黄 明 梁 旭 张振琳 编著

全国高等教育自学考试

离散数学

习题详解

计算机及应用专业

独立本科段

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

全国高等教育自学考试

离散数学习题详解

（计算机及应用专业 独立本科段）

黄 明 梁 旭 张振琳 编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是根据“全国自学考试（计算机及应用专业 独立本科段）考试大纲”以及历年考题编写的。全书共分4部分：第1部分是笔试应试指南；第2部分是笔试题解；第3部分是模拟试卷及参考答案；最后是附录，包括考试大纲和2002年上半年试卷。

本书紧扣考试大纲，内容取舍得当，叙述通俗易懂，附有大量与考试题型类似的习题及答案，以检查读者对考点的掌握程度。

本书适用于准备参加全国自学考试（计算机及应用专业 独立本科段）的考生，也可作为大专院校和培训班的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学习题详解/黄明等编著. —北京：机械工业出版社，2003.10
（全国高等教育自学考试）
ISBN 7-111-13052-9

Ⅰ. 离… Ⅱ. 黄… Ⅲ. 离散数学—高等教育—自学考试—解题
Ⅳ. 0158-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第081089号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策 划：胡毓坚
责任编辑：孙 业
责任印制：施 红

北京铭成印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2003年10月第1版·第1次印刷
787mm×1092mm 1/16·13.75印张·332千字
0001－5000册
定价：21.00元

前言

自学考试是对自学者进行以学历考试为主的国家高等教育学历考试。本书是为帮助和指导广大考生深入理解考点涉及的基本概念，灵活运用基本知识，掌握解题方法和技巧，熟悉考试模式，进一步提高应试能力和计算机水平而编写的。

全书共分 4 部分，即笔试应试指南、笔试题解、模拟试卷及参考答案和附录。书中所选例题均是在对历年真题深入研究的基础上精心筛选的，从深度和广度上反映了考试的难度和水平。模拟试卷的题型分配与真题一致，这些题目是考试指导教师的多年积累，在辅导班中多次实际使用过。

书中附录给出了“全国自学考试（计算机及应用专业 独立本科段）离散数学考试大纲”，以及“2002 年上半年全国自学考试离散数学试卷及参考答案”。

本书由黄明、梁旭、张振琳共同编写。

由于编者水平有限，编写时间仓促，书中错误和不妥之处在所难免，请读者和专家批评指正。

读者在使用本书的过程中如有问题，可通过 E-mail 与我们联系：

dlhm@263.net

编　者

出 版 说 明

全国高等教育自学考试指导委员会推出面向社会的高等自学考试，经过 10 多年的实践，已建立起一整套较为完善的规章制度和操作程序，考试组织严密规范，考试纪律严格；坚持考试标准，实行教考分离，确保了毕业生的质量。它为没有机会进入高等学校的中国公民提供了接受高等教育的机会，并以严格的国家考试保证了毕业生的质量，获得了普遍赞誉。国家自考中心于 2002 年开始执行新的考试计划。新计划中开设的专业共 224 个，其中专科 141 个占 63%，独立本科段 61 个占 27%，专本衔接专业 22 个占 10%。为帮助、指导广大自学考生深入理解计算机及相关专业考试的基本概念，灵活运用基本知识，掌握解题方法和技巧，熟悉考试模式，进一步提高应试能力和计算机水平，特编写了以下专业的基础课与专业课主要课程的习题详解。

- ✧ 计算机及应用专业 独立本科段
- ✧ 计算机信息管理专业 独立本科段
- ✧ 计算机网络专业 独立本科段
- ✧ 计算机及应用专业 专科

丛书特点：

1．以 2002 年最新考试大纲为基准

本丛书是根据 2002 年最新考试大纲，为参加全国高等教育自学考试考生编写的一套习题详解教材。

2．例题反映了历届考试中的难度和水平

书中对大量的例题进行了分析，所选例题都是在对最近几年考题深入研究的基础上精心筛选的，从深度和广度上反映了历届考试中的难度和水平。

3．作者经验丰富

本丛书的作者都是多年从事全国高等教育自学考试辅导的高等院校的教师。

读者对象：

- ✧ 准备参加全国高等教育自学考试的考生。
- ✧ 计算机及相关专业的本专科生。

目　录

第1部分

笔试应试指南

笔试应试策略

笔试考点归纳

1.1 笔试应试策略

全国自学考试（计算机及应用专业 独立本科段）离散数学考试大纲涵盖了命题演算、谓词演算、集合与函数、代数结构和图论五部分内容。使用的教材是由全国高等教育自学考试指导委员会组编，左孝凌编著的《离散数学》，2000 年 9 月由经济科学出版社出版。考试复习过程中，要紧紧围绕大纲的知识点，首先要熟练掌握大纲涉及的各部分的基本概念。

