因 $f(x)$ 为偶函数,故 $f'(x)$ 为奇函数,$f'(0)=0$.又

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2),$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{f''(0)}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故 $$u_n=f\left(\frac{1}{n}\right)-1=\frac{f''(0)}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

从而 $$|u_n|=\left|f(\frac{1}{n})-1\right|\sim\frac{|f''(0)|}{2n^2}.$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|f''(0)|}{2n^2}$ 收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

【例4】 设函数 $f(x)$ 二阶可导,且 $f''(x)\geqslant 0,x\in(-\infty,+\infty)$,函数 u 在区间 $[0,a](a>0)$ 上连续.证明:

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right].$$

【证明】 令 $x_0=\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t$,将 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处展成一阶泰勒公式:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2.$$

由于 $f''(x)\geqslant 0$, 则 $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

令 $x=u(t)$, 则 $f[u(t)]\geqslant f(x_0)+f'(x_0)[u(t)-x_0]$.

上式两边在 $[0,a]$ 上对 t 积分,得

$$\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant\int_0^a f(x_0)\mathrm{d}t+\int_0^a f'(x_0)[u(t)-x_0]\mathrm{d}t$$

$$=af(x_0)+f'(x_0)\left[\int_0^a u(t)\mathrm{d}t-ax_0\right]=af(x_0).$$

故 $$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right].$$

【另证】 因 $f''(x)\geqslant 0$,所以 $f(x)$ 为凸函数.因此,具有性质:

$$f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)(\text{其中 }\lambda\geqslant 0,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1).$$

由 u 在 $[0,a]$ 上连续,从而可积.将 $[0,a]$ 分成 n 等分,有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{u(\xi_i)}{a}\frac{a}{n}=\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t.$$

由 f 的凸性及连续性,有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{u(\xi_i)}{a}\frac{a}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f[u(\xi_i)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(u(\xi_i))}{a}\frac{a}{n}.$$

对上式两边令 $n\to\infty$ 取极限,由可积性可得

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right)\leqslant\frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))\mathrm{d}t.$$

第二句话:在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时,则"不管三七二十一"先用积分中值定理对该积分式处理一下再说.

【例 5】 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续,在 $(0,2)$ 内二阶可导,且 $f(0)=f(\frac{1}{2}),2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(2)$. 证明:存在一个 $\xi\in(0,2)$,使 $f''(\xi)=0$.

【证明】 $f(2)=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{\text{积分中值定理}}2(1-\frac{1}{2})f(\eta)=f(\eta),\frac{1}{2}\leqslant\eta\leqslant1.$

于是 $f(x)$ 在 $[\eta,2]$ 上满足罗尔定理,即存在一个 $\xi_1\in(\eta,2)$,使

$$f'(\xi_1)=0. \qquad ①$$

又 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上满足罗尔定理,于是存在一个 $\xi_2\in(0,\frac{1}{2})$,使

$$f'(\xi_2)=0. \qquad ②$$

由 ①,② 可知 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$. 再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_2,\xi_1]$ 上使用罗尔定理,于是 $\exists\,\xi\in(\xi_2,\xi_1)\subset(0,2)$,使 $f''(\xi)=0$.

【例 6】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是非负、单调递减的连续函数,且 $0<a<b<1$. 证明:

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【证明】 由积分中值定理

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=af(\xi_1)\geqslant af(a),\quad \xi_1\in[0,a],$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\xi_2)\leqslant(b-a)f(a),\quad \xi_2\in[a,b].$$

于是

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant f(a)\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

故

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【另证】 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \iff b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant a\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

令 $\quad F(x)=b\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$,则

$$F'(x)=bf(x)-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t+xf(x)=\int_x^b f(x)\mathrm{d}t-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t+2xf(x)$$

$$=\int_x^b[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t+2xf(x)\geqslant0,(\text{由于 }f(x)\geqslant f(t)\geqslant0).$$

所以 $F(x)$ 单调递增. 又 $F(0)=0$, 故

$$F(a)>F(0)=0, \text{即 } b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x - a\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0,$$

亦即 $$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

第三句话:在题设条件中函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(a)=0$ 或 $f(b)=0$ 或 $f(a)=f(b)=0$,则"不管三七二十一"先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

$$f(x)\xlongequal{f(a)=0} f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a),\quad a<\xi<x.$$

或 $$f(x)\xlongequal{f(b)=0} f(x)-f(b)=f'(\xi)(x-b),\quad x<\xi<b.$$

若 $f(a)=f(b)=0$, 则 $\begin{cases} f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a), & a<\xi_1<x, \\ f(x)=f(x)-f(b)=f'(\xi_2)(x-b), & x<\xi_2<b. \end{cases}$

【例 7】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数, 且 $f(a)=f(b)=0, M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$, 试证: $\dfrac{4}{(b-a)^2}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M$.

