

陈文灯 黄先开 主编



文登培训学校考研系列数学指定用书·第九版

数学

复习指南

<http://www.cooo.com.cn>

2004版

一本好的数学辅导书，应该具备三个要素：一是看它是否以题型为思路，而不是搞题海战术；二是该书是否具有前瞻性，能否适应现在和今后的考试；三是该书是否严格遵循大纲，难度与考试试卷相符或略微偏高。

——陈文灯



世界图书出版公司

陈文灯 黄先开 主 编
曹显兵 施明存 副主编



2004版

文登培训学校考研系列数学指定用书·第九版

数 学

复习指南

北京聚骄文化发展有限公司 策划



 世界图书出版公司

北京·广州·上海·西安

图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南. 理工类 / 陈文灯, 黄先开编著. —9 版. —北京: 世界图书出版公司北京公司, 2002.3

ISBN 7-5062-5211-2

I. 数... II. ①陈... ②黄... III. 高等数学-研究生-入学考试-解题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 014886 号

数学复习指南(理工类)

(2004 版文登培训学校考研系列 数学指定用书)

主 编: 陈文灯 黄先开
副 主 编: 曹显兵 施明存
责任编辑: 世 华
封面设计: 王 野 滕晓娜

出 版: 世界图书出版公司北京公司
发 行: 世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号 电话 62116800 邮编 100010)
销 售: 各地新华书店
印 刷: 廊坊人民印刷厂

开 本: 787×1092 毫米 1/16
印 张: 39.125
字 数: 925 千字
版 次: 2003 年 2 月第 9 版 2003 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-5211-2/O·332

定价: 49.80 元

服务热线: 010-62198078

律 师 声 明

敬启者：

我们,中华人民共和国执业律师,受当事人北京聚骄文化发展有限公司(以下简称为“我方当事人”)委托,全权处理我方当事人代理出版事务及发行聚焦考研 2004 版《数学复习指南(理工类)》一书工作中的著作权事宜。现依据中华人民共和国法律,专发此声明。

我方当事人是聚焦考研 2004 版《数学复习指南(理工类)》一书的出版事务代理者,该书作者已与我方当事人签署了著作权独家许可使用协议书,保证其对我方当事人是独家授权。依照我国著作权法的有关规定及我方当事人与作者的合同约定,我方当事人享有对该作品的独家使用权。同时作者保证独家授权我方当事人在聚焦考研 2004 版《数学复习指南(理工类)》一书上使用其名字,即其署名权也由我方当事人独家使用。

在此,我们代表我方当事人及其签约作者郑重声明:任何单位、个人未经我方当事人书面授权,擅自出版、发行我方当事人享有著作权的聚焦考研 2004 版《数学复习指南(理工类)》一书,或者未经我方当事人书面同意,擅自在其出版、发行的图书上使用与我方当事人有协议约定的作者姓名(无论是否经过作者授权),这些行为均违反《中华人民共和国著作权法》及其他相关法律,将严重侵犯我方当事人的合法权益。因此,侵权人应当公开向我方当事人和签约作者道歉,并赔偿由此给我方当事人造成的全部经济损失和商誉损失。

上述侵权行为一经发现,我们将代表我方当事人通过必要的法律途径、立即采取相关法律措施,追究侵权人的法律责任。

特此声明。

北京市浩天律师事务所

肖 群 律师

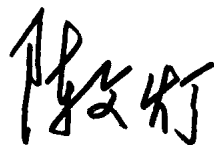
张景伟 律师

2003 年 1 月 16 日

作 者 声 明

本人在数学研究生入学考试方面的著作权授予北京聚骄文化发展有限公司独家使用,其他出版单位不得以本人的名义署名或抄袭相关著作的内容。

特此声明。



2003 年 1 月 16 日

第九版修订说明

“卧薪尝胆汗泪流,破釜沉舟志未酬;安得妙笔抒锦绣,大师文灯点春秋。”一位署名新浪网友的读者通过网址给我发来这封邮件,令我惴惴多日。对于网友的溢美与厚望,我实在受之有愧,惶恐难当。不过,卧薪尝胆与破釜沉舟,想必能激起广大考生的共鸣。因为它比较真实、比较准确地反映了考生的艰辛之旅与求索之志。考研不易啊!这些年来,我从讲考研班和写考研书上都做了些工作,在全国各地交了很多忘年的学生朋友,他们对于我的授课方式和拙著提出了很多很好的建议,这对我丰富授课内容和完善拙著起了十分重要的作用。我正是带着这种惟恐误人、惟恐负人的责任与沉重,穷尽心智,开始了2004版《数学复习指南》等书的修订工作。

