21世纪高等院校教材

力　　学

——计算机辅助教程

主编　潘武明

编委　马为川　王明明
陈义成　黄新堂

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

力　　学

——计算机辅助教程

主编　潘武明

编委　马为川　王明明

陈义成　黄新堂

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是在力学课程改革的基础上编写，经过几年的教学实践反复修改完成的．本书以牛顿力学为主，较为全面的介绍了经典力学的理论以及解决力学问题的主要思想、方法．为适应物理学的发展，本书适当地介绍了现代物理学的发展以及与牛顿力学的关系．为提高教学效果与效率，采用计算机辅助教学的现代化教育手段．为提高学生研究问题与解决问题的能力，本教材还介绍了解牛顿动力学方程的数值方法．

本书适合于理科物理专业大学生．

图书在版编目(CIP)数据

力学：计算机辅助教程/潘武明主编．—北京：科学出版社，2004．1
(21世纪高等院校教材)
ISBN 7-03-012326-3

Ⅰ．力…　Ⅱ．潘…　Ⅲ．力学－高等院校－教材　Ⅳ．O3

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第095019号

责任编辑：张邦固/责任校对：钟　洋
责任印制：安春生/封面设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2004年1月第一版　开本：B5(720×1000)
2004年1月第一次印刷　印张：19
印数：1—4 500　字数：363 000

定价：29.00元(含光盘)

(如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉)

前　言

力学是整个物理学的基础学科，是培养学生科学素质、科学思维方式、提高学生科学研究能力的起点。随着科学技术的飞速发展，力学教学的改革步伐也越来越快，各种不同特点与风格教材相继出现。本教材是我们在力学教学改革的基础上，为培养跨世纪人才的需要而编写的，经过多届教学实践，不断修改而最终完成的。

本教材主要是为学过高等数学的物理专业学生编写的，但也考虑了相近专业的需要，可作为理工科专业的教学参考书。在教材编写中，我们主要突出了以下几点。

1)重整教学内容：为适应科学技术的高速发展，将传统的普通物理力学与理论力学按照牛顿力学与分析力学重新分类，压缩重复的教学内容，缩短教学周期。

2)高起点：本教材继续保持了普通力学的基本特色，既以实验为基础引出力学中的最基本概念和规律，然后再运用这些基本规律来解释物理现象。但一开始就应用高等数学这一工具处理力学问题，使学生在总结理论、概念和规律过程中自然上升到一定的理论高度。

3)适当介绍现代物理学：本教材大体上仍然按传统的方式组织教材，为了更好地理解力学基本定律和规律，考虑到本课程与其他课程之间的联系，对现代物理学的基本观点作了适当的介绍。

4)在教材组织方式上保持一定的跳跃：考虑到学生在高中学习阶段已具有的数学和物理知识，本教材并不是任何概念都从头讲起，也就是说在方法上并不严格遵循“循序渐进”的思想，让“渗透式”与“跳跃式”两种教学思想共存。使学生有较大的想象空间，增加学生主动学习，独立思考的能力，这对学生将来的学习和工作是有好处的。

5)增加现代教育技术在教学中的使用，提高教学效率：本教材配备有相应的电子文档可供课堂教学使用。对一些抽象的概念、重要力学规律的理解、难以看清楚的结果制作相应的教学软件动态演示。

6)培养学生应用计算机解决问题的能力：随着时代的进步，应用计算机解决实际问题应成为新世纪大学生的基本能力。本教材结合力学教学介绍牛顿动力学方程的算法、波的叠加与分解的计算程序，通过课堂演示与课后练习使学生初步掌握

计算机在实际问题中的应用,提高学生研究问题的能力。

感谢华中师范大学物理系原主任刘武教授,正是在他的支持与鼓励下本教材编写工作才得以开展。感谢杨兰田教授阅读了本书的初稿,并提出了许多宝贵的意见与建议。感谢物理与技术学院领导王恩科教授、胡晓明教授对本书的编写和出版工作给予的极大关心和支持。感谢湖北大学物理系、江汉大学物理系的大力支持,这两校同行积极参入与合作才使教材出版工作能顺利完成。感谢物理学院九九至零三级全体学生对课程改革的积极参入,使书稿能在教学实践中不断地改进与完善。

