



大学本科小学教育专业教材

数学思维方法

SHUXUESIWEIFANGFA

王宪昌 主编

人民教育出版社



中华人民共和国教育部审定

数学思维方法

教育部《基础教育课程改革纲要(试行)》指定教材

王明君 主编

人民教育出版社

大学本科小学教育专业教材

数学思维方法

主 编 王宪昌

副主编 张作岭

人民教育出版社

·北京·

图书在版编目 (CIP) 数据

数学思维方法/王宪昌主编. —北京: 人民教育出版社, 2002

大学本科小学教育专业教材

ISBN 7 107 15946 1

I. 数

II. 王

III. 数学—思维方法—高等学校—教材

IV. 01 0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 068799 号

人民教育出版社出版发行

(北京沙滩后街 55 号 邮编: 100009)

网址: <http://www.pep.com.cn>

北京天宇星印刷厂印装 全国新华书店经销

2002 年 12 月第 1 版 2003 年 1 月第 1 次印刷

开本: 890 毫米 × 1 240 毫米 1/32 印张: 9.25

字数: 230 000 千字 印数: 0 001 ~ 3 000

定价: 13.80 元

大学本科小学教育专业教材

总 序

为了适应社会主义现代化建设和人民群众对教育需求不断增长的新形势，经国家教育部批准，全国各地相继成立了以培养大学本科学历小学教师为主要任务的初等教育学院（系），大学本科小学教育专业应运而生。该专业的设立是我国初等教育改革和发展的需要，是提高我国小学教师素质的重要举措，也是我国师范教育改革和发展的必然趋势。

《中共中央国务院关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》指出：建设高质量的教师队伍是全面推进素质教育的基本保障。目前，培养小学教师的现行课程、教材和教法，已不能完全满足全面推进素质教育的客观要求，受到了前所未有的挑战。新的课程教材建设势在必行。鉴于此，教育部师范教育司组织有关高等学校成立了“面向 21 世纪培养本科程度小学师资专业建设研究”的全国性总课题组，制订了大学本科小学教育专业培养目标和课程方案，在此基础上形成了“全国小学教育专业建设协作会”，对该专业课程教材建设进行了深入研究。

为了加强对教材编写工作的管理，教育部师范司、教育部课程教材研究所及有关高师院校的领导和专家组成了“大学本科小学教

育专业教材编写委员会”。中国教育学会会长顾明远、教育部课程教材研究所原所长吴履平、教育部师范司司长马立为编写委员会顾问，首都师范大学副校长刘新成为编写委员会主任。编写委员会聘请具有丰富教学经验和较高学术水平的学科带头人分别担任各科教材主编，并聘请知名专家审核编写大纲和初稿。为了加强对这套教材编审工作的领导、协调和统筹，人民教育出版社还成立了“大学本科小学教育专业教材编审委员会”。

本套教材的编写以“教育要面向现代化，面向世界，面向未来”为指针，以党和国家的教育方针以及大学本科小学教育专业培养目标为依据，以思想性、科学性、时代性和师范性为原则，致力于培养未来小学教师的创新精神和实践能力，全面体现“大学本科程度”和“面向小学教育”的要求，力求建立合理的教材结构，以满足 21 世纪对新型小学教师素质结构的需要。

本套教材是从大多数地区的情况出发而编写的全国通用教材，主要供培养本科层次小学教师的高等院校使用，也可供培养专科层次小学教师的院校使用，还可供广大在职小学教师进修或自学使用。这套教材由人民教育出版社于新世纪第一年陆续推出。

本套教材的编写出版得到了教育部师范教育司、高等教育司、社会科学研究与思想政治工作司、课程教材研究所、人民教育出版社，以及部分省市教委（教育厅）和有关高等院校的领导和同志们的大力支持，谨在此一并致谢。

编写出版大学本科小学教育专业系列教材，是我们贯彻国家教育部师范教育课程教材改革精神、全面落实《面向 21 世纪教育振兴行动计划》的初步尝试，如有不当之处，敬请广大师生不吝指正，以使本套教材日臻完善。