《数学复习指南》自第一版问世至今已九个年头了,今年根据刚刚考过的试题和《数学复习大纲》的基本要求,结合最近三年命题的特点及我在去年评阅试卷和在文登学校考研班上的教学实践进行了修订,对难度较大的题型均作出思维定式处理,对文字错误进行了地毯式的校对。读者在短期内,对照本书归纳总结的方法、技巧,研读相关的典型例题便可融汇贯通、举一反三、触类旁通。本书这次修订后更加突出和完善以题型为纲的特点,内容更加充实、丰满,例题更具典型性,总结的解题方法和规律更有仿效的价值、更可开拓思路。另外,本书的篇前篇是我们多年教学经验的浓缩,相信在考研中能助考研学子一臂之力。

本书特点如下:

(1)对大纲所要求的重要概念、公式、定理进行剖析,增强读者对这些内容的理解和记忆,避免犯概念性及错用公式、定理的错误。

(2)针对“考研”题型,安排相应章节,深入分析探究,总结出解题方法、技巧,便于读者掌握和应用。

(3)用“举题型讲方法”的格式代替各书普通采用的“讲方法套题型”的作法,使读者应试时思路畅通,有的放矢。

(4)介绍许多新的快速解题方法、技巧,大大提高读者的解题速度和准确性。同时,设计和改造的众多的新题,使读者在做似曾相识的题型中了解和掌握考研综合题的编制过程和规律性,减少对试题的神秘感,多几分“攻坚”的信心和勇气。

(5)广泛采用表格法,使读者对要点一目了然。

毋庸置疑,本书是面向考研学生的,但近几年来有两类学生也使用本书:一是在读本科生,他(她)们借助本书作阶段或期末复习之用;二是专升本学生。近几年专升本考试试题中的难题与本书的较简单例题不谋而合,这就促使专升本考生和辅导老师使用本书。

恳请广大读者和使用本书的老师们提出批评和指正。

陈文灯

2003.2

目 录

篇前篇 高数解题的四种思维定势	1
-----------------	---

第一篇 高等数学

第一章 函数·极限·连续	7
§ 1.1 函数	7
一、函数的定义	7
二、函数的定义域的求法	8
三、函数的基本性质	9
四、分段函数	14
五、初等函数	14
§ 1.2 函数的极限及其连续性	18
一、概念	18
二、重要定理与公式	20
§ 1.3 极限的求法	28
一、未定式的定值法	28
二、类未定式	31
三、数列的极限	33
四、极限式中常数的确定(重点)	37
五、杂例	40
习题一	44
第二章 导数与微分	48
§ 2.1 定义·定理·公式	48
一、导数与微分的定义	48
二、定理	50
三、导数与微分的运算法则	50
四、基本公式	51
五、弧微分	51
§ 2.2 各类函数导数的求法	52
一、复合函数微分法	52
二、参数方程微分法	53
三、隐函数微分法	54
四、幂指函数微分法	55
五、函数表达式为若干因子连乘积、 乘方、开方或商形式的微分法	56
六、分段函数微分法	56
§ 2.3 高阶导数	58
一、定义与基本公式	58

二、高阶导数的求法	58
习题二	61
第三章 不定积分	65
§ 3.1 不定积分的概念与性质	65
一、不定积分的概念	65
二、基本性质	65
三、基本公式	66
§ 3.2 基本积分法	67
一、第一换元积分法(也称凑微分法)	67
二、第二换元积分法	71
三、分部积分法	75
§ 3.3 各类函数积分的技巧及分析	80
一、有理函数的积分	80
二、简单无理函数的积分	81
三、三角有理式的积分	83
四、含有反三角函数的不定积分	86
五、抽象函数的不定积分	87
六、分段函数的不定积分	87
习题三	89
第四章 定积分及广义积分	92
§ 4.1 定积分性质及有关定理与公式	92
一、基本性质	92
二、定理与公式	95
§ 4.2 定积分的计算法	99
一、牛顿—莱布尼兹公式	99
二、定积分的换元积分法	99
三、定积分的分部积分法	101
§ 4.3 特殊形式的定积分计算	102
一、分段函数的积分	102
二、被积函数带有绝对值符号的积分	104
三、被积函数中含有“变上限积分” 的积分	105
四、对称区间上的积分	107
五、被积函数的分母为两项,而分子为 其中一项的积分	108
六、由三角有理式与其它初等函数通 过四则或复合而成的函数的积分	109