由于我们水平有限,书中错误与不妥之处在所难免,恳请各位读者指正。

编　者

2003 年 8 月

目　　录

第一章　运动的描述

力学是研究物体作机械运动所遵循的基本规律的一门学科，所谓机械运动就是物体空间位置随时间改变的现象，它是物质的各种运动中最简单、最基本的运动形态．本章主要讨论描述机械运动所需要的力学量以及这些力学量之间的相互关系．

1.1　力学的基本假定

任何一门科学的建立都必须助借一些最基本的概念同时作一些合理的假定．由于力学主要是研究物体空间位置随时间变化的机械运动，所以在力学中时间与空间是最基本概念．在经典力学中假定物体存在的空间是一个欧几里得几何空间，这就是说通常的平面几何、立体几何足以描述物体所经历的物理空间．用物理学的语言讲，空间是平直的，光线从一点到另一点走过的路径是直线．对于时间概念，我们可以用均匀的、绝对的时间尺度来测量事件发生的先后次序，而时间和空间是各自独立无关的物理量．以上的时空基本假定也称为伽利略时空观，是从大量的实验观察中分析总结出来的．

从上面时空观的基本假定出发建立的力学体系称为经典力学．它是以 19 世纪前的大量实验为背景总结出来的，经典力学的发展对人类的科学技术进步起到十分重要的作用，随着现代科学技术的发展人们对自然界认识的不断深化，对经典力学的理解及适用范围又有了进一步的认识．

现代科学技术能探测到的空间几何尺度范围大约是 $10^{-15} \sim 10^{28}$ m．较早发现经典力学困难的是在原子、分子这样的小尺度空间或微观领域．研究表明，在小于 10^{-10} m 的几何尺度范围内经典力学所描述的机械运动的规律不再适用．直到普朗克、薛定谔、海森伯等人的共同努力创立量子力学，粒子物理、原子核物理等微观领域的学科才得以迅速发展．在宇宙学及天体力学的发展过程中也揭示出在大尺度空间，经典力学也已不再适用．20 世纪杰出的物理学家爱因斯坦提出了崭新的时空观和引力理论(即狭义相对论与广义相对论)构成了现代物理学的另一分支．在狭义相对论中爱因斯坦假定物理空间是四度的，时间与空间并不是相互无关的．实验证明，对高速运动的物体(相对光速不是太小)狭义相对论的时空观是正确的．

在广义相对论中,爱因斯坦指出真实的物理空间并非是平直的,而是弯曲时空.他预言光线从一点到另一点在大尺度范围内走过的路径是曲线已被天文观测所证实.

总体来说由于时间与空间假定的限制,经典力学对于大尺度空间以及微观领域不再适用,但对于物体运动空间尺度不是太大也不是太小,其运动速度远小于光速时,经典力学还是十分准确的,足以解决工程技术上的大量问题.另一方面,经典力学的发展也为其他物理学分支提供了许多必备知识和处理问题的方法.

1.2　基本力学量与单位

国际单位制

物理学中有许多不同的物理量,但不必对每一个物理量的单位都独立地予以定义.我们可以选定一些物理量作为基本量,并为每个基本量规定一个基本单位,其他物理量的单位就可按照它们与基本量之间的关系导出．因此,基本物理量确定之后,其他的物理量就称为导出量.在国际单位制中(代号为 SI),选定七个量作为基本物理量,它们是长度、质量、时间、电流、热力学温度、摩尔质量、发光强度.规定它们的基本单位和符号为:米(m)、千克(kg)、秒(s)、安培(A)、开尔文(K)、摩尔(mol)和坎德拉(cd).除了这七个基本单位以外,另外还规定了两个辅助单位,即平面角的基本单位为弧度(rad),立体角的基本单位为球面度(sr),这两个量即可作为基本单位也可作为导出单位使用,对它们没有做出明确的规定.

用很大的单位表示很小的量或用很小的单位表示很大的量都是不方便的,为了适应各种不同情况的需要,在国际单位制中还设有附单位,这些附单位是在基本单位的名称前加上前缀来命名的,例如纳米(nm)表示 10^{-9}m,又如吉克(Gg)表示 10^9g.

