中学生读物

数列极限与函数极限

吴从炘　赵林生　编

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

黑龙江科学技术出版社

数列[illegible]数极限

吴从炘 赵林生 编

黑龙江科学技术出版社

一九八一年·哈尔滨

内 容 提 要

极限和微积分初步是中学数学课程新增加的内容。很多中学生学起来感到困难，迫切需要课外辅助读物。

本书根据中学教学大纲要求，阐述微积分的理论基础，并加以深入与扩展。全书共分三部分：数列的极限；函数的极限；习题与思考题解答。内容简明扼要，深入浅出，并附有大量的练习题，适于中学师生学习与探讨。

数列极限与函数极限

吴从炘 赵林生 编

黑龙江科学技术出版社出版

（哈尔滨市南岗区分部街28号）

黑龙江省教育厅印刷厂印刷 黑龙江省新华书店发行

开本 787×1092 毫米 1/32 · 印张 4 1/2 · 字数 65,000

1981年8月第一版 1981年8月第一次印刷

印数 1—21,500

书号：13217·013 定价：0.40元

目　　录

引　言

通常我们把算术、代数、几何、三角等称为初等数学，而微积分初步这门课程，则属于高等数学范畴．初等数学主要研究常量与固定的图形；而高等数学则研究变量和图形的变化．在处理方法上也有根本的不同．

极限理论，是微积分学的理论基础．因此，为了学好微积分的初步知识，必须很好地掌握极限的概念、运算，以及一些基本性质和定理．

本书只介绍学习微积分初步所必需的两种极限，即数列极限和函数极限．

下面先通过两个例子直观地初步认识一下极限概念．

例1　若对于半径为R的圆，依次做圆的内接正三角形、正六边形、正十二边形……，那末当边数成倍地增加时，显然它们的面积依边数的增加而越来越接近圆的面积πR^2．如果还以同样方法依次作外切正多边形，那么它们的面积也无限地接近于圆面积πR^2．我们把边数这样无限增加得到对应面积越来越接近于常量πR^2这个事实，直观地称为当边数无限增加时，所得到的对应正多边形面积组成的数列，以常量πR^2为极限．

例2　有句古语："一尺之棰，日取其半，万世不竭"．

这说的是一尺长的木棒，每天截去它的一半，可以一天天地截下去，永远还有剩余的量．因为每天剩余的量，依次为：$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2^2}$，$\frac{1}{2^3}$，…，$\frac{1}{2^n}$，……．从而我们可以设想，剩下的量越来越小，而且接近于常量零．我们也直观地称当天数无限增加时（即天数一天天增加下去），木棒剩余量所组成的数列以零为极限．

第一部分 数列的极限

一、数列极限的概念

现在抽去引言中的实际问题的几何意义，来研究当自然数 n 变化时，数列 $\{x_n\}$ 的项的变化趋势。

我们把当 n 无限大时（以 $n\to\infty$ 来表示，∞ 读作无穷大），数列的项 x_n 无限地接近于某一常量 A，直观地叫做当 $n\to\infty$ 时，$\{x_n\}$ 的极限是 A。

考察数列：

（1） $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots\cdots$。

（2） $-2.1, -2.01, -2.001, \cdots\cdots$。

（3） $0.9, 1.1, 0.99, 1.01, 0.999, 1.001, \cdots\cdots$。

（4） $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{2^3}, \cdots\cdots$。

可以看出，当 $n\to\infty$ 时上述各数列分别以大于，小于或时而大于、时而小于的方式与常量 $0, -2, 1, 0$ 无限地接近。因此数列（1），（2），（3），（4）的极限分别为 $0, -2, 1, 0$。

利用上面关于极限的说法，对于那些比较简单的

数列，其变化趋势是容易看出来的。但对一些比较复杂的数列，例如$\sqrt[n]{n}$的变化趋势用上面那种粗略、直观的说法，就不容易说清楚。因此必须寻求一种更能说明问题实质的严格定义。为此我们将一步步地引伸出它的精确定义。