第 1 章为命题演算。重点是命题概念及其表示、命题公式化简、主范式及其互化、*P* 规则、*T* 规则以及 *CP* 规则。难点是推理理论及应用。占分量约为 5 分。

第 2 章为谓词演算。重点是带量词的公式变换，即前束范式。难点是谓词演算的推理理论。本章在重点讲解清楚谓词概念的情况下，对带量词的蕴含，等价公式表只作结论性推证。占分量约为 30 分。

第 3 章为集合与函数。本章从集合概念出发，引出了关系的各种运算性质及分类，即相容关系、等价关系与序关系等。重点是关系运算及分类，还有相容关系、等价关系与序关系等有关性质，难点是关系闭包概念及求法。占分量约为 25 分。

第 4 章为代数结构。本章从广义运算出发，结合不同集合上不同代数性质，引出同态、同构、子代数等概念，在运算及其性质基础上研究了半群、独异点、群、环、格等各类代数系统。重点是代数系统概念、群与子群、格与布尔格的概念。难点是循环群、环、格等概念。占分量约为 15 分。

第 5 章为图论。本章从图的基本概念出发，讲述图的连通性、偶拉图、哈密尔顿图、树等有关应用，这些内容是数据结构，计算机网络等课程的基础。因此，图论内容是相当现实和必需的。重点是图的连通性、平面图和树的应用，难点是哈密尔顿图和五着色问题。占分量约为 25 分。

在复习时要根据大纲里提供的考核点和考核要求来进行，这样就能抓住重点，提高复习效果。在做练习时，要根据考试的题型进行练习，在掌握基本概念的基础上，学会一定的解题技巧。离散数学的考试题型有：单选题、填空题、计算题、证明题和应用题等题型。对于不同题型，要采用不同的答题方法。

单选题：这种题型可考查考生的理解、推理分析，综合比较能力。在答题时，如果有把握可以直接给出正确答案；对于没有太大把握的试题，可以采用排除法，经过分析比较逐步排除错误答案，最终选定正确答案。

填空题：这种题型常用于考核考生观察能力与运用有关公式、原理的能力。在答题时，无论有几个空，回答都应明确、肯定。考生在复习中最好的应对办法是牢记学科知识中最基本的知识、概念、原理等。

计算题：这种题型着重考核考生对概念、基本原理、基本方法的理解程度，在复习过程中要熟练掌握考试大纲涉及的一些基本概念和原理。

证明题：这种题型一般围绕基本概念、原理及其联系进行命题，着重考核考生对概念、知识、原理的掌握、辨别和理解能力。在答题时，答案要有层次性，条理清晰，列出要点，同时加以简要扩展就可以了。

应用题：这种题型着重考核考生分析、解决实际问题的能力，考核考生综合应用能力和

创见性。在答题时，要综合运用所学知识进行分析和设计。

考生在复习时，在掌握知识点的同时也应抓住这些题型的特点，这样才能达到好的应试效果。

1.2 笔试考点归纳

1.2.1 命题演算

1．命题概念

所谓推理就是由一个或几个判断推出一个新判断的思维形式。推理的基本要素就是表达判断的一种陈述句，这种陈述句具有真值，所谓真值就是语句为真或为假的性质。当一个陈述句对其判断为真时，就说这个陈述句的真值为真；当一个陈述句对其判断为假时，就说它的真值为假。具有惟一真值的陈述句称作命题，亦可简称为语句。

任一命题必有其真值，亦可称为该命题的值。

应该注意，一个陈述句能否分辨真假，与是否知道它的真假是两件事。

在数理逻辑中，我们将使用大写字母 A，B，…，P，Q，…或用带下标的大写字母，或用数字，等表示命题。

表示命题的符号称为命题标识符。

一个命题标识符如表示确定命题，就称为命题常量，如果命题标识符只标志为命题的位置，就称为命题变元，因为命题变元可以表示任意命题。所以它不能确定真值，因此命题变元不是命题。当命题变元 P 用一特定命题去代替，此时 P 可以确定真值，这也称作对 P 的指派。