大学本科小学教育专业教材编写委员会

2000 年 12 月

本书 编写说明

在高师院校的数学教育研究中，传统的教材、教法研究已经向教育思想、教育哲学研究的方向转变。其中，由徐利治教授在 20 世纪 70 年代开创的数学方法论研究已经成为高等师范院校数学教育的一个重要组成部分。

传统数学教育中注重知识、注重结论、注重运演过程形式性的教育观念，正在向注重方法、注重过程、注重个体经验、注重思维和思维过程的方向转变。《数学思维方法》一书，正是在这样一种时代背景下编写完成的。

全书共十章，大体可以划分为四个部分。

第一部分介绍了数学思维方法在国内、国外发展的状况以及数学思维方法与数学方法论之间的关系。这一部分还论述和介绍了数学教育哲学与数学思维方法之间的关系。

第二部分介绍了数学思维方法中的逻辑思维与非逻辑思维之间的关系。这一部分内容特别突出了有关非逻辑思维方式的论述。

第三部分是对数学重大的思维方法和常用的思维方式的介绍。这一部分内容编录了国内许多数学方法论和数学思维的研究成果，

使其形成了一个相对比较全面的论述。

第四部分是从数学思维方法和现代数学教育的关系方面,论述了数学美学。同时还对中西方数学教育的思想与数学思维方法进行了比较。

本教材有以下三个特点。

第一,突出了数学哲学、数学教育哲学、数学史、数学文化传统与数学思维方法之间的关系。强调数学教育的内容应当注意数学思维的民族性、文化传统性。本书还特别对中国古代数学思维方法作了专门论述。

第二,突出了现代数学教育理论和思想对数学思维方法教学、研究的指导意义。强调个体学习兴趣、个体学习信心、问题解决能力培养等方面在数学思维方法教学中的重要性。改变了那种把数学思维方法变成一种新的解题方法训练的观念。

第三,在具体思维方法的教学,中,突出了创新思维、观察与实验、猜想、合情推理、反例构造等思维方式的作用。强调中小学数学教育应当注重特定的年龄、心理和数学教育目标的要求,使数学教育与我国教育改革,尤其是与当前的中小学数学教育改革相适应。

在本书编写中,郑毓信教授的数学哲学及数学教育哲学、张奠宙教授对数学方法的分类、郭思乐教授对数学思维的论证等都对本书的编写思想有重大影响,同时他们的一些论述与观点,也被编录其中。

本书由王宪昌教授主编,张作岭副教授任副主编。全书的编写提纲由主编提出并经全体编写人员讨论通过。本书分章编写之后由主编统一修改定稿。陈慧君对全书的例题作了检验,并收集了全书的编写资料。

本书不仅可以作为培养本科层次初等教育师资的教材,也适用于师范类本科数学教育的教材,同时亦可作为中小学数学教师的教学参考书。

数学思维方法在我国数学教育中的历史很短,再加之编者学识所限,本书的内容难免有缺憾之处,希望得到同行们的批评和指正。

目 录

第一章	数学思维方法引论	(1)
	第一节 数学思维方法研究的对象和内容.....	(1)
	第二节 数学思维方法历史概述.....	(8)
	第三节 数学思维方法与数学教育.....	(13)
第二章	数学中的逻辑思维与非逻辑思维	(21)
	第一节 数学中的逻辑思维.....	(21)
	第二节 数学中的非逻辑思维.....	(39)
	第三节 数学中的创造性思维.....	(52)
第三章	数学中几种重大的思维方法	(61)
	第一节 算术向代数的发展.....	(61)
	第二节 几何学的发展与代数化.....	(65)
	第三节 常量向变量的发展——无限的数学思维.....	(70)
	第四节 概率论——随机现象的数学思维.....	(74)
	第五节 模糊数学的数学思维方法.....	(78)
	第六节 中国古代数学的思维方法.....	(83)
第四章	数学解题及发现的方法	(91)
	第一节 数学中的观察与实验.....	(91)
	第二节 解题的原则与思维方式.....	(99)