显然，前面关于极限的那种说法可进一步解释为：在n无限增大的过程中，只要能找到一个确定的项x_N（数列中的第N项）使得x_N以后的所有项（不论x_N前面的项究竟是怎样）与常量A接近到事先给定的“要多接近就有多接近”，则说当$n\to\infty$时，数列$\{x_n\}$以A为极限。

现在以数列$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2^2}$，$\frac{1}{2^3}$，…，$\frac{1}{2^n}$，……为例加以说明，并由此引出极限的精确定义。

事实上，在n不断增大的过程中，当要求它的项与0接近到相差小于0.1时，显然用式子表示就是$\left|\frac{1}{2^n}-0\right|<0.1$，即$\left|\frac{1}{2^n}-0\right|=\frac{1}{2^n}<\frac{1}{10}$，而由$\frac{1}{2^n}<\frac{1}{10}$，得到$n>3$，这说明第3项以后的所有项（$\frac{1}{2^4}$，$\frac{1}{2^5}$，$\frac{1}{2^6}$，……），不论哪一项都与0接近到相差小于0.1的程度，因此，取$N=3$（注意N不是唯一的，显然大于3的自然数都可以，我们这里只

是说至少能找到一个这样的N，而3是其中最小的一个）。

又比如要求它们相差小于0.01，即$\left|\frac{1}{2^n}-0\right|=\frac{1}{2^n}<0.01$，同理可求得$n>6$，即取$N=6$，这表明大于第6项的每一项都能达到与0接近到相差小于0.01的程度的要求。

同理，我们可以不断地提出新的要求：相差小于0.02，0.08，0.0031，……。显而易见，对于每一个"要求"都能找到自己相应的N。

我们把任意给出的"要求"的那些正数如0.1，0.01，0.02，0.08，0.0031，……，用一个字母$\varepsilon(>0)$表示。得到的对应的自然数3，6，7，……，用N来表示。

于是就可以这样说：若对于任意给出的每一个"要求"$\varepsilon>0$，都能至少找到一个由它确定的自然数N，使得当$n>N$的一切项都能使$\left|\frac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon$成立，则称当$n$无限增大时$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$的极限为0。

于是我们对一般的数列$\{x_n\}$给出极限的下述精确定义：**若对于任意给出的$\varepsilon>0$，总能找到一个正整数N，使得对$n>N$时的一切项x_n，不等式$|x_n-A|$**

$<\varepsilon$ 总能成立，则称当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限。

这个定义可用符号 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 表示，或记为当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to A$。（注：此处 lim 是英文极限 limit 一词的缩写。）

另外值得注意的是，在数列极限的上述 ε—N 定义中的 ε 是一次一次任意给出的（每给出一个就是一个确定的量），而 N 与 ε 有关，一般来说就是对于同一个数列，不同的 ε 也对应不同的 N。

数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限为 A 的几何解释：

先把 $\{x_n\}$ 的项 x_n 和 A 在数轴上的对应点依次表示出来，再作以 A 为中心的开区间 $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$。于是由 $|x_n-A|<\varepsilon$ 可推出 $A-\varepsilon<x_n<A+\varepsilon$，说明当 $n>N$ 时，点 x_n 都落在开区间 $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$ 之内（这个开区间叫做点 A 的 ε 邻域）；至于第 N 项前面的有限多个点在 A 点的 ε 邻域内或外都无关大局。显然，ε 越小而 $(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$ 的长度 2ε 也越小，这表明点列 x_n 系凝聚在 A 点的近傍。如图 1 所示

图 1

例 3 设一个无穷数列的通项公式是$a_n=\frac{n+1}{n+2}$

（1）求出这个数列的前五项；

（2）试证这个通项公式也可以写成

$$a_n=1-\frac{1}{n+2},$$

并计算出$|a_n-1|$；

（3）对于 $\varepsilon=0.2$ 与 ε 时，分别求出N，使当$n>N$时，$|a_n-1|<\varepsilon$。

解（1）当 $n=1,2,3,4,5$ 时，$a_1=\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$，

