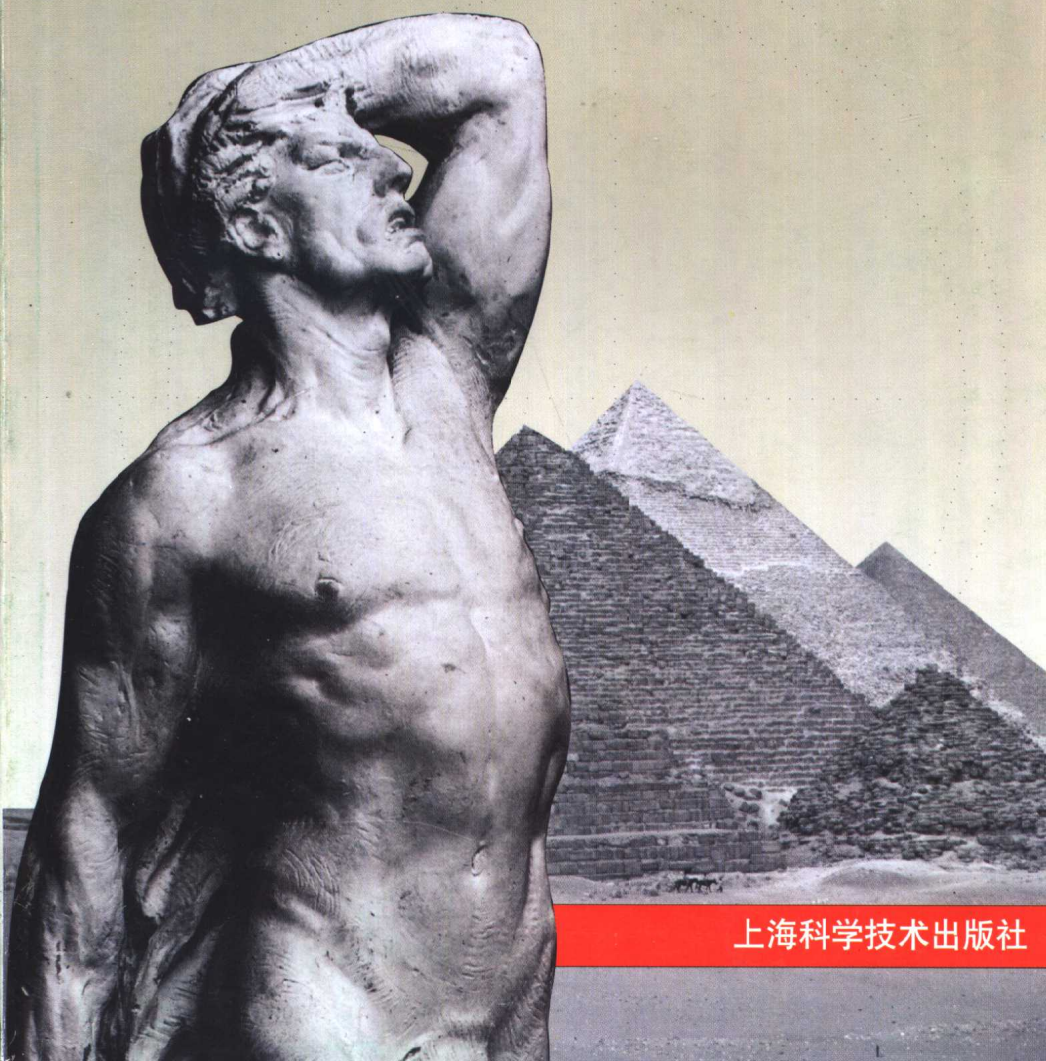


数学分析

周民强 编著

第二册



上海科学技术出版社

数学分析

(第二册)

周民强编著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本教材讲述的是高等数学的基础课程——数学分析,其核心内容为微积分学.这套教材共三册,本书是其中的第二册.

本书共有六章,分别为定(Riemann)积分、反常积分、常数项级数、函数项级数、幂级数、Taylor级数以及Fourier分析初步,主要讲述了定(Riemann)积分、反常积分、级数理论、Fourier分析等内容.