第三节	合情推理——数学发现的方法·····	(109)
第四节	数学猜想——数学的创造性思维·····	(117)
第五章	数学的公理化方法·····	(127)
第一节	公理化方法概述·····	(127)
第二节	公理化方法的基本内容·····	(138)
第三节	公理化方法的作用·····	(140)
第六章	数学模型方法·····	(149)
第一节	数学模型概述·····	(149)
第二节	数学模型分类·····	(152)
第三节	数学模型的构造方法·····	(156)
第七章	化归法·····	(169)
第一节	化归法概述·····	(169)
第二节	变形法·····	(174)
第三节	分割法·····	(185)
第四节	关系映射反演方法·····	(191)
第八章	逐次渐进方法·····	(202)
第一节	逐次渐进方法概述·····	(202)
第二节	逐次渐进方法应用·····	(209)
第三节	类比猜想与归纳猜想·····	(218)
第九章	数学中常用的几种方法·····	(233)
第一节	分析与综合·····	(233)
第二节	形式化与演绎法·····	(240)
第三节	构造与反例·····	(250)
第十章	数学方法论的研究与发展·····	(259)
第一节	数学方法与数学美学·····	(259)
第二节	数学方法与西方数学教育·····	(274)
第三节	数学方法论的研究与发展·····	(279)
主要参考书目·····		(285)

大学本科小学教育专业教材

总 序

为了适应社会主义现代化建设和人民群众对教育需求不断增长的新形势，经国家教育部批准，全国各地相继成立了以培养大学本科学历小学教师为主要任务的初等教育学院（系），大学本科小学教育专业应运而生。该专业的设立是我国初等教育改革的发展的需要，是提高我国小学教师素质的重要举措，也是我国师范教育改革的必然趋势。

《中共中央国务院关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》指出：建设高质量的教师队伍是全面推进素质教育的基本保障。目前，培养小学教师的现行课程、教材和教法，已不能完全满足全面推进素质教育的客观要求，受到了前所未有的挑战。新的课程教材建设势在必行。鉴于此，教育部师范教育司组织有关高等学校成立了“面向 21 世纪培养本科程度小学师资专业建设研究”的全国性总课题组，制订了大学本科小学教育专业培养目标和课程方案，在此基础上形成了“全国小学教育专业建设协作会”，对该专业课程教材建设进行了深入研究。

为了加强对教材编写工作的管理，教育部师范司、教育部课程教材研究所及有关高师院校的领导和专家组成了“大学本科小学教

体化的过程。作为一种认识过程，思维是在感性认识基础上进行的理性认识，它属于认识过程的高级阶段。例如，在对三角形的认识中，感知觉只能认识到三角形的形状、颜色和大小，而思维则舍弃三角形的这些表象特征，概括出任何三角形都具有三个角、三条边和三角形内角和等于 180° 这些共同的本质特征。

1. 思维的特征。

思维具有方向性、概括性和间接性特征。

(1) 思维的方向性。

思维的方向性特征又称为目的性、探索性或问题性特征。所谓思维的方向性，是指思维在对事物的本质及其规律的寻找过程中，总是以解决问题作为方向，也就是说思维总是沿着解决问题的方向发展自己。问题在思维中起到一种激励作用，它是思维探索活动的动力，同时也是思维活动的路标和航行的灯塔。

(2) 思维的概括性。

思维的概括性特征是指思维不仅仅依赖当前的刺激和直接的感知（和知觉不同），它还具有舍弃某些事物的表象而直接进行抽象概括的特征，即把同一类事物的共同的、本质的特性或事物间的规律性的联系抽取出来加以概括。例如，人们通过对大小不同圆的圆周与其半径的推算，舍弃了圆的大小及半径的长短，抽象概括出一切圆的周长与半径之比都是一个常数。思维的概括性包含两层意思：第一，能把一类事物中的共性加以抽象概括；第二，能从部分事物的相互关系中抽象出普遍的或必然的联系，并把它们推广到同类的现象中去。

(3) 思维的间接性。

思维的间接性是指人们凭借已有的知识经验或以其他事物为媒介，间接地推知事物过去的变化，认识事物现实的本质，预见事物未来的发展。在数学研究中，思维的间接性十分明显，因为数学本身就是一种非现实存在的理性构造，人们就是运用了间接性的思维