【证明】 $f(x)\xlongequal{f(a)=0} f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi_1), a<\xi_1<x$, 则

$$|f(x)|=(x-a)|f'(\xi_1)|\leqslant(x-a)M.$$

同理 $$|f(x)|\leqslant(b-x)M.$$

于是 $$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)M\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)M\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{4}M.$$

故 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}M.$$

即 $$\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$$

【例 8】 已知在 $[0,a]$ 上 $|f''(x)|\leqslant M$, 且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取最大值, 试证:

$$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma.$$

【证明】 设 $f(c)=\max\limits_{x\in(0,a)}|f(x)|$, 则 $f'(c)=0$.(费尔马定理)

对 $f'(x)$ 在 $[0,c]$ 与 $[c,a]$ 内分别用拉格朗日中值定理, 有

$$f'(c)-f'(0)=f''(\xi_1)c,\quad 0<\xi_1<c,$$

$$f'(a)-f'(c)=f''(\xi_2)(a-c),\quad c<\xi_2<a.$$

于是 $$|f'(0)|=|f''(\xi_1)c|\leqslant Mc,$$

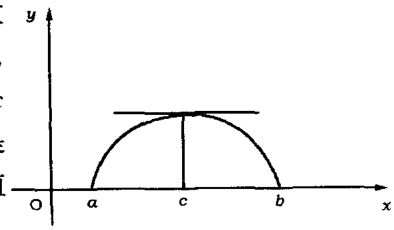
$$|f'(a)|=|f''(\xi_2)(a-c)|\leqslant M(a-c).$$

故 $$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Mc+M(a-c)=Ma.$$

【例 9】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的 $f''(x)$，且 $f''(x)<0$，$f(a)=f(b)=0$，则在 (a,b) 上 $f(x)>0$，且

$$\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>\frac{4}{b-a}.$$

【证明】 由 $f''(x)<0$ 可知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹函数（图形上凸）；由凹函数性质知，$f(x)$ 大于连接 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$ 线段上点的纵坐标. 而此线段所在直线即为 $y=0$（x 轴），所以在 (a,b) 上 $f(x)>0$. 再由 $f''(x)<0$ 知，$f'(x)$ 是严格单调减少的，从而知 $f(x)$ 在 (a,b) 内有唯一的极大值点，记为 $x=c$. 此时 $f'(c)=0$，如右图所示，而在 (a,c) 上，$f'(x)>0$，在 (c,b) 上 $f'(x)<0$. 由拉格朗日中值定理，当 $x\in[a,c]$ 时，



$$f(x)=f'(\xi_1)(x-a)+f(a),\quad \xi_1\in(a,x).$$

由 $f'(x)$ 严格递减，$f'(\xi_1)<f'_+(a)$，注意到 $f(a)=0$，有

$$f(x)<f'_+(a)(c-a),x\in[a,c].$$

当 $x\in[c,b]$ 时，同理可得

$$f(x)<[-f'_-(b)](b-c),x\in[c,b].$$

于是

$$\frac{1}{f(x)}>\frac{1}{(c-a)f'_+(a)},x\in[a,c],$$

$$\frac{1}{f(x)}>\frac{1}{(b-c)(-f'_-(b))},x\in[c,b].$$

则

$$\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x=-\int_a^b\frac{f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^c\frac{-f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x+\int_c^b\frac{-f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$$

$$>\int_a^c\frac{-f''(x)}{(c-a)f'_+(a)}\mathrm{d}x+\int_c^b\frac{-f''(x)}{(b-c)(-f'_-(b))}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{(c-a)f'_+(a)}[f'_+(a)-f'(c)]+\frac{1}{(b-c)(-f'_-(b))}[f'(c)-f'_-(b)]$$

$$=\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{b-a}{(c-a)(b-c)}>(b-a)\frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}=\frac{4}{b-a}.$$

第四句话：对定限或变限积分，若被积函数或其主要部分为复合函数，则“不管三七二十一”先做变量替换使之成为简单形式 $f(u)$ 再说.