2．复合命题与联结词

(1) 不能再分解的命题为原子命题。由一些原子命题，经过一些联结词复合而成的命题，即复合命题。

1) 否定。**定义 1.2.1** 设 P 为一命题，P 的否定是一个新的命题记作 $\neg P$。若 P 为 T，$\neg P$ 为 F；P 为 F，$\neg P$ 为 T。“ $\neg$ ”表示命题的否定。

其真值表如下表：

P	$\neg P$
T	F
F	T

2) 合取。**定义 1.2.2** 两个命题 P 和 Q 的合取是一个复合命题，记作 $P\wedge Q$。当且仅当 P、Q 同时为 T 时，$P\wedge Q$ 为 T，其余情况，$P\wedge Q$ 为 F。

联结词$\wedge$的定义如下表：

P Q	$P\wedge Q$
T T	T
T F	F
F T	F
F F	F

3) 析取。**定义 1.2.3** 两个命题 P 和 Q 的析取是个复合命题，记作 $P\vee Q$，当且仅当 P、

Q 同时为 F 时，$P\vee Q$ 的真值为 F，否则 $P\vee Q$ 的真值为 T。

联结词$\vee$的定义如下表：

P	Q	$P\vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

4) 条件。**定义 1.2.4** 给定两个命题 P 和 Q，其条件命题是一个复合命题，记作 $P\rightarrow Q$、读作"如果 P 那么 Q"。亦可读为"若 P 则 Q"。当且仅当 P 的真值为 T，Q 的真值为 F 时，$P\rightarrow Q$ 的真值为 F，其余情况 $P\rightarrow Q$ 的真值为 T。

我们称 $P\rightarrow Q$ 中 P 为前件，Q 为后件。

条件联结词$\rightarrow$的定义如下表：

P	Q	$P\rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

由条件联结词定义，在 $P\rightarrow Q$ 中前件为 F，那么后件 Q 不论取 T 或取 F，$P\rightarrow Q$ 的真值为 T。

5) 双条件。**定义 1.2.5** 给定两个命题 P 和 Q，其复合命题 $P \rightleftarrows Q$ 称作双条件命题，读作"P 当且仅当 Q"，当 P 与 Q 的真值相同时，$P \rightleftarrows Q$ 的真值为 T，否则 $P \rightleftarrows Q$ 的真值 F。

联结词$\rightleftarrows$的定义如下表：

P	Q	$P\rightleftarrows Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

(2) 从上述五种联结词，我们可以得出：

1) 复合命题的真值只取决于构成它们的各原子命题的真值，而与它们的内容含义无关。对联结词所联结的两原子命题之间有无关系无关。

2) $\wedge$，$\vee$，$\rightleftarrows$具有对称性，$\neg$，$\rightarrow$无对称性。

3) 有些书籍中，把双条件联结词亦可记作"$\leftrightarrow$"或"*iff*"。

3. 命题公式与真值表

不包含任何联结词的命题叫做原子命题，至少包含一个联结词的命题称作复合命题。

设 P 和 Q 是任意两个命题，则$\neg P$ ，$(P\vee Q)$ ，$(P\vee Q)\wedge(P\rightarrow Q)$ 等都是复合命题。

若 P 和 Q 是命题变元，则上述各式均称作命题公式。P 和 Q 称作命题公式分量。

需要注意：命题公式没有确定的真值。仅当在一个公式中命题变元用确定的命题代换时，才得到一个命题。

由命题变元、联结词和有关括号组成的字符串并不能都成为命题公式，这些字符串，必须按照下述规定才能组成合式公式。

定义 1.3.1　命题演算的合式公式规定为：

(1) 单个命题变元本身是一个合式公式。

(2) 如果 A 是合式公式，那么 $\neg A$ 是合式公式。

(3) 如果 A 和 B 是合式公式，那么 $(A \wedge B)$ 、$(A \vee B)$ 、$(A \rightarrow B)$ 和 $(A \rightleftarrows B)$ 都是合式公式。

(4) 当且仅当有限次地应用(1) (2) (3) 所得到的包含命题变元，联结词和圆括号的符号串是合式公式。

今后将合式公式亦称作命题公式或简称公式。

同时规定联结词优先次序为：$\neg$ ，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\rightleftarrows$ 。