力学单位制

经典力学中只要取三个力学量作为基本量,规定它们的基本单位之后,就可以导出力学中全部物理量的单位.国际单位制中与力学关系紧密的有三个基本量,它们是长度、时间、质量.用这些量作为力学的基本物理量,力学中其他物理量的单位都可以用 m、kg、s 定义,这些的基本单位定义如下:

时间单位:时间的基本单位是 s.原则上任何周期运动的周期都可以用来定义时间单位,如早期曾经用地球的自转周期来定义 s,现在采用特殊的原子标准定义.根据定义,质量数为 133 的铯同位素某一特殊能级跃迁所对应的振动周期的 9,192,631,770 倍为 1s,这个振动周期的测量准确度达 10^{-12} 至 10^{-13} 数量级.

长度的单位:国际上采用标准长度单位是 m.最早使用的公认标准米是保存在法国国际度量局里的铂棒上两刻度间的距离.随着科学技术的发展,这种人为制作

的标准长度已不能满足需要.1960 年第十一届国际计量大会上规定 1m 是同位素 kr^{86} 黄色谱线波长的 1 656 763.73 倍,实现了长度的自然标准. 随着激光技术的发展,人们发现激光频率的复现性的精度可做得更高,这样用激光测量光速受到原来用 kr^{86} 定义 m 的限制,1983 年第十七届国际计量大会通过新定义:1m 是光在真空中 1/299 792 458 时间内走过的长度.

质量单位:标准的质量单位是 kg,等于国际千克原器的质量. 国际千克原器是保存在巴黎国际度量局里的一个特制的铂合金圆柱体. 到目前为止,标准质量是惟一没有采用原子标准定义的基本物理量.

在力学中,基本力学量与它们的基本单位选定后单位制就确定了,上面介绍的基本力学量与基本单位的选择称为 MKS 制. 现代的长度和时间的定义不仅比以前标准更精确,而且易于重复不受干扰,但遗憾的是目前的科学技术还不能采用质量的原子标准.

实际上并不是非要以长度、质量、时间作为基本力学量来定义其他力学量的单位,也可以使用其他的力学量作为基本力学量,如工程单位制就是以长度、力、时间作为基本物理量的. 除了 MKS 单位制外,早期使用较为普遍的还有 c g s 制,c g s 制与 MKS 制选择的基本力学量相同,但是两种单位制对基本单位的规定不一样. c g s 制中长度用厘米,质量用克,时间用秒作为基本单位. 按照规定,国际单位制是我国法定的计量单位,在使用计量单位时原则上不使用国际单位制以外的计量单位,所以 c g s 制及工程单位制会逐步淘汰.

量纲

当基本力学量选定以后,其他的力学量就可以通过已知的物理关系与基本力学量联系起来. 例如在 MKS 制中以长度 L,质量 M 和时间 T 为基本物理量纲,速度就是一导出量. 因为速度是由公式 v = 路程/时间定义的,其单位总是长度单位比时间单位,通过速度与长度以及时间的关系我们可以知道速度的量纲是 L/T. 又通过密度 = 质量/体积的关系,还可知道密度的量纲是 ML^{-3}. 为分析问题方便,在 MKS 单位制中把导出量中包含 M、L、T 的次方称为量纲指数,把物理量与基本量的关系式称为量纲公式.

在 MKS 单位制中,由于所有力学量的都可用三个基本量导出,所以任何力学量 Q 的量纲公式可以表示成

$$[Q] = L^p M^q T^r$$

人们往往把 $L^p M^q T^r$ 称作 Q 的量纲,量纲公式可以利用有关定义或定律得出.

量纲式除了表明导出量与基本量的关系外,主要还有下列应用

1)检验公式正确性:只有量纲相同的物理量才能相等、相加、相减. 这可用来检查公式正确与否,例如下面的等式

$$F = 6mv$$

是错误的,因为在 MKS 制中 F 的量纲是 MLT^{-2},而 mv 的量纲是 MLT^{-1}. 当然,等式两边的量纲相同也不能完全肯定等式是正确的,因为等式中还有系数,系数没有量纲是不能用量纲检验的.