七、杂例	111
§ 4.4 定积分有关命题证明的技巧	113
一、定积分等式的证明	113
二、定积分不等式的证明	121
习题四(1)	127
§ 4.5 广义积分	129
一、基本概念及判别法则	129
二、广义积分的计算及判别	130
习题四(2)	134
第五章 中值定理的证明技巧	136
§ 5.1 连续函数在闭区间上的性质	136
一、基本定理	136
二、有关闭区间上连续函数的命题的证法	136
习题五(1)	138
§ 5.2 微分中值定理及台劳公式	139
一、基本定理	139
二、台劳公式	140
§ 5.3 证题技巧分析	143
一、欲证结论:至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f^{(n)}(\xi) = 0$ 的命题证法	143
二、欲证结论:至少 $\exists$ 一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f^{(n)}(\xi) = k (\neq 0)$ 及其代数式的证法	145
三、欲证结论:在 (a, b) 内至少 $\exists \xi, \eta$, $\xi \neq \eta$ 满足某种关系式的命题的证法	150
习题五(2)	151
第六章 常微分方程	152
§ 6.1 基本概念	152
一、微分方程	152
二、微分方程的阶	152
三、微分方程的解	152
§ 6.2 一阶微分方程	153
一、各类一阶方程解法一览表	153
二、解题技巧及分析	154
§ 6.3 可降阶的高阶方程	161
一、可降阶的高阶方程解法一览表	161
二、解题技巧及分析	162
§ 6.4 高阶线性微分方程	163
一、二阶线性微分方程解的结构	163
二、二阶常系数线性微分方程	164
三、 n 阶常系数线性方程	165

四、欧拉方程	171
§ 6.5 微分方程的应用	172
一、在几何中的应用	172
二、在力学中的应用	174
习题六	175
第七章 一元微积分的应用	178
§ 7.1 导数的应用	178
一、利用导数判别函数的单调增减性	178
二、利用导数研究函数的极值与最值	179
三、关于方程根的研究	185
四、函数作图	189
§ 7.2 定积分的应用	192
一、微元法及其应用	192
二、平面图形的面积	194
三、立体体积	196
四、平面曲线的弧长	198
五、旋转体的侧面积	198
六、变力做功、引力、液体的静压力	198
习题七	201
第八章* 无穷级数	204
§ 8.1 基本概念及其性质	204
§ 8.2 数项级数判别法	205
一、正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, (u_n \geq 0)$ 敛散性的判别法	205
二、交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n (u_n > 0)$ 的判别法	210
三、任意项级数	211
四、杂例	213
§ 8.3 幂级数	217
一、函数项级数的概念	217
二、幂级数	219
§ 8.4 无穷级数求和	225
一、幂级数求和函数	225
二、数项级数求和	229
§ 8.5 付立叶级数	233
一、概念、定理	233
二、周期与非周期函数的付立叶级数	235
习题八	239
第九章* 矢量代数与空间解析几何	243
§ 9.1 矢量的概念及其性质	243
一、概念及其运算	243

二、 矢量之间的关系	244
§ 9.2 平面与直线	248
§ 9.3 投影方程	253
§ 9.4 曲面方程	255
一、 柱面与旋转面方程	255
习题九	259
第十章* 多元函数微分学	261
§ 10.1 基本概念及定理与公式	261
一、 二元函数的定义	261
二、 二元函数的极限及连续性	262
三、 偏导数、全导数及全微分	263
四、 基本定理	264
§ 10.2 多元函数微分法	267
一、 简单显函数 $u = f(x, y, z)$ 的 微分法	267
二、 复合函数微分法	267
三、 隐函数微分法	271
§ 10.3 多元函数微分学在几何上的应用	273
一、 空间曲线在某点处的切线和法 平面方程	273
二、 空间曲面在其上某点处的切平 面和法线方程	275
§ 10.4 多元函数的极值	276
一、 概念、定理与公式	276
二、 条件极值与无条件极值	277
习题十	282
第十一章* 重积分	284
§ 11.1 概念·性质·公式	284
一、 概念	284
二、 性质	284
三、 公式	286
§ 11.2 二重积分的解题技巧	288
一、 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 的解题程序	288
二、 极坐标系中积分限的确定	289
三、 典型例题分析	290
§ 11.3 二重积分的证题技巧	297
一、 有关等式的证明	297
二、 二重积分不等式的证明	300
§ 11.4 三重积分的计算	302
一、 $\iiint_\Omega f(x, y, z) dv$ 的解题程序	302
二、 坐标系的选择	302
三、 球面坐标系中积分限的确定	303

四、 更换积分次序	304
五、 三重积分计算	305
习题十一	307
第十二章* 曲线、曲面积分及 场论初步	311
§ 12.1 曲线积分的概念及性质	311
一、 对弧长的曲线积分	311
二、 对坐标的曲线积分	311
三、 两种曲线积分之间的关系	312
§ 12.2 曲线积分的理论及计算方法	312
一、 基本定理	312
二、 对弧长的曲线积分的计算方法	313
三、 对坐标的曲线积分 $\int_L P(x, y) dx +$ $Q(x, y) dy$ 的计算法	314
§ 12.3 曲面积分的概念与性质	320
一、 对面积的曲面积分	320
二、 对坐标的曲面积分	320
三、 两种曲面积分之间的关系	321
§ 12.4 曲面积分的理论与计算方法	321
一、 基本定理	321
二、 对面积的曲面积分的计算法	322
三、 对坐标的曲面积分的计算法	323
§ 12.5 曲面面积的计算法	328
§ 12.6 场论初步	330
一、 概念与公式	330
二、 例题选讲	331
习题十二	334
第十三章 函数方程与不等式证明	336
§ 13.1 函数方程	336
一、 利用函数表示法与用何字母表示 无关的“特性”求解方程	336
二、 利用极限求解函数方程	337
三、 利用导数的定义求解方程	338
四、 利用变上限积分的可导性求解方程	338
五、 利用连续函数的可积性及原函数的 连续性求解	339
六、 利用解微分方程的方法求解 $f(x)$	340
§ 13.2 不等式的证明	343
一、 引入参数法	343
二、 利用微分中值定理	344
三、 利用函数的单调增减性(重点)	346
四、 利用函数的极值与最值	347
五、 利用函数图形的凹凸性	349