定义 1.3.2　设 A_i 是公式 A 的一部分，且 A_i 是一个合式公式，称 A_i 是 A 的子公式。

一个含有命题变元的命题公式是没有确定真值的。只有在命题公式中每个命题变元用指定的命题常量代替后，命题公式才有确定的真值，成为命题。

定义 1.3.3　设 P 为一命题公式，P_1，P_2，…，P_n 为出现在 P 中的所有命题变元，对 P_1，P_2，…，P_n 指定一组真值称为对 P 的一种指派。若指定的一种指派，使 P 的值为真，则称这组值为成真指派；若指定的一种指派，使 P 的值为假，则称这组值为成假指派。

在命题公式 P 中，命题变元 P_1，P_2，…，P_n，给定一组派$\alpha_i(i=1, 2, \cdots, n)$，$\alpha_i=0$ 或$\alpha_i=1$。

含 n 个命题变元的命题公式，共有 2^n 组指派。

将命题公式 P 在所有指派下取值情况，列成表，称为 P 的真值表。

在真值表中，真值 T，F，可分别用 1，0 代替。

定义 1.3.4　给定两个命题公式 A 和 B，设 P_1，P_2，…，P_n 为所有出现于 A 和 B 中的原子变元，若给 P_1，P_2，…，P_n 任一组真值指派，A 和 B 的真值相同，称 A 和 B 是等价的，记作 $A \Leftrightarrow B$。

定义 1.3.5　设 A 为一命题公式，若 A 在它的各种指派情况下，其取值均为真，则称公式 A 为重言式或永真式。

定义 1.3.6　设 A 为一命题公式，若 A 在它的各种指派情况下，其取值均为假，则称公式 A 为矛盾式或永假式。

定义 1.3.7　设 A 为一命题公式，若 A 在各种真值指派下至少存在一组成真指派，则称 A 是可满足式。

表 1 列出了常用的等值式。

表 1

对合律	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$
幂等律	$P \wedge P \Leftrightarrow P, P \vee P \Leftrightarrow P$
结合律	$P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$ $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$
交换律	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
分配律	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
吸收律	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
德摩根律	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
同一律	$P \vee F \Leftrightarrow P, P \wedge T \Leftrightarrow P$

（续）

零　律	$P\wedge F\Leftrightarrow F, P\vee T\Leftrightarrow T$
否定律	$P\vee\neg P\Leftrightarrow T, P\wedge\neg P\Leftrightarrow F$

4. 等价变换与蕴含式

定理 1.4.1　设 X 是合式公式 A 的子公式，若有 Y 也是一个合式公式，且 $X\Leftrightarrow Y$，如果将 A 中的 X 用 Y 置换，得到公式 B，则 $A\Leftrightarrow B$。

定理 1.4.2　设 A，B 为两个命题公式，$A\Leftrightarrow B$，当且仅当 $A\rightleftarrows B$ 为一个重言式。

定义 1.4.1　当且仅当 $P\rightarrow Q$ 是一个重言式时，我们称"P 蕴含 Q"，并记作 $P\Rightarrow Q$。$P\Rightarrow Q$ 称 P 蕴含 Q 或蕴含式，亦称作永真条件式。蕴含式有下列性质：

(1) 对任意公式 A，有 $A\Rightarrow A$；

(2) 对任意公式 A，B 和 C，若 $A\Rightarrow B$，$B\Rightarrow C$，则 $A\Rightarrow C$；

(3) 对任意公式 A，B 和 C，若 $A\Rightarrow B$，$A\Rightarrow C$，则 $A\Rightarrow(B\wedge C)$；

(4) 对任意公式 A，B 和 C，若 $A\Rightarrow C$，$B\Rightarrow C$，则 $A\vee B\Rightarrow C$。

定理 1.4.3　设 P，Q 为任意两个命题公式，$P\Leftrightarrow Q$ 的充分必要条件是 $P\Rightarrow Q$，$Q\Rightarrow P$。