本书是由作者在北京大学数学科学学院多年教学所使用的讲义基础上修改而成,内容丰富、深入浅出.对较难理解的定理、定义以及可深入探讨的问题,本书以加注的形式予以解说,以利于读者更好地接受新知识.本书在每一章的末尾还附有注记,意在为读者更清楚地了解知识背景,更迅速地提高数学能力创造条件.本书选用了适量有代表性、启发性的例题,还选入了足够数量的习题和思考题.习题和思考题中,既有一般难度的题目,也有较难的题目,供读者酌情选做.

本教材可作为大学本科阶段的数学、概率统计、应用数学、力学以及计算机等相关专业的教科书,也可作为广大数学工作及爱好者的参考图书.

责任编辑 刘 啸 苏德敏

数 学 分 析

(第二册)

周民强 编著

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路450号 邮政编码200020)

新华书店上海发行所经销 常熟市兴达印刷有限公司印刷

开本 850×1168 1/32 印张 13 字数 340 000

2003年1月第1版 2003年1月第1次印刷

印数: 1—5 200

ISBN 7-5323-6669-3/O · 262

定价: 24.60元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题,
请向本社出版科联系调换

致 读 者

《数学分析》的核心内容是“微积分”——微分学与积分学的统称,它是数学发展史中最伟大的成果,始创于 17 世纪下半叶,其代表人物是两位著名的学者:英国的 I. Newton(1643~1727)和德国的 G. W. Leibniz(1646~1716)。

Newton 和 Leibniz 对微积分的杰出贡献与这一领域有关的前期工作不同,他俩使微积分学成为一门独立的学科,而不再是古希腊几何的附庸和延续,且为许多课题提供了崭新的研究方法。自微积分始,数学发展成为变量数学时期。微积分从运动、变化的观点、方法来考察各种事物和现象,这正符合客观世界处于不断运动、变化的实际。因此,微积分的建立给予科学、技术领域巨大的影响,推动了生产力的发展。特别是在天文、力学方面的成就,在当时曾一度冲击宗教的某些旧信条。另一方面,也由于当时的微积分学自身理论的不完善而受到责难,但这些都不能阻挡它的继续前进。

19 世纪初期,由于科学技术进步的推动,促使许多数学家致力于微积分的改造和奠基工作,终于在 19 世纪中叶建成现代称之为数学分析的较完善的体系,为微积分的普及创造了更加有利的条件,也使它成为今天众多院校的必修课程。

因此,在三百余年后的今天,学习微积分已不能算是件“时髦”的事情了。如果从培养 21 世纪的人才而言,或许只能说是一张“入门券”而已。

学习微积分课程的目的有三:一是可应用于实际课题;二是通过它学习数学思维、逻辑判断的能力;最后一点是要为学习

其他课程奠定基础.

本册介绍微积分学的另一组成部分——Riemann 积分(定积分)和无穷级数的理论,我们将看到它们仍然是建立在极限思想的基础之上并贯穿始终,只是在形式结构上稍有不同而已.

读者在本书第一册的学习中,已经对微积分产生了浓厚的兴趣,这就为进一步学习增添了强大的动力.或许有人对先前的学习感到有些吃力,那么应该看到这是一种正常现象.如果我们想到那些创建微积分的大师们自己都表达不清某些基本概念,直到 19 世纪中期微积分才树立起一个较严密而完整的体系时,那么今天对一个初学者来说在学习上遇到些困难又算得了什么!况且,时代不同了,人类的智慧在逐代升级,各种现代化的氛围为大家攀登科学高峰创造了极为有利的条件,“万事俱备,只欠东风”这“东风”不是别的,就是自己的“努力,奋进”,“不怕难,只怕站”,正所谓

道虽远,不行不至,

事虽难,不为不成,

最后预祝大家胜利完成本册的学习任务!

序

序

本教材的前身是北京大学数学系教学用的讲义,现在出版成书已进入 21 世纪了. 面向这一重大挑战,在撰稿的进程中,以下几个方面是作者着重思考并力图落实的.