六、利用台劳展开式	349
七、杂例	351
习题十三	353

第二篇 线性代数

第一章 行列式	356
§ 1.1 行列式的概念	356
一、排列与逆序	356
二、 n 阶行列式的定义	357
§ 1.2 性质、定理与公式	358
一、行列式的基本性质	358
二、行列式按行(列)展开定理	361
三、重要公式与结论	362
§ 1.3 典型题型分析	362
题型一 抽象行列式的计算	362
题型二 低阶行列式的计算	363
题型三 n 阶行列式的计算	365
§ 1.4 杂例	370
习题一	372
第二章 矩阵	375
§ 2.1 矩阵的概念与运算	375
一、矩阵的概念	375
二、矩阵的运算	375
§ 2.2 逆矩阵	378
一、逆矩阵的概念	378
二、利用伴随矩阵求逆矩阵	379
三、矩阵的初等变换与求逆	380
四、分块矩阵及其求逆	381
§ 2.3 典型题型分析	381
题型一 求逆矩阵	381
题型二 求矩阵的高次幂 A^m	384
题型三 有关初等矩阵的命题	386
题型四 解矩阵方程	386
题型五 求矩阵的秩	388
题型六 关于矩阵对称、反对称命题 的证明	390
题型七 关于方阵 A 可逆的证明	390
题型八 与 A 的伴随阵 A^* 有关的 命题的证明	391
题型九 关于矩阵秩的命题的证明	393
习题二	394
第三章 向量	400
§ 3.1 基本概念	400

一、向量的概念与运算	400
二、向量间的线性关系	400
三、向量组的秩和矩阵的秩	401
四、向量空间*	402
§ 3.2 重要定理与公式	404
§ 3.3 典型题型分析	404
题型一 讨论向量组的线性相关性	404
题型二 有关向量组线性相关性命题 的证明	408
题型三 判定一个向量是否可由一组 向量线性表示	414
题型四 有关向量组线性表示命题的 证明	415
题型五 求向量组的极大线性无关组	417
题型六 有关向量组或矩阵秩的计算 与证明	420
题型七 与向量空间有关的命题*	424
习题三	425

第四章 线性方程组	429
§ 4.1 概念、性质、定理	429
一、克莱姆法则	429
二、线性方程组的基本概念	430
三、线性方程组解的判定	430
四、非齐次组 $Ax = b$ 与齐次组 $Ax = 0$ 解的关系	431
五、线性方程组解的性质	431
六、线性方程组解的结构	431
§ 4.2 典型题型分析	433
题型一 基本概念题(解的判定、性质、 结构)	433
题型二 含有参数的线性方程组解 的讨论	436
题型三 讨论两个方程组的公共解	441
题型四 有关基础解系的证明	443
题型五 综合题	444
习题四	449

第五章 特征值和特征向量	453
§ 5.1 概念与性质	453
一、矩阵的特征值和特征向量的概念	453
二、特征值与特征向量的计算方法	453
三、相似矩阵及其性质	454
四、矩阵可相似对角化的充要条件	454
五、对称矩阵及其性质	454

§ 5.2 重要公式与结论	455
§ 5.3 典型题型分析	456
题型一 求数值矩阵的特征值与特征向量	456
题型二 求抽象矩阵的特征值、特征向量	457
题型三 特征值、特征向量的逆问题	458
题型四 相似的判定及其逆问题	460
题型五 判断 A 是否可对角化	462
题型六 综合应用问题	464
题型七 有关特征值、特征向量的证明题	470
习题五	472
第六章* 二次型	475
§ 6.1 基本概念与定理	475
一、二次型及其矩阵表示	475
二、化二次型为标准型	475
三、用正交变换法化二次型为标准形	476
四、二次型和矩阵的正定性及其判别法	476
§ 6.2 典型题型分析	479
题型一 二次型所对应的矩阵及其性质	479
题型二 化二次型为标准形	480
题型三 已知二次型通过正交变换化为标准形,反求参数	483
题型四 有关二次型及其矩阵正定性的判定与证明	485
习题六	488