2) 进行单位换算. 物理量的单位取决于单位制的选择,不同单位制之间的换算关系可以从量纲式中得到. 例如力的单位在 MKS 制及 c g s 制中分别为牛顿 (N)与达因 (dyn),它们的关系可以通过量纲式$[F] = \mathrm{LMT}^{-2}$来换算. 从 MKS 制换算到 c g s 制时,长度单位扩大 10^2 倍,质量单位扩大 10^3 倍,而时间单位保持不变,所以有

$$1\mathrm{N} = 10^5\,\mathrm{dyn}\ .$$

1.3　质点,参考系,坐标系

在很多实际问题中,物体的形状和大小与所研究的问题无关或者所起的作用很小,这时我们可以把该物体看作是一个具有质量但没有空间大小的实体,这样的抽象化模型叫做质点. 严格地说,质点是理想化而非实际存在的东西,因为即使电子也有一定的大小. 但是在某些问题中,物体的大小与形状相对来说的确并不重要,这时运用质点的概念极为适宜. 例如研究地球绕太阳公转时,虽然地球半径很大,但比起绕太阳运动的轨道半径却小很多,因此在研究这样问题时,可以把地球看成质点. 但在研究地球自转时,就不能把它当质点处理了. 把物体看成质点就是把物体上某一点的运动代替整个物体的运动. 在一般情况下,一切真实的物体总可以看成是质点的集合体系,所以研究力学问题往往是从质点开始的.

世界上一切物体都是运动着的,这种运动被称为绝对运动. 在力学中往往关心的是一物体相对另一物体位置随时间的变化规律,这样的运动称为相对运动. 为了确定物体在空间的相对位置,首先必须要选定另一物体作参照物才能确定该物体的相对位置. 这种被选为参照的物体就称为参照系或参考系. 在参考系确定之后,虽然可以说出物体相对参照物是静止还是运动,但不能具体反映出运动的快慢,要想定量地描述运动的快慢,必须在参考系上面选取适当的坐标系将质点的相对位置量化,参考系与坐标系是描述机械运动不可缺少的部分.

1.4　标量与矢量

在物理学中,有一些物理量在单位选定之后仅由大小就能完全确定,这样的量称之为标量,如长度、温度、能量等都是标量. 在数学上标量作为普通的实数对待,它们服从实数运算的全部法则,是我们所熟悉的量.

另一类物理量除了大小以外还具有方向性,如速度、力、位移等. 这些物理量不

仅有大小同时具有方向的特征.物理学中,如果一个物理量必须由大小及方向才能完全确定就称它为矢量,矢量的概念及矢量代数的发展对力学的发展是必不可少的.

按照矢量的表示理论,矢量空间的每一个矢量都可以由矢量空间的一组基矢量线性表示,这一组基矢量也称为矢量空间的基底.当然,矢量空间的基底选择不是惟一的,同一矢量在不同的基底下表示也是不一样的,但同一矢量在不同的基底下的各种表示都是等价的.

经典力学中选择某种坐标系的同时也就选定了矢量空间的表示基底.对正交坐标系而言,力学中选择的基矢量都是正交规范基,其特点是每个基矢量均为单位矢量而且两两正交,任何一个矢量都可由坐标系的正交规范基线性表示.

为方便起见,我们把矢量分为抽象矢量与矢量的坐标表示.所谓抽象矢量是指一个矢量还没有被坐标系的基矢量线性表示,如力,速度等如果不用坐标系具体表示出来都称抽象矢量.习惯上常用黑体字母表示一个抽象矢量如 $\boldsymbol{A}$,书写时用带箭头的字母表示如 $\vec{A}$.在低维的情况下,一个抽象矢量也可以用有向几何线段表示.如果想强调矢量的空间维数亦可用一维数组表示矢量,如 $A=(A_1, A_2, A_3)$ 表示一个抽象的三维矢量.应该注意的是数学上对抽象矢量只有运算法则,如平行四边形法则、矢量的微分法则、矢量积与标量积定义等,而具体的矢量计算则必须借助于矢量的坐标表示.矢量的坐标表示是指把一抽象矢量(如速度,加速度等)放在某一特定的坐标系中,用该坐标系的基矢量将矢量表示出来,物理上把这种方法称为矢量的分解.

由于同一矢量在不同坐标系中表示出来形式上是不一样的,因此在讨论理论问题时(包括公式与定律等)较多的是采用矢量的抽象表示,这样导出的结果与坐标系的选择无关具有普适性.而在处理具体问题时,如例题、练习时,采用适当的坐标系会使问题变得相对易解.另外,在力学中常按矢量的效能把它分为三种基本类型.把只有大小和方向而无特定位置限制的矢量称为自由矢量,处理这类矢量时可将矢量在空间任意平行移动.例如所有描述质点运动学的抽象矢量都是自由矢量(如速度、加速度等),这是因为质点是没有几何形状的点,而且质点的空间位置只有相对意义并无绝对意义.如果一个矢量沿着其方向线移动时其效果不变就称这个矢量为滑移矢量,如作用在刚体上的力便是如此.对那些与空间位置有关的矢量我们称为束缚矢量,如引力场强度、弹性力、流速场等.