1. 加强导引性论述,介绍所研究课题的数学史背景、客观原型以及微积分处理问题的思路与方法,这或许有益于树立正确的数学观,增加学习的活泼性.

2. 适当提高起点,扩大知识面. 书中在讲解各种理论的应用时,列举了丰富的典型例题,以利于在提高启发式教学水平的同时,让学生有一个扩展的自学园地.

3. 为了培养数学思维的习惯,以及养成“会学”数学的能力,本书在每章节后列有适当数量的思考问题. 此外,还以加注,以及用小字和附录的方式介绍微积分理论的进一步伸展和注意事项,这也对引发读者的创新思维有所助益.

4. 考虑到目前对数学家的中文译名的不统一,本书一律用原文书写(在页末给出中文译名供参考),并尽力介绍他们的国籍和生卒年代. 尊重曾为人类的科学进步作出过贡献的学者,是我们后代人文明的表现之一.

5. 对于想用本书作为正式教材的学校和教师来说,在教学实践中必须依据具体的培养目标和实际情况对其内容作适当取舍,不能照本宣科. 希望广大读者和教师对本书提出批评

和建议.

最后,衷心感谢上海科学技术出版社对本书的出版所给予的鼓励和支持.

作者

2002. 5

序

目 录

目

录

积分史简述.....	1
------------	---

第七章 定(Riemann)积分	4
------------------------	---

§ 1 定(Riemann)积分的概念	4
---------------------------	---

1.1 曲边梯形的面积问题.....	4
--------------------	---

1.2 定积分的定义.....	6
-----------------	---

§ 2 Darboux 上、下和,上、下积分	10
------------------------------	----

2.1 Darboux 上、下和	11
------------------------	----

2.2 Darboux 上、下积分	13
-------------------------	----

§ 3 函数可积的充分必要条件,可积函数类	16
-----------------------------	----

3.1 函数可积的充分必要条件	16
-----------------------	----

3.2 可积函数类	18
-----------------	----

§ 4 微积分基本定理、定积分的基本性质	23
----------------------------	----

4.1 Newton-Leibniz 公式	24
-----------------------------	----

4.2 定积分的基本性质	28
--------------------	----

§ 5 变限积分,原函数存在的充分条件	36
---------------------------	----

§ 6 定积分的间接算法.....	43
-------------------	----

6.1 换元积分法	43
-----------------	----

6.2 分部积分法	50
-----------------	----

§ 7 定积分中值定理.....	56
------------------	----

7.1 定积分第一中值公式	58
---------------------	----

7.2 定积分第二中值公式	62
---------------------	----

§ 8	定积分在几何与力学中的初步应用	67
8.1	平面区域的面积	67
8.2	用平行截面面积求立体体积	74
8.3	曲线弧长	79
8.4	旋转体的侧面积	85
8.5	定积分应用的朴素定式	
	——点位微分的积累	87
8.6	定积分在力学中的初步应用	90
§ 9	定积分的近似计算	96
9.1	从积分和式求近似值	97
9.2	从被积函数大小估算近似值	107
	注记	109
第八章	反常积分	123
§ 1	函数在无穷区间上的积分	125
1.1	无穷区间上的积分定义	125
1.2	积分的基本性质	128
§ 2	无穷区间上积分收敛与发散的判别法	131
2.1	非负函数积分敛散性的比较判别法	132
2.2	积分的绝对收敛	137
2.3	被积函数的主部分离法	140
2.4	一般函数积分敛散性的判别法	142
§ 3	无界函数的积分——瑕积分	150
3.1	瑕积分的定义	150
3.2	积分的基本性质	153
§ 4	瑕积分收敛与发散的判别法	156
4.1	非负函数积分敛散性的比较判别法	156
4.2	瑕积分的绝对收敛	162
4.3	一般函数积分敛散性的判别法	164
4.4	带瑕点无穷区间上积分敛散性的判别法	167