第三篇* 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率	490
§ 1 基本概念、性质与公式	490
一、随机试验和随机事件	490
二、事件的关系及其运算	490
三、事件的概率及其性质	493
四、条件概率与事件的独立性	493
五、重要概型	495
六、重要公式	495
§ 2 典型题型分析	496
题型一 古典概型与几何概型	496
题型二 事件的关系和概率性质的命题	499
题型三 条件概率与积事件概率的计算	502
题型四 全概率公式与 Bayes 公式的命题	503
题型五 有关 Bernoulli 概型的命题	506
习题一	507

第二章 随机变量及其分布	511
§ 1 基本概念、性质与公式	511
一、概念与公式一览表	511
二、重要的一维分布	514
三、重要的二维分布	515
§ 2 典型题型分析	516
题型一 一维随机变量及其分布的概念、性质的命题	516
题型二 求一维随机变量的分布律、概率密度或分布函数	520
题型三 求一维随机变量函数的分布	523
题型四 二维随机变量及其分布的概念、性质的考查	526
题型五 求二维随机变量的各种分布与随机变量独立性的讨论	528
题型六 求两个随机变量的简单函数的分布	536
习题二	540
第三章 随机变量的数字特征	547
§ 1 基本概念、性质与公式	547
一、一维随机变量的数字特征	547
二、二维随机变量的数字特征	549
三、几种重要的数学期望与方差	550
四、重要公式与结论	551
§ 2 典型题型分析	551
题型一 求一维随机变量的数字特征	551
题型二 求一维随机变量函数的数学期望	555
题型三 求二维随机变量及其函数的数字特征	558
题型四 有关数字特征的证明题	568
题型五 应用题	569
习题三	571
第四章 大数定律和中心极限定理	575
§ 1 基本概念与定理	575
一、切比雪夫不等式	575
二、中心极限定理	575
三、重要公式与结论	576
四、注意	576
§ 2 典型题型分析	577
题型一 有关切比雪夫不等式与大数定律的命题	577
题型二 有关中心极限定理的命题	578

习题四	581
第五章 数理统计的基本概念	583
§1 基本概念、性质与公式	583
一、几个基本概念	583
二、三个抽样分布—— χ^2 分布、 t 分布 与 F 分布	584
三、正态总体下常用统计量的性质	584
四、重要公式与结论	585
§2 典型题型分析	586
题型一 求统计量的数字特征或取值 的概率、样本的容量	586
题型二 求统计量的分布	587
习题五	589
第六章 参数估计	591
§1 基本概念、性质与公式	591
一、矩估计与极大似然估计	591
二、估计量的评选标准	592
三、区间估计	593

四、重要公式与结论	594
§2 典型题型分析	595
题型一 求矩估计和极大似然估计	595
题型二 评价估计的优劣	599
题型三 区间估计或置信区间的命题	600
习题六	602
第七章 假设检验	605
§1 基本概念与公式	605
一、显著性检验的基本思想	605
二、假设检验的基本步骤	605
三、两类错误	605
四、正态总体未知参数的假设检验	606
五、假设检验与区间估计的联系	606
§2 典型题型分析	607
题型一 正态总体的均值和方差的 假设检验	607
题型二 有关两类错误的命题	608
习题七	609

注:带 * 篇、章,数二考生不作要求。

篇前篇 高数解题的四种思维定势

先赠送给大家四句话,相信在考研中能起到关键作用,请考生务必牢记.

* 第一句话:在题设条件中若函数 $f(x)$ 二阶或二阶以上可导,“不管三七二十一”,把 $f(x)$ 在指定点展成泰勒公式再说. *

【例1】 设 C 为实数,函数 $f(x)$ 满足下列两个等式:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = C, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'''(x) = 0.$$

求证: $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$.

【证明】 由泰勒公式有

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_1), \quad x < \xi_1 < x+1, \quad (1)$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2), \quad x-1 < \xi_2 < x. \quad (2)$$

$$\text{由 } (1) + (2) \text{ 得, } f''(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_2) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1). \quad (3)$$

$$\text{由 } (1) - (2) \text{ 得, } 2f'(x) = f(x+1) - f(x-1) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2). \quad (4)$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\xi_1 \rightarrow \infty, \xi_2 \rightarrow \infty$, 于是有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 2C - 2C + \frac{1}{6} \times 0 - \frac{1}{6} \times 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2f'(x) = C - C - \frac{1}{6} \times 0 - \frac{1}{6} \times 0 = 0.$$

因此 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$.

【例2】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶导数连续, $f(0) = f(1) = 0$, 并且当 $x \in (0,1)$ 时, $|f''(x)| \leq A$. 求证: $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}, x \in [0,1]$.