同理$a_2=\frac{3}{4}$，$a_3=\frac{4}{5}$，$a_4=\frac{4}{6}$，$a_5=\frac{6}{7}$。

（2）$a_n=\frac{n+1}{n+2}=\frac{n+2-1}{n+2}=\frac{n+2}{n+2}-\frac{1}{n+2}$

$$=1-\frac{1}{n+2},$$

$$|a_n-1|=\left|1-\frac{1}{n+2}-1\right|=\frac{1}{n+2}.$$

（3）当 $\varepsilon=0.2$ 时，$|a_n-1|=\frac{1}{n+2}<0.2$，

即$n+2>5$，取$N=3$，则当$n>N$时，

$|a_n-1|<0.2$。

当$\varepsilon=\varepsilon$时，$|a_n-1|=\frac{1}{n+2}<\varepsilon$，即

$n+2>\frac{1}{\varepsilon}$，取$N=[\frac{1}{\varepsilon}-2]$，则当 $n>N$ 时，$|a_n-1|<\varepsilon$。

注意：$\varepsilon>0$ 一经给出，就是一个定量，因此 $\frac{1}{\varepsilon}-2$ 也是定量。

符号$[\frac{1}{\varepsilon}-2]$表示取$\frac{1}{\varepsilon}-2$的整数部分。

例如：$[3.14]=3$。

例 4 根据极限定义证明，数列 1，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{4}$，…，$(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，……的极限是零。

证明 对于任意给定的$\varepsilon>0$，令$|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}-0|=\frac{1}{n}<\varepsilon$，得$n>\frac{1}{\varepsilon}$，取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，则当 $n>[\frac{1}{\varepsilon}]$ 时就有$|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}-0|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{x\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=0$。

例 5 根据极限定义，证明数列$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2^2}$，$\frac{1}{2^3}$，…，$\frac{1}{2^n}$，……的极限为 0。

证明 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，令$|\frac{1}{2^n}-0|=\frac{1}{2^n}$

$<\varepsilon$，得 $n>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$，不失一般性，可设 $\varepsilon<1$，取 $N=[\log_2\frac{1}{\varepsilon}]$，当 $n>N$ 时就有 $\left|\frac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon$。即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0。$$

类似地可证明：

$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\cdots$，$\frac{n}{n+1}$，$\cdots\cdots$ 的极限为 1。

0，$\frac{3}{4}$，$\frac{8}{9}$，$\cdots$，$\frac{n^2-1}{n^2}$，$\cdots\cdots$ 的极限为 1。

1，$\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\cdots$，$\frac{1}{\sqrt{n}}$，$\cdots\cdots$ 的极限为0。

例 6 设 $u_n=\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$。问 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=?$ 又当 $\varepsilon=0.001$ 时 n 应为何值才能使 u_n 与其极限之差的绝对值小于 ε？

解 因为 $\left|\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\right|\leqslant\dfrac{1}{n}$，故可猜想 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$。事实上，令 $|u_n-0|=\left|\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\right|\leqslant\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，取 $N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]$，则当 $n>N$ 时 $|u_n-0|<\varepsilon$。

当 $\varepsilon=0.001$ 时，取 $n>[\dfrac{1}{0.001}]=1000$ 即可。

例 7 数列$\{x_n\}$为 2，2，2，…，2……。试证

$$\lim_{n\to\infty}x_n = 2.$$

证明 对于任意给出的 $\varepsilon>0$，因为 n 为任何正整数时，$x_n = 2$。故由 $|x_n - 2| = |2-2| = 0 < \varepsilon$，即得

$$\lim_{n\to\infty}2 = 2.$$

如果当 $n\to\infty$时，数列$\{x_n\}$的极限为A，则称A为$\{x_n\}$的极限值。

由前面所考察的数列（1），（2），（3），（4）可以看到，那几个以A为极限的数列，所有项 x_n 都不等于A。

例如1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，…，$\frac{1}{n}$，……以0为极限；但各项的值都不是0。而数列2，2，2，…，2，……每个 x_n 的值都等于极限值2。这种各项都等于同一常量的数列也叫做常数列。

我们常常把数列有极限存在也称为数列是收敛的，如果以A为极限，就说收敛于A；而极限不存在的数列就叫做是发散的。

例 设 $x_n = (-1)^n$，即该数列为 -1，1，-1，1，$(-1)^n$，……。它跳跃地取 -1 与 1，因此容易直观地看出它不存极限，当然这也可以根据极限定义给予证明。