1.5 位移,速度,加速度

在给定的坐标系中,设质点处于坐标系中的 P 点,如图 1.5.1 所示.我们定义从坐标系原点指向质点所在位置的有向线段为质点的位置矢量(简称为位矢)记为

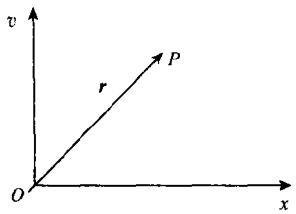

图 1.5.1

$\boldsymbol{r}$. 当质点运动时其位置矢量也会随时间发生变化,所以位置矢量一般是时间的函数. 设 t 时刻质点位于 A 点,位置矢量为 $\boldsymbol{r}(t)$,经过 Δt 时间后质点运动到 B 点,位置矢量为 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$. 我们定义 Δt 时间内质点的位移矢量为(如图 1.5.2)

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t), \qquad (1\text{-}5\text{-}1)$$

$\Delta \boldsymbol{r}$ 从几何图形上看为从 A 指向 B 的有向线段.

从图 1.5.2 看出,位移矢量的量值与质点走过的真实路径是不相同的,甚至可以相差很大. 不过当 Δt 很小时,我们知道 B 点很靠近 A 点,弧长 $\overset{\frown}{AB}$ 总是近似地等于弦长 $\overline{AB}$,这时位移矢量的大小就可以反映质点所走过的路程. 为反映质点从 A 点运动到 B 点的快慢,我们定义平均速度与瞬时速度分别为

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}, \qquad (1\text{-}5\text{-}2)$$

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}}(t). \qquad (1\text{-}5\text{-}3)$$

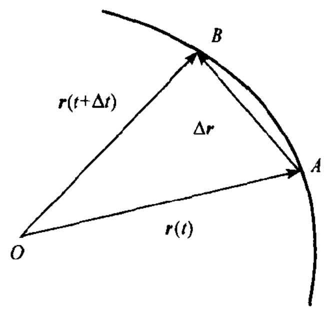

图 1.5.2

速度的单位是 m/s,意义为单位时间内质点运动的位移. 从上面的定义可以看出,平均速度只是反映 Δt 这段时间内物体从 A 点运动到 B 点这种变化的平均快慢,并没有反映物体在真实轨道上运动的快慢,而当 $\Delta t \to 0$ 时 B 点与 A 点要多近就有多近,因此瞬时速度才真实地反映物体在轨道上运动的快慢.

从图 1.5.2 中可以清楚地看出当 $\Delta t \to 0$ 时,B 点趋近于 A 点,位移矢量 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向趋近与轨道曲线的切线方向. 由速度的定义知 $\Delta t \to 0$ 时位移矢量的方向就是瞬时速度的方向,所以质点沿轨道运动时速度的方向总是沿着轨道曲线的切线方向.

速度的大小称为速率. 注意到质点从 A 点运动到 B 点的过程中,当 $\Delta t \to 0$ 时,弧长等于弦长的即 $|\Delta \boldsymbol{r}| = \Delta s$. 因此速率

$$v = |\boldsymbol{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \qquad (1\text{-}5\text{-}4)$$

上式说明速率的意义为质点单位时间内沿轨道走过的弧长.

为反映在某段时间内质点运动速度变化的快慢,类似于速度的定义把平均加速度定义为 Δt 时间内速度平均变化的快慢

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \qquad (1\text{-}5\text{-}5)$$

而把瞬时加速度定义为 $\Delta t\to 0$ 时速度变化的快慢

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{v}}(t). \tag{1-5-6}$$

加速度的单位是 $\mathrm{m/s^2}$,其意义为单位时间内质点运动速度变化的大小.在运动学中,如果质点运动的速度保持不变就称为匀速直线运动.如果质点运动的加速度保持不变就称为匀加速运动.一般情况下,质点运动的速度、加速度都会随时间 t 变化,找出质点运动过程中这种变化规律是质点运动学的主要任务之一.