【证明】 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数, 则 $f(x)$ 可展成一阶泰勒公式, 即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x - x_0)^2, \quad \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间.}$$

取 $x = 0, x_0 = x$, 则

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0 - x) + f''(\xi_1) \frac{(0 - x)^2}{2!}, \quad 0 < \xi_1 < x \leq 1; \quad (1)$$

取 $x = 1, x_0 = x$, 则

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1 - x) + f''(\xi_2) \frac{(1 - x)^2}{2!}, \quad 0 \leq x < \xi_2 < 1. \quad (2)$$

② - ① 得

$$f'(x) = f(1) - f(0) + \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1 - x)^2]$$



$$\frac{f(0) = f(1) = 0}{2!} \frac{1}{2!} [f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2].$$

又 $|f''(x)| \leq A, x \in (0, 1)$, 则

$$|f'(x)| \leq \frac{A}{2} [x^2 + (1-x)^2] = \frac{A}{2} (2x^2 - 2x + 1).$$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $2x^2 - 2x + 1 \leq 1$. 故 $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}$.

【例3】 试证:若偶函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数, 且 $f(0)=1$,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right]$ 绝对收敛.

【证明】 因 $f(x)$ 为偶函数, 故 $f'(x)$ 为奇函数, $f'(0)=0$. 又

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{f''(0)}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故 $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{f''(0)}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$

从而 $|u_n| = \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right| \sim \frac{|f''(0)|}{2n^2}.$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f''(0)|}{2n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

【例4】 设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x) \geq 0, x \in (-\infty, +\infty)$, 函数 u 在区间 $[0, a]$ ($a > 0$) 上连续. 证明:

$$\frac{1}{a} \int_0^a f[u(t)] dt \geq f\left[\frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt\right].$$

【证明】 令 $x_0 = \frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt$, 将 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处展成一阶泰勒公式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(\xi)(x - x_0)^2.$$

由于 $f''(x) \geq 0$, 则 $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

令 $x = u(t)$, 则 $f[u(t)] \geq f(x_0) + f'(x_0)[u(t) - x_0]$.

上式两边在 $[0, a]$ 上对 t 积分, 得

$$\begin{aligned} \int_0^a f[u(t)] dt &\geq \int_0^a f(x_0) dt + \int_0^a f'(x_0)[u(t) - x_0] dt \\ &= af(x_0) + f'(x_0) \left[\int_0^a u(t) dt - ax_0 \right] = af(x_0). \end{aligned}$$

故 $\frac{1}{a} \int_0^a f[u(t)] dt \geq f\left[\frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt\right].$

【另证】 因 $f''(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 为凸函数. 因此, 具有性质:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \quad (\text{其中 } \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1).$$

由 u 在 $[0, a]$ 上连续, 从而可积. 将 $[0, a]$ 分成 n 等分, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{u(\xi_i)}{a} \frac{a}{n} = \frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt.$$



由 f 的凸性及连续性,有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \frac{u(\xi_i)}{a} \cdot \frac{a}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f[u(\xi_i)] = \sum_{i=1}^n \frac{f(u(\xi_i))}{a} \cdot \frac{a}{n}.$$

对上式两边令 $n \rightarrow \infty$ 取极限,由可积性可得

$$f\left(\frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt\right) \leq \frac{1}{a} \int_0^a f(u(t)) dt.$$

* 第二句话:在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时,则“不管三七二十一”先用
* 积分中值定理对该积分式处理一下再说.

【例 5】 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续,在 $(0, 2)$ 内二阶可导,且 $f(0) = f(\frac{1}{2})$, $2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = f(2)$. 证明:存在一个 $\xi \in (0, 2)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

【证明】 $f(2) = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \xrightarrow{\text{积分中值定理}} 2(1 - \frac{1}{2})f(\eta) = f(\eta)$, $\frac{1}{2} \leq \eta \leq 1$.

于是 $f(x)$ 在 $[\eta, 2]$ 上满足罗尔定理,即存在一个 $\xi_1 \in (\eta, 2)$, 使

$$f'(\xi_1) = 0. \quad ①$$

又 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上满足罗尔定理,于是存在一个 $\xi_2 \in (0, \frac{1}{2})$, 使

$$f'(\xi_2) = 0. \quad ②$$

由 ①, ② 可知 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. 再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_2, \xi_1]$ 上使用罗尔定理,于是 $\exists \xi \in (\xi_2, \xi_1) \subset (0, 2)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

【例 6】 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是非负、单调递减的连续函数,且 $0 < a < b < 1$. 证明:

$$\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

【证明】 由积分中值定理

$$\int_0^a f(x) dx = af(\xi_1) \geq af(a), \quad \xi_1 \in [0, a],$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi_2) \leq (b-a)f(a), \quad \xi_2 \in [a, b].$$

$$\text{于是} \quad \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx \geq f(a) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \geq \frac{1}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{故} \quad \int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{【另证】} \quad \int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow b \int_0^a f(x) dx \geq a \int_a^b f(x) dx.$$

令 $F(x) = b \int_0^x f(t) dt - x \int_x^b f(t) dt$, 则

$$\begin{aligned} F'(x) &= bf(x) - \int_x^b f(t) dt + xf(x) = \int_x^b f(x) dt - \int_x^b f(t) dt + 2xf(x) \\ &= \int_x^b [f(x) - f(t)] dt + 2xf(x) \geq 0, \quad (\text{由于 } f(x) \geq f(t) \geq 0). \end{aligned}$$