【例 10】 求下列函数的导数（设 $f(u)$ 是 u 的连续函数）：

(1) $F(y)=\int_0^y f(x-y)\mathrm{d}x$，求 $F'(y)$；　(2) $F(x)=\int_0^{x^2}tf(x-t)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$；

(3) $F(x)=\int_0^1 f(te^x)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$；　(4) $F(x)=\int_0^{x^2}xf(x+t)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$.

【解】 (1) $F(y)\xlongequal{令 u=x-y}\int_{-y}^0 f(u)\mathrm{d}u$，则 $F'(y)=-f(-y)\cdot(-1)=f(-y)$.

(2) $F(x)\xlongequal{令 u=x-t}\int_x^{x-x^2}(x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)$

$$= -x\int_x^{x-x^2} f(u)\mathrm{d}u + \int_x^{x-x^2} uf(u)\mathrm{d}u,$$

则 $$F'(x) = -\int_x^{x-x^2} f(u)\mathrm{d}u - x[f(x-x^2)\cdot(1-2x) - f(x)]$$
$$+ (1-2x)(x-x^2)f(x-x^2) - xf(x)$$
$$= \int_{x-x^2}^{x} f(u)\mathrm{d}u + x^2(2x-1)f(x-x^2).$$

(3) $$F(x) \xlongequal{\text{令 } u = te^x} \int_0^{e^x} f(u)\frac{1}{e^x}\mathrm{d}u = \frac{1}{e^x}\int_0^{e^x} f(u)\mathrm{d}u = e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)\mathrm{d}u,$$

则 $$F'(x) = -e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)\mathrm{d}u + e^{-x}f(e^x)\cdot e^x = f(e^x) - e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)\mathrm{d}u.$$

(4) $\int_0^{x^2} f(x+t)\mathrm{d}t \xlongequal{\text{令 } u = x+t} \int_x^{x+x^2} f(u)\mathrm{d}u$，于是有 $F(x) = x\int_x^{x+x^2} f(u)\mathrm{d}u$，则

$$F'(x) = \int_x^{x+x^2} f(u)\mathrm{d}u + x[f(x+x^2)(1+2x) - f(x)].$$

【例 11】 设 $f(x)$ 可微，且满足 $x = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$.

【解】 $$\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t \xlongequal{\text{令 } u = t-x} \int_{-x}^0 (u+x)f(u)\mathrm{d}u = -\int_0^{-x} uf(u)\mathrm{d}u + x\int_{-x}^0 f(u)\mathrm{d}u.$$

于是原方程变为 $$x = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{-x} uf(u)\mathrm{d}u - x\int_0^{-x} f(u)\mathrm{d}u.$$

两边对 x 求导，得 $$1 = f(x) - (-x)f(-x)(-1) - \int_0^{-x} f(u)\mathrm{d}u - xf(-x)(-1).$$

整理，得 $$1 = f(x) - \int_0^{-x} f(u)\mathrm{d}u,$$

两边再对 x 求导，得 $$0 = f'(x) - f(-x)(-1),$$

即 $$f'(x) = -f(-x), \qquad ①$$

上式两边对 x 求导，得 $$f''(x) = f'(-x), \qquad ②$$

由 ①，② 得 $$f''(x) = -f(x),$$

即 $$f''(x) + f(x) = 0,$$

解此方程得 $$f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

注意到 $f(0) = 1, f'(0) = -1$，故 $f(x) = \cos x - \sin x$.

注：第四句话可推广为：若给定的函数为抽象的复合函数，则运算之前应先做变量替换，使之成为简单的形式.

例如：$f[\varphi(x)] \xlongequal{\text{令 } u = \varphi(x)} f(u)$.

【例 12】 设 $f(x^2-1) = \ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$，$f[\varphi(x)] = \ln x$，计算 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x$.

【解】 令 $x^2 - 1 = t$，则 $f(t) = \ln\dfrac{t+1}{t-1}$，$f[\varphi(x)] = \ln\dfrac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \ln x$，

$$\Rightarrow \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = x \Rightarrow \varphi(x) = \frac{x+1}{x-1},$$

故 $$\int\varphi(x)\mathrm{d}x = \int\frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x = x + 2\ln|x-1| + c.$$