二、无穷小量与无穷大量

微积分理论，简单地说就是无穷小量的理论和计算方法。因此，无穷小量的理论在微积分初步中占有重要地位。下面我们简要地加以介绍。

无穷小量与无穷大量，不是用来表达量的大小，而是表达量的变化状态，因此它们是变量，而绝不是很大或很小的常量。

我们把极限为0的变量称为无穷小量，因此根据数列极限的定义，很自然得到无穷小量精确定义的陈述：**变量 x_n，如果对于任给的 $\varepsilon>0$，总能找到一个自然数N，使对于一切 $n>N$，有$|x_n|<\varepsilon$，则称此变量为无穷小量或无穷小。**

无穷小量有一个很重要的性质：即数列$\{x_n\}$的极限等于A，等价于数列$\{x_n-A\}$的极限为0，亦即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$等价于$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-A)=0$。例如：设$A_n$表示半径为$R$的圆的内接正$2^n$边形的面积，则当$n\to\infty$时，$A_n$无限的趋近圆面积$\pi R^2$，即

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\pi R^2.$$

另一方面，当$n\to\infty$时，圆的面积和内接正n边形面积之差πR^2-A，无限地接近于0，即有$\lim\limits_{n\to\infty}(\pi R^2$

$-A)=0$。这说明$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\pi R^2$等价于

$$\lim_{n\to\infty}(\pi R^2-A_n)=0.$$

例 8 证明 0 是无穷小量。

证明 数列$\{0\}$，即 0，0，0，0，…，0，……各项都小于任给$\varepsilon>0$，故据定义变量$x_n\equiv0$是一个无穷小量。而这个变量$x_n\equiv0$又可看成常量。因此常量 0 可以看作是无穷小量。

例 9 试证当$0<q<1$时，则$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$。

证明 对于任给$\varepsilon>0$，欲使$|q^n-0|<\varepsilon$，即$q^n<\varepsilon$，亦即$n\lg\varepsilon<\lg\varepsilon$，由此$n>\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg q}$（注意：$0<\varepsilon<1$，即有$\lg\varepsilon<0$）。取$N=\left[\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg q}\right]$，则当$n>N$即可使$|q^n-0|<\varepsilon$。于是

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0.$$

无穷大量定义：**对于数列$\{x_n\}$，若对任给的$M>0$，都能找到N，使得当$n>N$时，就有$|x_n|>M$，则称$\{x_n\}$是无穷大量，一般用$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$表示。**

例10 试证$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n^2=\infty$。

证明 任给$M>0$，取$N=[\sqrt{M}]$，当$n>N$时，就有$|(-1)^n n^2|>(\sqrt{M}^2)=M$，故$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n^2=\infty$。

无穷小量与无穷大量的简单关系：

若变量$\{x_n\}$为无穷大量，则$\{\frac{1}{x_n}\}$为无穷小量；反之，若$\{x_n\}$($x_n \neq 0$)为无穷小量，则$\{\frac{1}{x_n}\}$为无穷大量。

证明　设数列$\{x_n\}$为无穷大量，按定义，对于任给的正数ε，取$M=\frac{1}{\varepsilon}$，则有正整数N使得当$n>N$时，就有$|x_n|>M=\frac{1}{\varepsilon}$，即$\left|\frac{1}{x_n}\right|<\varepsilon$。这表明$\{\frac{1}{x_n}\}$是一个无穷小量。

反之，当数列$\{x_n\}$是一个无穷小量($x_n \neq 0$)时，对任给$M>0$，取$\varepsilon=\frac{1}{M}$，按无穷小量定义，就有自然数N，当$n>N$时，$|x_n|<\varepsilon=\frac{1}{M}$，即$\left|\frac{1}{x_n}\right|>M$。因而$\{\frac{1}{x_n}\}$是无穷大量。

例如　1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，…，$\frac{1}{n}$，……是无穷小量，从而1，2，3，…，n，……就是一个无穷大量。