表 2 列出了常用的永真条件。

表 2

$P\wedge Q\Rightarrow P$，$P\wedge Q\Rightarrow Q$	化简式
$P\Rightarrow P\vee Q$	附加式
$\neg P\Rightarrow P\rightarrow Q$，$Q\Rightarrow P\rightarrow Q$	变形附加式
$\neg(P\rightarrow Q)\Rightarrow P$，$\neg(P\rightarrow Q)\Rightarrow\neg Q$	变形简化式
$P\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow Q$	假言推论
$\neg Q\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow P$	拒取式
$\neg P\wedge(P\vee Q)\Rightarrow Q$	析取三段论
$(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R)\Rightarrow P\rightarrow R$	条件三段论
$(P\rightleftarrows Q)\wedge(Q\rightleftarrows R)\Rightarrow(P\rightleftarrows R)$	双条件三段论
$(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(P\wedge R)\Rightarrow Q\rightarrow S$	合取构造二难
$(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(P\vee R)\Rightarrow Q\vee S$	析取构造二难
$(P\rightarrow Q)\Rightarrow(P\vee R)\rightarrow(Q\vee R)$	前后件附加
$(P\rightarrow Q)\Rightarrow(P\wedge R)\rightarrow(Q\wedge R)$	前后件附加

5. 最小联结词组与范式

"$\neg$"，"$\wedge$"，"$\vee$"，"$\rightarrow$"，"$\rightleftarrows$"这五个联结词中若干个组成的命题公式，必可由$\{\neg,\ \vee\}$或$\{\neg,\ \wedge\}$组成的命题公式所替代。

我们把$\{\neg,\ \vee\}$及$\{\neg,\ \wedge\}$称作命题公式的最小联结词组。

定义 1.5.1　一个命题公式称为合取范式，当且仅当它具有形式：

$$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n\qquad(n\geqslant1)$$

其中，A_1，A_2，…，A_n 都是由命题变元及其否定所组成的析取式。

定义 1.5.2　一个命题公式称为析取范式，当且仅当它具有形式：

$$A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n\qquad(n\geqslant1)$$

其中，A_1，A_2，…，A_n都是由命题变元或其否定所组成的合取式。

任何一个命题公式，都可以求它的合取范式或析取范式。

一个命题公式的合取范式或析取范式并不是惟一的。

定义 1.5.3　n 个命题变元的合取式，称作布尔合取或小项，其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者必须出现且仅出现一次。

一般来说，n 个命题变元共有 2^n 个小项。

(1) 每个小项具有一个相应编码，当编码与其真实指派相同时，该小项真值为 T，在其余 2^n-1 种指派情况下为 F。

(2) 任意两个不同小项的合取式永假。

(3) 全体小项的析取式为永真。

定义 1.5.4　对于给定的命题公式，如果有一个等价公式，它仅由小项的析取所组成，则该等价式称作原式的主析取范式。

定理 1.5.1　在真值表中，一个公式的真值为 T 的指派所对应的小项的析取，即为此公式主析取范式。

定理 1.5.2　任意含 n 个命题变元的非永假命题公式，其主析取范式是惟一的。

定义 1.5.5　n 个命题变元的析取式称作布尔析取或大项。其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者必须出现且仅出现一次。

每个大项也可以编码，具体办法如下，首先将 n 个命题变元排序，把每个命题变元对应为 0，将命题变元的否定，对应为 1，则可将 2^n 个大项按二进制数编码，记为 M_i，其下标 i 是由二进制数化为十进制数。

定理 1.5.3　在真值表中一个公式的真值为 F 的指派所对应的大项的合取，即为此公式的主合取范式。

定理 1.5.4　任意含有 n 个命题变元的非永真命题公式 A，其主合取范式是惟一的。

求一命题公式 A 的主合取范式与求主析取范式的步骤非常相似。

对于一个给定 n 个变元的命题公式 A，只要它不是永真式或永假式，则它必可化为惟一的主析取范式或主合取范式。

设命题公式中含有 n 个命题变元，且 A 的主析取范式中含有 k 个小项 m_{i1}，m_{i2}，…，m_{ik}，则 A 的主合取范式必含有 2^n-k 个大项。如果命题公式 A 的主析取范式为：

$$\sum(i_1, i_2, \cdots, i_k)$$

则 A 的主合取范式为：

$$\prod(0,1,2,\cdots,i_1-1,i_1+1,\cdots,i_k-1,i_k+1,\cdots,2^n-1)$$

从 A 的主析取范式求其主合取范式步骤为：

(1) 求出 A 的主析取范式中未包含小项的下标。

(2) 把(1) 中求出的“下标”写成对应大项。

(3) 做(2) 中写成的大项合取，即为 A 的主合取范式。

判定含 n 个命题变元的公式：

(1) 若 A 可化为与其等价的、含 2^n 个小项的主合取范式，则 A 为永真式。

(2) 若 A 可化为与其等价的、含 2^n 个大项的主合取范式，则 A 为永假式。

(3) 若 A 的主析取范式不含 2^n 个小项，或 A 的主合取范式不含 2^n 个大项，则 A 为可满足的。

6. 推理理论

推理是一种思维形式，逻辑学中，把从前提(双称公理或假设) 出发，根据确认的推理规则推导出一个结论，这个过程，称作有效推理，或是形式证明。在推理过程中，我们关心的是推理的有效性，必须把推理的有效性和结论的真实性区别开。