特征，才从已有的数学成果中获得了新的理论。

2. 思维的分类。

根据不同的分类形式，思维有不同的表现形态。

(1) 根据思维的形态不同，可以将思维分为动作思维、形象思维和抽象思维。

动作思维是指以实际的动作为支柱的思维，也称为操作思维或实践思维。它的特点是直观的、在实际操作活动中产生和进行的，3岁前的儿童思维就以动作思维为主。

形象思维是指用表象进行分析、综合、抽象、概括的过程。形象思维中的基本单位是表象，幼儿在3~6岁期间的思维多属于形象思维。成人的思维中也有形象思维的发生，特别是艺术家、作家、导演等更多地是运用形象思维，数学家有时也借助形象思维来表述某些抽象的概念。当然，成人的形象思维与儿童的形象思维有本质的差异。

抽象思维是运用概念、判断推理的形式来反映事物本质的思维。这种思维是以概念为支柱进行的思维，人们把它看作是人类思维的核心形态，又称为理性思维。抽象思维的形式又有形式逻辑与辩证逻辑之分，两者既有区别又有联系。形式逻辑的概念具有抽象性和确定性，辩证逻辑的概念具有具体性和灵活性。数学作为一种形式逻辑思维的表述过程和构造形式，在发生发展的过程中也含有辩证逻辑的形式。如微积分中极限概念的产生、发展和最后定义就明显地表现出辩证逻辑思维的形式。

(2) 根据思维过程的指向不同，可以将思维分为集中思维和发散思维。

集中思维又称求同思维、聚合思维或纵向思维。集中思维是指把问题的各种信息集中到一起求出一个共同的、单一的、确定的答案。如果某个问题只有一个正确的答案，思维的过程就是要找出这个正确的答案。

发散思维又称求异思维、分散思维或横向思维。发散思维是指思考问题时，从一个目标出发，沿着各种不同途径去思考、寻找各种可能的正确答案。这种思维无一定方向和范围，不墨守成规，具有更大的主动性和创造性。科学家的发明创造、艺术家的艺术作品、理论家的新观点和新创见，多得益于发散思维。

(3) 根据思维的智力品质不同，可以将思维分为习惯性思维和创造性思维。

习惯性思维是指用惯常的方式、固定的模式解决问题的思维。这种思维较为普遍，人们总愿意用旧有的、习惯的方式去解决问题，可以不费太大的努力就得出答案。这种思维缺乏主动性，有时会产生错误的认识。

创造性思维是指有主动性和创新性的思维，它没有固定的模式和方法，也不遵循已有的思路。创造性思维利用已有的信息独立思考，根据问题和情境创造性地探索答案。创造性思维往往是逻辑思维与非逻辑思维的有机结合。

(二) 数学思维的概念与特征

数学思维是人类思维的一种形式，具有思维的一般规律与特征。

1. 数学思维的概念。

一般地说，数学思维就是数学活动中的思维。更确切地说，数学思维是人脑在和数学对象交互作用的过程中，运用特殊的数学符号语言以抽象和概括为特点，对客观事物按照数学自身的形式或规律做出的间接概括的反映。

数学思维是由数学对象，并且主要是由数学问题推动发展的。可以认为，数学问题是推动数学发展的动力和方向，当然解决问题也正是数学思维要达到的目的。从本质上说，数学思维的过程就是不断提出问题的过程，数学思维的能力也就是提出数学问题、解决数学问题的能力。

数学问题的差异代表了不同的数学思维表现形式，解决不同的数学问题就形成了不同的数学思维规律。可以认为，数学问题对数学思维的启动、导向、展开都起着决定性的作用。对于初等数学特别是小学的数学教育而言，注重数学问题在教学中的作用，有着十分重要的意义。

2. 数学思维的特征。

数学思维的特征主要表现在它的高度抽象性、形式化的严谨性和表现方式的多样性。

数学思维的高度抽象性，是指数学思维的过程中把思维对象的某些现实的属性舍弃，把思维的对象抽象化为一定的数量关系、空间形式或逻辑关系，然后再把这些特定的数学关系表示成为一般的符号形式。数学思维的抽象性，还指它不仅仅停留在一次抽象的基础上，通常的数学符号形式可能经过了多次的抽象。有时由于数学问题本身就已经抽象化了，因此这种思维过程更属于高度抽象化的形式。与人类的所有思维形式相比，这种完全人为创造的符号化的数学语言，是数学思维高度抽象化的基础。