注记	170
第九章 常数项级数	174
§ 1 级数收敛的概念和必要条件	175
§ 2 收敛级数的运算性质	179
§ 3 正项级数收敛与发散的判别法	181
3.1 正项级数收敛的特征	181
3.2 通项比较判别法	186
3.3 比值判别法,根值判别法	193
3.4 推广的比值型和根值型判别法	198
3.5 积分判别法	203
§ 4 一般项级数收敛与发散的判别法	205
4.1 级数收敛的充分必要条件	205
4.2 级数的绝对收敛与条件收敛	207
4.3 交错级数收敛的判别法	211
4.4 乘积项级数收敛的判别法	215
§ 5 级数项序的重新排列	220
§ 6 两个级数的乘积	222
注记	227
第十章 函数项级数	240
§ 1 函数项级数一致收敛的概念	244
§ 2 一致收敛函数项级数的运算性质	248
§ 3 函数项级数一致收敛的判别法	251
3.1 Cauchy 准则	256
3.2 M (最值)判别法	251
3.3 函数乘积项级数一致收敛的 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法	261
§ 4 函数性质的传递——极限次序的交换	267
4.1 连续性质的传递	269

4.2	积分性质的传递	273
4.3	微分性质的传递	277
	注记	281
第十一章 幂级数、Taylor 级数		294
§ 1	幂级数收敛区域的特征——收敛半径	294
§ 2	幂级数收敛半径的求法	297
§ 3	幂级数的一致收敛及其和函数的性质	303
§ 4	函数的幂级数展开式——Taylor 级数	310
4.1	函数的 Taylor 级数的概念	310
4.2	判定函数的 Taylor 级数展开式的方法	312
4.3	应用举例	319
§ 5	多项式逼近连续函数	323
	注记	328
第十二章 Fourier 分析初步		341
§ 1	三角函数系的正交性, 函数的 Fourier 级数	342
§ 2	Fourier 系数的性质	347
§ 3	Fourier 级数的(点)收敛	352
3.1	Dirichlet 积分、局部化原理	352
3.2	Fourier 级数收敛的判别法	355
§ 4	其他函数的 Fourier 级数	368
4.1	周期为 $2l$ 的函数	368
4.2	仅定义在有界区间上的函数	370
§ 5	Fourier 级数的其他收敛意义	375
5.1	算术平均求和	376
5.2	封闭系, 均方收敛	380
5.3	一致收敛, Fourier 级数的微分和积分	388
	注记	394

积分史简述

积分起源于求积问题. 早在古代人们就着手计算由曲边围成的面积, 如叙拉古(属西西里岛)的 Archimedes(公元前 287~212 年)就曾探求过抛物弓形的面积, 又如我国南北朝时期的刘徽, 在公元三世纪也曾力求单位圆面积. 他们的方法都是用许多不重叠的三角形来拟合图形. 由于时代的限制, 他们不能克服“无穷运算”的困难, 加之没有一般曲线的概念, 求积问题一直没有多大进展. 到了文艺复兴时期(约公元 1200~1600 年), 欧洲在科学技术的推动下, 需要求积的对象扩大了, 许多学者为了求出各种曲边围成的面积(如正弦曲线, x^2 等), 曾创造了更多的巧妙方法. 然而由于这些技巧随边界曲线的不同而不同, 且与其几何特征密切相关, 也使求积问题裹足不前.

到了 17 世纪下半叶, 研究物体位移运动以及各种事物的变化规律成为数学、物理学的主要课题, 致使许多学者形成了以运动变化的观点考察对象的思想. 如视曲线为点变动的轨迹, 甚至将质点作变速直线运动的规律也用曲线来描述. 这些研究工作深入揭示出切线(斜率)与曲线纵坐标变动之间的联系, 从而认识到求积与求导的互逆关系, 使积分问题作为求导的逆运算来处理, 微积分主要框架基本构成. 这就是两位伟大学者: 英国的 I. Newton 和德国的 G. Leibniz 的主要建树, 在微积分这一伟大历史成就的丰碑上, 永远留下了他们的名字.