所以 $F(x)$ 单调递增. 又 $F(0) = 0$, 故

$$F(a) > F(0) = 0, \text{ 即 } b \int_0^a f(x) dx - a \int_a^b f(x) dx > 0,$$

亦即
$$\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

第三句话: 在题设条件中函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$ 或 $f(a) = f(b) = 0$, 则“不管三七二十一”先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

$$f(x) \stackrel{f(a)=0}{=} f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a), \quad a < \xi < x.$$

或
$$f(x) \stackrel{f(b)=0}{=} f(x) - f(b) = f'(\xi)(x-b), \quad x < \xi < b.$$

若 $f(a) = f(b) = 0$, 则
$$\begin{cases} f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x-a), & a < \xi_1 < x, \\ f(x) = f(x) - f(b) = f'(\xi_2)(x-b), & x < \xi_2 < b. \end{cases}$$

【例 7】 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导数, 且 $f(a) = f(b) = 0, M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$, 试证: $\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M$.

【证明】 $f(x) \stackrel{f(a)=0}{=} f(x) - f(a) = (x-a)f'(\xi_1), a < \xi_1 < x$, 则 $|f(x)| = (x-a)|f'(\xi_1)| \leq (x-a)M$.

同理 $|f(x)| \leq (b-x)M$.

于是
$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)| dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx \\ &\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)M dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)M dx = \frac{(b-a)^2}{4} M. \end{aligned}$$

故
$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{(b-a)^2}{4} M.$$

即
$$\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

【例 8】 已知在 $[0, a]$ 上 $|f''(x)| \leq M$, 且 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内取最大值, 试证: $|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma$.

【证明】 设 $f(c) = \max_{x \in (0, a)} f(x)$, 则 $f'(c) = 0$. (费尔马定理)

对 $f'(x)$ 在 $[0, c]$ 与 $[c, a]$ 内分别用拉格朗日中值定理, 有

$$f'(c) - f'(0) = f''(\xi_1)c, \quad 0 < \xi_1 < c,$$

$$f'(a) - f'(c) = f''(\xi_2)(a-c), \quad c < \xi_2 < a.$$

于是 $|f'(0)| = |f''(\xi_1)c| \leq Mc,$

$$|f'(a)| = |f''(\xi_2)(a-c)| \leq M(a-c).$$

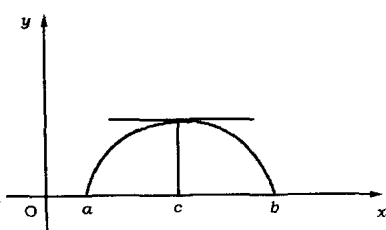
故 $|f'(0)| + |f'(a)| \leq Mc + M(a-c) = Ma.$



【例9】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的 $f''(x)$, 且 $f''(x) < 0, f(a) = f(b) = 0$, 则在 (a, b) 上 $f(x) > 0$, 且

$$\int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > \frac{4}{b-a}.$$

【证明】 由 $f''(x) < 0$ 可知, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凹函数 (图形上凸); 由凹函数性质知, $f(x)$ 大于连接 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 线段上点的纵坐标. 而此线段所在直线即为 $y = 0$ (x 轴), 所以在 (a, b) 上 $f(x) > 0$. 再由 $f''(x) < 0$ 知, $f'(x)$ 是严格单调减少的, 从而知 $f(x)$ 在 (a, b) 内有唯一的极大值点, 记为 $x = c$. 此时 $f'(c) = 0$, 如右图所示, 而在 (a, c) 上,



$f'(x) > 0$, 在 (c, b) 上 $f'(x) < 0$. 由拉格朗日中值定理, 当 $x \in [a, c]$ 时,

$$f(x) = f'(\xi_1)(x-a) + f(a), \quad \xi_1 \in (a, x).$$

由 $f'(x)$ 严格递减, $f'(\xi_1) < f'_+(a)$, 注意到 $f(a) = 0$, 有

$$f(x) < f'_+(a)(x-a), \quad x \in [a, c].$$

当 $x \in [c, b]$ 时, 同理可得

$$f(x) < [-f'_-(b)](b-x), \quad x \in [c, b].$$

于是

$$\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(c-a)f'_+(a)}, \quad x \in [a, c],$$

$$\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(b-c)(-f'_-(b))}, \quad x \in [c, b].$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad \int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx &= - \int_a^b \frac{f''(x)}{f(x)} dx = \int_a^c \frac{-f''(x)}{f(x)} dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{f(x)} dx \\ &> \int_a^c \frac{-f''(x)}{(c-a)f'_+(a)} dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{(b-c)(-f'_-(b))} dx \\ &= \frac{1}{(c-a)f'_+(a)} [f'_+(a) - f'(c)] + \frac{1}{(b-c)(-f'_-(b))} [f'(c) - f'_-(b)] \\ &= \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{b-a}{(c-a)(b-c)} > (b-a) \frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{4}{b-a}. \end{aligned}$$

第四句话: 对定限或变限积分, 若被积函数或其主要部分为复合函数, 则“不管三七二十一”先做变量替换使之成为简单形式 $f(u)$ 再说.