定义 1.6.1 设 H_1，H_2，…，H_n，C 是命题公式，当且仅当 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$，称 C 是一组前 H_1，H_2，…，H_n 的有效结论。

判别有效结论的过程就是论证过程，它有多种方法：

(1) 真值表法；

(2) 主范式方法及等值算法。

表 3 列出了常用的推理规则。

表 3

$E1$	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$
$E2$	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
$E3$	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
$E4$	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
$E5$	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
$E6$	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
$E7$	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
$E8$	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
$E9$	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
$E10$	$P \vee P \Leftrightarrow P$
$E11$	$P \wedge P \Leftrightarrow P$
$E12$	$R \vee (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow R$
$E13$	$R \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow R$
$E14$	$R \vee (P \vee \neg P) \Leftrightarrow T$
$E15$	$R \wedge (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow F$
$E16$	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
$E17$	$\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
$E18$	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$
$E19$	$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$
$E20$	$(P \rightleftarrows Q) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
$E21$	$(P \rightleftarrows Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
$E22$	$\neg(P \rightleftarrows Q) \Leftrightarrow (P \rightleftarrows \neg Q)$

如果命题变元较多，用真值表法、等值演算法及主范式法等作推理证明都不很方便，则引入构造的方法。这种方法，首先要确定推量定律及等值定律，表 2 和表 3 中的公式可以直接应用，其次要确定已知的前提，假设其真值为真。推理过程就是一系列命题公式序列，其中每个命题公式或者是已知的前提，或者是由某些前提应用推理规则得出的结论。

常用的推理规则有：

(1) 前提引入规则：在证明的任何步骤上，都可以引入前提，简称 P 规则。

(2) 结论引入规则：在证明的任何步骤上，所证明的结论都可作为后续证明的前提，称为 T 规则。

(3) 置换规则：在证明的任何步骤上，命题公式中的任何子命题公式都可以用与之等值的命题公式置换，如用 $\neg P \vee Q$ 置换 $P \rightarrow Q$，为此，表 2 和表 3 中的等值及推理公式表都可给予应用。它亦记为 T 规则。

现在由一组前提 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 利用一些公认的推理规则，根据已知的等价或蕴含公式推演得到的一个结论，即命题公式 C，记作：

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \vdash C 。$$

这里，C 称作 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 的逻辑结论或有效结论。

定理 1.6.1　推理 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \vdash C$。是有效推理的充分必要条件是 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \rightarrow C$ 为永真式。

定义 1.6.2　设 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 是可满足式，则称 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 是相容的，若 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 是永假式,称 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 是不相容的。

定理 1.6.2　若 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \vee \neg C$ 为永假式，则 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \vdash C$ 成立。

定理 1.6.3　若 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge R \Rightarrow C$，则 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow R \rightarrow C$。

本定理亦称 CP 规则。

1.2.2　谓词演算

1．谓词的概念与表示

原子命题一般是一个反映判断的句子，通常原子命题可进一步用客体和谓词两个部分刻画，客体亦称个体，它是指可以独立存在的对象，它可以是一个具体事物，也可以是一个抽象的概念。

一般来说指明客体性质或指明客体之间关系的是谓词。

用大写字母表示谓词，用小写字母表示客体名称。

表示具体或特定的个体，称为个体常项；表示抽象或泛指的个体称为个体变项。个体变项的取值范围称为个体域(或称论域)，将一切事物组成的个体域称为全总个体域，通常把表示具体性质或关系的谓词称为谓词常项。