Newton-Leibniz 时代的积分学在本质上应该认为是关于曲线的积分. 虽然 Leibniz 曾界定积分为“某种求和过程”, 但由于涉及到对所谓“无穷多个无穷小量的和”的运算的正确认识,

也就没有引起人们的重视而无法开展。

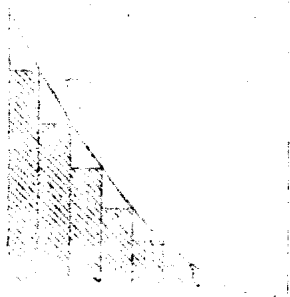
18 世纪的数学家,受到微积分的巨大功效的激励,无暇顾及当时微积分学内部存在的不严谨性问题,而继续奋发前进,并创立了许多分析数学的新领域,获得了丰富的成果。

然而,随着物理学研究领域的扩大和深入(如振动、光和热等),用以表达运动变化规律的数学中早期的函数概念受到了极大的冲击,迫使人们对函数只是由一个解析式表达的连续曲线的说法加以改变。特别是 1810 年左右法国数学物理学家 Fourier 关于热传导理论的开创性工作,还一度动摇了 17 世纪将积分作为反导数运算的认识,同时也使其中所运用的所谓“无穷小分析”的不确切陈述再也无法迎接新的挑战,微积分体系奠基工作即严密化开始了。

所谓严密化,是指要把微积分中最基本的概念建立在严谨的逻辑的基础之上。在这一方面作出重大贡献的应是法国数学家 Cauchy,他在 19 世纪 20 年代发表的著作中引进了变量的极限概念,廓清了存在于前期的关于无穷小量的“不可分量”、“瞬”、“微差”等不同描述,从而建立起定积分作为“分割、求和、取极限”的统一格式。不过,这一积分定义是针对连续函数而发的。到了 19 世纪 30 年代,函数概念几经周折终于由德国数学家 Dirichlet 说定。他在 1837 年的文章中给出了至今还沿用的(单值)函数的定义,从而对函数认识的混乱局面得到了控制,微积分学的基本研究对象也有了共同的规范,为微积分学的进一步发展奠定了基础。1854 年德国数学家 Riemann(Dirichlet 的学生)针对一般的函数,给出了积分的定义(这一工作由德国数学家 Dedekind 于 1867 年发表),极大的扩充了可积分的函数类,保留着积分作为求积的原有内容,还在新的基础上重新树立起积分论初创期的成果。同时,法国数学家 Darboux 对此又作了更加细微的解剖。但总的说来,我们称这一积分论为 Riemann 积分体系。

效的重大理论的建立,需经过长时期的磨练和几代人的艰苦努力. 幸运的是,我们这一代人不必再从头学起,而可以站在巨人的肩上向高处攀登. 本册所介绍的积分理论,主要是指 19 世纪数学家们整理完成的工作.

科学在不断地前进,积分论的进一步革新,是在 20 世纪初期由法国数学家 Lebesgue(1875~1941)完成的,它为现代分析数学打开了大门.



第七章 定(Riemann)积分

§ 1 定(Riemann)积分的概念

1.1 曲边梯形的面积问题

积分概念来自求由曲边围成的区域面积问题,且早在古代就开始探讨了(见本章注记).但在18世纪以前,由于人们无法正确把握无限运算过程,还不清楚实数系统的结构,也就缺乏对连续函数的性质的认识,因此不能形成处理求面积问题的统一格式和方法.