【例10】 求下列函数的导数 (设 $f(u)$ 是 u 的连续函数):

$$(1) \quad F(y) = \int_0^y f(x-y) dx, \text{ 求 } F'(y); \quad (2) \quad F(x) = \int_0^{x^2} t f(x-t) dt, \text{ 求 } F'(x);$$

$$(3) \quad F(x) = \int_0^1 f(te^x) dt, \text{ 求 } F'(x); \quad (4) \quad F(x) = \int_0^{x^2} x f(x+t) dt, \text{ 求 } F'(x).$$

【解】 (1) $F(y) \xrightarrow{\text{令 } u = x-y} \int_{-y}^0 f(u) du$, 则 $F'(y) = -f(-y) \cdot (-1) = f(-y)$.

$$(2) \quad F(x) \xrightarrow{\text{令 } u = x-t} \int_x^{x-x^2} (x-u) f(u) (-du)$$



$$= -x \int_x^{x-x^2} f(u) du + \int_x^{x-x^2} u f(u) du,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } F'(x) &= - \int_x^{x-x^2} f(u) du - x[f(x-x^2) \cdot (1-2x) - f(x)] \\ &\quad + (1-2x)(x-x^2)f(x-x^2) - xf(x) \\ &= \int_{x-x^2}^x f(u) du + x^2(2x-1)f(x-x^2). \end{aligned}$$

$$(3) \quad F(x) \xrightarrow{\text{令 } u = te^x} \int_0^{e^x} f(u) \frac{1}{e^x} du = \frac{1}{e^x} \int_0^{e^x} f(u) du = e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du,$$

$$\text{则 } F'(x) = -e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du + e^{-x} f(e^x) \cdot e^x = f(e^x) - e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du.$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \int_0^x f(x+t) dt &\xrightarrow{\text{令 } u = x+t} \int_x^{x+x^2} f(u) du, \text{ 于是有 } F(x) = x \int_x^{x+x^2} f(u) du, \text{ 则} \\ F'(x) &= \int_x^{x+x^2} f(u) du + x[f(x+x^2)(1+2x) - f(x)]. \end{aligned}$$

【例 11】 设 $f(x)$ 可微, 且满足 $x = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t-x) dt$, 求 $f(x)$.

$$\text{【解】 } \int_0^x t f(t-x) dt \xrightarrow{\text{令 } u = t-x} \int_{-x}^0 (u+x) f(u) du = - \int_0^{-x} u f(u) du + x \int_{-x}^0 f(u) du.$$

$$\text{于是原方程变为 } x = \int_0^x f(t) dt - \int_0^{-x} u f(u) du - x \int_0^{-x} f(u) du.$$

$$\text{两边对 } x \text{ 求导, 得 } 1 = f(x) - (-x)f(-x)(-1) - \int_0^{-x} f(u) du - xf(-x)(-1).$$

$$\text{整理, 得 } 1 = f(x) - \int_0^{-x} f(u) du,$$

$$\text{两边再对 } x \text{ 求导, 得 } 0 = f'(x) - f(-x)(-1),$$

$$\text{即 } f'(x) = -f(-x), \quad \text{①}$$

$$\text{上式两边对 } x \text{ 求导, 得 } f''(x) = f'(-x), \quad \text{②}$$

$$\text{由 ①, ② 得 } f''(x) = -f(x),$$

$$\text{即 } f''(x) + f(x) = 0,$$

$$\text{解此方程得 } f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

$$\text{注意到 } f(0) = 1, f'(0) = -1, \text{ 故 } f(x) = \cos x - \sin x.$$

注: 第四句话可推广为: 若给定的函数为抽象的复合函数, 则运算之前应先做变量替换, 使之成为简单的形式.

$$\text{例如: } f[\varphi(x)] \xrightarrow{\text{令 } u = \varphi(x)} f(u).$$

$$\text{【例 12】 设 } f(x^2-1) = \ln \frac{x^2}{x^2-2}, \quad f[\varphi(x)] = \ln x, \text{ 计算 } \int \varphi(x) dx.$$

$$\text{【解】 令 } x^2-1 = t, \quad \text{则 } f(t) = \ln \frac{t+1}{t-1}, \quad f[\varphi(x)] = \ln \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \ln x,$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = x \Rightarrow \varphi(x) = \frac{x+1}{x-1},$$

$$\text{故 } \int \varphi(x) dx = \int \frac{x+1}{x-1} dx = x + 2 \ln |x-1| + c.$$