1.6 速度、加速度在常见坐标系中的表示

上节定义的位移、速度、加速度均是抽象的物理学矢量,要想具体的表示出这些物理量的大小与方向必须选择特定的坐标系.最简单的方法表示一个矢量是选择正交坐标系,然后将抽象矢量用该坐标系的正交规范基线性表示,物理学中也称该方法为矢量的正交分解.下面就来讨论位置矢量、速度、加速度矢量在常见正交坐标系中的正交分解.

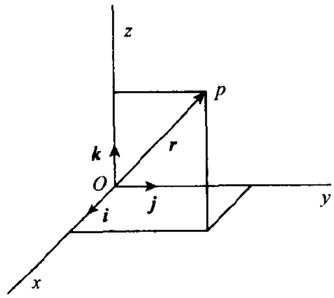

图 1.6.1

直角坐标系 该坐标系中质点的空间位置由 x、y、z三个参数决定,其正交规范基是由沿着坐标轴的三个单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 构成见图 1.6.1.位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 在该坐标系中正交分解为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{1-6-1}$$

显然,对于运动的质点来说,位置矢量的各分量都是时间的函数,即

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t). \tag{1-6-2}$$

(1-6-2)式称为质点的运动学方程,它表示了质点的空间位置随时间变化的运动规律.由于在某一时刻质点的空间位置必须是确定的,故运动方程必须是单值的.若将(1-6-2)式中的时间 t 消去会得到反映质点位置矢量各分量之间关系的坐标方程,习惯上称为轨道方程.

由速度的定义(1-5-3)式可知在直角系中速度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\\&=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}\\&=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}.\end{aligned} \tag{1-6-3}$$

这里 v_x、v_y、v_z 称为速度沿 x 轴、y 轴以及 z 轴的分量.它们是速度矢量沿三个坐标轴正交分解的结果.

由加速度的定义可知,在直角坐标系中加速度由下面的式子决定:

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k})$$

$$=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\ , \tag{1-6-4}$$

同样把 a_x、a_y、a_z 称为加速度沿 x 轴、y 轴以及 z 轴的分量,它们也是加速度矢量沿三个坐标轴正交分解的结果.在该坐标系中,速度与加速度矢量的大小可以通过求对应矢量的模得到,即

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}, \tag{1-6-5}$$

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ . \tag{1-6-6}$$

矢量的方向可以由其方向余弦决定,例如速度矢量的三个方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{v_x}{|\boldsymbol{v}|},\ \cos\beta=\frac{v_y}{|\boldsymbol{v}|},\ \cos\gamma=\frac{v_z}{|\boldsymbol{v}|}. \tag{1-6-7}$$

例 1　一质点的位置矢量为 $\boldsymbol{r}=b\sin\omega t\boldsymbol{i}+b\cos\omega t\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ 式中 b、ω、c 均为常数,试分析其运动规律.

解　先讨论质点的轨道方程,由 c 为常量知质点必定在 $z=c$ 的平面上运动.由 xy 平面的运动方程

$$x=b\sin\omega t,\quad y=b\cos\omega t,$$

得

$$x^2+y^2=b^2,$$

所以质点在 $z=c$ 的平面上是作半径为 b 圆周运动.

再来看质点运动的速度和加速度,由

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=b\omega\cos\omega t\boldsymbol{i}-b\omega\sin\omega t\boldsymbol{j},$$

知

$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{b^2\omega^2\cos^2\omega t+b^2\omega^2\sin\omega^2 t}=b\omega.$$

由 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-b\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{i}-b\omega^2\cos\omega t\boldsymbol{j}$,知

$$|\boldsymbol{a}|=b\omega^2.$$

从上面的讨论可以得出结论,质点在半径为 b 的圆周上做匀速圆周运动如图 1.6.2.

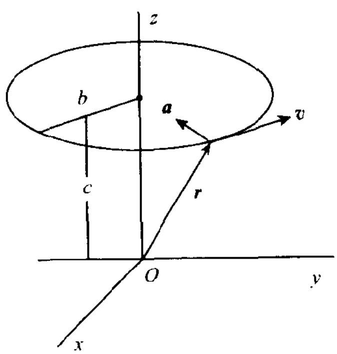

图 1.6.2