第一个明确提出“分割函数的定义区间,求在子区间上矩形面积的总和,再取极限(子区间长度趋于零)的格式”来求面积的应推法国数学家 Cauchy. 为了说明这一想法,让我们先举一例:

例 求坐标平面上由抛物线 $y=x^2$, 直线 $x=1$ 以及 x 轴所围成的曲边三角形的面积(图 7-1)

解 用分点 $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$ 将区间 $[0, 1]$ 划分开来, 在每个子区间 $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ 上取高为 $y =$

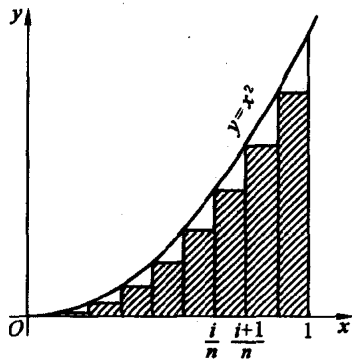


图 7-1

$\left(\frac{i}{n}\right)^2$, 作小矩形, 它们面积的总和为

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n}.$$

再取极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{1}{3}$, 求出面积为 $\frac{1}{3}$.

如果上述求积的方法要推广到一般的函数 $y=f(x)$ 上去, 那么我们可以提出以下质疑:

(1) 上例中如此求得值 $\frac{1}{3}$ 是该曲边三角形的面积吗? 如果在每个子区间 $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ 上所作小矩形的高为 $\left[\frac{i-1}{n}\right]^2$, 甚至取为子区间中点上的高, 此时和式极限是否仍相同? 不同怎么办?

(2) 如果把区间划分成 2^n 个子区间, 甚至不是等分, 然后仍然“以直代曲”在子区间上作矩形, 求和取极限, 其极限值是否相同?

(3) 如果用上述方法求积, 万一极限不存在怎么办? 此时, 是计算方法不对呢, 还是该曲边图形没有面积?

对此, 法国数学家 Cauchy 在《分析概论》(1823 年) 一书中指出(用现在的写法), 若 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 且对 $[a, b]$ 任作分划 Δ :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad \|\Delta\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i - x_{i-1}\},$$

则必存在极限

$$I = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \xi_i = x_i \text{ 或 } x_{i-1}. \quad ①$$

并认定值 I 即为该曲边梯形的面积.

由于缺乏一致连续的概念, 致使 Cauchy 提出的证明是不严格的. 此外, 他的这一求积法也只适用于至多具有有限个间断点的函数. 然而在 19 世纪 20 年代, Fourier 级数(见第十二章)的收敛课题正受到广泛关注, 对此作出重要贡献的德国数学家

Dirichlet 希望把自己给出的收敛定理推广到具有无穷多个不连续点的函数上去. 在这里, 他首先就遇到了一个函数的可积性问题, 但是没有解决.

德国数学家 Riemann 在柏林大学学习时, 是 Dirichlet 的学生, 当他获悉这一信息时, 以极大兴趣研究此课题. 他不是先假定函数 $y=f(x)$ 是连续的, 而是探求①式成立与 $f(x)$ 的属性的关系, 特别是把①式内 $f(\xi_i)$ 中的 ξ_i 改为子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 内的任一点, 为积分操作提供很大方便, Riemann 的工作为经典积分理论奠定了严密的基础, 他不仅给出了函数可积的充分必要条件, 而且给出一个具有无穷多不连续点的可积函数的著名例证.

至于第(3)点质疑, 即当①式极限不存在时应当如何认识? 此时, 我们只能认为该曲边梯形的“面积”不存在, 或更确切地说, 在用这种方式计算和认识下, 它没有面积. 从本质上讲, 平面区域的“面积”应在数学上给予定义. 因此, 上面的做法实际上是在给出面积的算法中同时也给出了面积的定义.

1.2 定积分的定义

设 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的函数.

(1) 把 $[a, b]$ 分成有限个子区间, 即在 $[a, b]$ 中插入有限个分点, 一般都表示为

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

并形成一组 n 个相连的子区间 $[x_{i-1}, x_i] (i=1, 2, \cdots, n)$. 我们称此为 $[a, b]$ 的一个分划(分割), 记为 Δ , 并记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i=1, 2, \cdots, n)$. 以及 $\|\Delta\| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$, 即各子区间长度之最大值, 称为分划 Δ 的模.

(2) 在每个子区间中任取一点:

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

简称为插点组, 并记为 $\langle \xi \rangle$.

(3) 把分划 Δ 的各子区间与插点组 $\langle \xi \rangle$ 上相应的函数值组成和式