数学思维形式化的严谨性，是指数学思维在发生、发展和表述的过程中，完全依据一种形式化的严密过程。这种过程的逻辑性、严密性、准确性不容许出现一丝差错，也不允许有对与错之间的状态。正是数学思维的这种形式化的严谨性，使数学成为人类所有科学形式的最终表达手段。

数学思维表现的多样性，是指在数学思维的过程中，尤其在解决具体数学问题时数学思维并不都是严格的逻辑演绎，并不都是三段论式的证明形式，这些只是数学思维最后的表现形式。隐藏在这些抽象、严谨形式之下的是在数学思维中出现的猜测、试错、想象、直觉、审美等思维形式。这种数学思维的多样性特征，不仅表现在数学家处理、解决数学问题的思维特征上，而且也表现在普通人的数学思维活动中。现代数学教育理论的研究表明，数学思维的

非逻辑演绎的多样化思维在中小学的数学活动中也是十分重要的。数学作为一门自由创新的学科，猜测、试错、想象、直觉、审美等思维形式有时比逻辑演绎和公理化数学思维更重要。

二、数学思维方法

数学思维方法是由数学的符号、概念、语言按照数学特定的规律、法则，运用数学思维在数学领域中形成的一种方法。数学思维方法具有一般科学的方法论的特征，当然作为特定的数学形式，它又有着自身的特殊形式。

按照数学思维方法运用的领域、表现的形式不同，可以将数学思维方法作如下几种形式的分类。

(一) 按照数学思维方法适用的范围不同，可以将其分为宏观思维方法和微观思维方法

宏观数学思维方法，也称基本或重大的数学思维方法，是指对整个数学领域都产生重大影响的数学思维方法，如公理化思维方法、变量分析的思维方法等。这些思维方法曾极大地推动了整个数学的发展。当然这些思维方法又与哲学思想及科学思想的一般方法相联系。

微观数学思维方法，是指对某个数学分支发挥作用或由某些数学家群体使用的数学思维方法，如代数学的一些思维方法、几何学的一些思维方法等。微观数学思维方法中还包括数学问题解决或数学问题发现的一些具体的思维方法。

(二) 按照数学思维的逻辑形式不同，可以将其分为逻辑思维方法和非逻辑思维方法

数学思维的逻辑思维方法，主要是指按照形式逻辑的方式展开数学思维的方法。数学的定理、证明及理论构造都是严格按照形式逻辑的思维方式展开和构成的，可以说数学的结果都是按形式逻辑

来表现的。

数学思维的非逻辑思维方法，是指在数学思维中运用的猜想、直觉、灵感、形象等思维方式。这些思维形式经常地、大量地出现在解决数学问题之中，在现代的数学教育理论中，人们越来越认识到非逻辑思维方法在数学学习和数学教育中的作用。

(三) 按照数学思维解决问题的方式不同，可以将其分为程式化思维和发现性思维

数学的程式化思维，是指按照数学习惯的、原有的方式来解决数学问题。在数学学习和解决问题中这种方式表现为规范的逻辑演绎方式。这种数学思维方式是再现了原有的思维方式。

数学的发现性思维，也可以称之为创新性思维。这种思维方式的特点是它不遵循程式化的逻辑演绎的数学思维方式，而选择带有个人特性、主观色彩、独立特性的思维方式。现代的数学教育理论十分注重这种与传统的数学思维相区别的思维方式。

(四) 按照数学教育的阶段或领域的不同，可以将其分为不同的带有专业特征的思维方法

如按数学分支的差异，我们可以分为几何思维方法、代数思维方法、微积分的思维方法、概率统计的思维方法等。尽管现代数学的发展使某些数学分支之间的界线变得模糊，但对于初等数学或一般高等数学阶段的学习而言，不同数学分支的数学思维方法都有其自身的明显特征。

对初等数学的学习而言，集合对应的思维方法、公理化结构的思维方法、空间形式的思维方法、变量思维方法等都是具有初等数学特征的一些思维方法。对于小学数学教育而言，数学教师应当更加自觉地掌握和运用具有小学数学特征的思维方式，以便使自己的数学教学更符合小学生的思维阶段性特征。

(五) 在学习某个数学分支的数学思维中，我们还可以把数学思维分成不同的思维方法