定义 2.1.1　由一个谓词，一些个体变元组成的表达式简称为谓词变项或称为命题函数。

命题函数不是命题，只有命题函数中的变元都取为特定具体的个体时，才是确定的命题。

谓词变项中，个体变元的数目称为谓词变项的元数。如 $F(x)$ 为一元谓词，$L(x, y)$ 为二元谓词，但是当 n 元谓词中某一个体变项取作常量时，如：

$$P(a, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$$

其中，a 是常量，$x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 为变项，则上式成为 n-1 元谓词。我们把 $F(a)$ ，$P(a, b, \cdots, d)$ 等称为 0 元谓词，通常把不带个体变项的谓词称为 0 元谓词。

2．量词与合式公式

在命题函数中，除了个体和谓词外，有时还出现一种表示数量的词，称作量词。量词有

两种：

(1) 全称量词：对应日常语言的“一切”、“任意的”、“所有”、“凡是”等词，用符号“$\forall$”表示。$\forall x$ 表示对个体域里的所有 x，而$\forall xF(x)$ 表示个体域里所有个体，都有性质 F。

(2) 存在量词：对应日常语言中的“存在着”、“有一个”、“至少有一个”等词，用符号“$\exists$”表示。$\exists x$ 表示存在个体域中的个体，$\exists xF(x)$ 表示存在着个体域中的个体具有性质 F。

对命题符号化用谓词、个体、量词等刻画时，首先要考虑个体域(论域) 的情况。

在全称量词中，特性谓词是条件式的前件，在存在量词中，特性谓词后跟的一个合取项。

一般的在全总个体域中，才产生特性谓词。如果事先规定了个体域，则可免去特性谓词。一般约定：如果事先没有明确出个体域，则认为个体域是全总个体域。

由一个或几个原子命题函数以及逻辑联结词组合而成的表达式称为复合命题函数。

谓词演算的合式公式，可由下述各条组成(合式公式 A 记为 $WffA$) ：

(1) 原子谓词公式是合式公式。

(2) 若 A 是合式公式，则 $\neg A$ 是一个合式公式。

(3) 若 A 和 B 都是合式公式，则$(A\vee B)$，$(A\wedge B)$，$(A\rightarrow B)$，和$(A\leftrightarrows B)$是合式公式。

(4) 如果 A 是合式公式，x 是 A 中出现的任何变元，则$(\forall x)A$ 和$(\exists x)A$ 都是合式公式。

(5) 只有经过有限次应用规则，(1)、(2)、(3)、(4)所得到的公式是合式公式。

我们约定：最外层的括号可以省略，但需注意，量词后面若有括号则不能省略。合式公式今后也简称公式。

定义 2.2.1 给定谓词合式公式 A，其中一部分公式形式为$(\forall x)B(x)$ 或$(\exists x)B(x)$ ，称量词$\forall$，$\exists$后面所跟的 x 为指导变元或作用变元。称 B 为相应量词的辖域(或作用域) 。

在辖域中，x 的一切出现称为约束出现。在 B 中除去约束出现的其他变项的出现称为自由出现。

在谓词合式公式中，有的个体变元既可以是约束出现，又可以是自由出现，为了避免混淆采用下面两个规则：

(1) 约束变元改名规则：将量词辖域中，某个约束出现的个体变元及相应指导变元改成本辖域中未曾出现过的个体变元，其余不变。

(2) 自由变元代入规则：对公式中自由出现的个体变元可用某个个体常元去代入，并且该个体变元在公式中的处处出现均被代入，此外也可以用一个与原子公式中所有个体变元不同的个体变元去代入，且处处代入。

3. 谓词演算的等价式与蕴含式

当确定论域后$\forall xP(x)$ ，与$\exists xP(x)$ 都是一个特定的命题。

设论域元素为 a_1，a_2，$\cdots$，a_n，则：

$(\forall x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge\cdots\wedge A(a_n)$ ，

$(\exists x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee\cdots\vee A(a_n)$ 。

在谓词公式中，常包含命题变元和个体变元，当个体变元由确定的个体取代，命题变元用确定的命题所取代时，就称作对谓词公式赋值(或解释) 。

定义 2.3.1 给定任何两个谓词公式 $WffA$ 和 $WffB$，设它们有共同的个体域 E，若对 A 和 B 的任一组变元进行赋值，所得命题的真值相同，则称谓词公式 A 和 B 在 E 上是等价的，并记作 $A\Leftrightarrow B$。

定义 2.3.2 给定任意谓词公式 $WffA$ 和 $WffB$，其个体域为 E，对于 A 的所有赋值 $WffA$