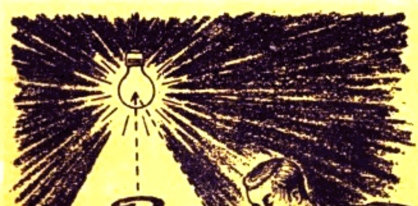
蘇聯青年科學叢書

簡易的極大極小問題

納湯松 著



中国青年出版社

蘇聯青年科學叢書

簡易的極大極小問題

納 湯 松 著
丁 壽 田 譯

中国青年出版社
一九五三年·北京

簡易的極大極小問題

內容提要　在生產過程和日常生活中，常常遇到一些有關經濟和效率的問題，就是要在無數可能的辦法之中求出一種效果最好的辦法。這類問題屬於極大極小問題，一般都得用高等數學才能解決。本書作者給我們介紹了兩個簡單的代數方程式，根據這兩個方程式的特殊性質，就可以解決許多極大極小問題。

原本說明　書　名　ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ
著　者　И. Н. Н ТАНСОН
出版者　ТЕХГИЗ
出版地點及日期　МОСКВА, 1951

書號352　數理化36　32開本　19千字　44定價頁

著　者　蘇聯　納　湯　松
譯　者　丁　壽　田
出版者　中國青年出版社
青年·開明聯合組織
北京東四12條老君堂11號
總經售　中國圖書發行公司
印刷者　京華第一印書館北京第二廠

印數12,001-22,000
每冊定價1,200元
一九五二年四月第一版
一九五二年八月第二版
一九五三年十月第三次印刷

譯者的話

蘇聯新出了一套'數學通俗講演'小册子，每種都是由很有學術地位的數學專家所寫成的．讀者對象以中學生及同等知識水準的工農大衆爲主，同時也可供中學教師作教學的參考．

這本'簡易的極大極小問題'就是該叢書中的一種．這裏面所講的是一些生產技術，及日常生活中常遇到的經濟問題與效率問題（例如木材的最經濟的利用及燈光的最有效的裝置等等）．所用的數學工具極爲簡單，只應用到下面這兩個式子：

$$y=ax^2+bx+c,$$

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}.$$

這一套數學通俗小册子的作風是很誠實的：不鼓吹，不賣弄，不東拉西扯，不曲解附會．表面看去沒有什麼誘惑性，但讀後可使人嘗到數學本身的滋味，並且得到實實在在的益處．通俗數學讀物的目的，本是要讓大家得點有用的數學知識，來解決若干實際問題；因此不應該一味避免數學而只以有趣的閒話來替代．趣味好比是作料，固然自有其輔助性的作用，但專喝白開水冲的味精醬油湯到底是沒有什麼大益處的．

丁壽田 一九五一年十月於北京

原　　序

在這本小册子裏講的是幾種解極大極小問題的初等方法,卽不用微分學知識的方法.

這本小册子是爲中學較高班的學生寫的,他們希望對高等數學中所討論的問題的本質得一點一般的概念. 這裏所講的東西也可以做中學數學討論小組的題材.

但是我覺得連高等工業學校、師範學院或大學的學生,甚至於專好鑽研數學解析的人,讀一讀這小册子也會有點益處. 事實是如此:微分學這種有力的工具固然可以用同一種一般的方法來解各色各樣性質的問題,只要在其中找出初等函數(或其有限的配合)的極端值就行了. 用這種方法完全不需要注意各問題的個別特質. 但是利用這些特質卻也的確常常可以把問題解得比用一般方法時要更簡單些,更敏捷些,並且更巧妙些. 這裏的情形正如同在算術問題中一樣,應用代數方程式這有力工具時固然可以不管問題的特質,但純算術的解法卻往往比代數解法更爲簡單,更爲敏捷,並且更爲巧妙.

這本小册子所應用的代數工具是很有限的. 爲了要使敘述儘量簡單,只用到二次三項式的一些最簡單的性質及一個關於算術平均數與幾何平均數的不等式. 讀者如果仍舊要用

初等數學的方法更進一步去了解極大極小問題，我可以介紹你去讀：И. Б. 亞別立松氏'極大極小'(蘇聯聯合科學技術出版局，1935)及 С. И. 斜傑立氏'極大極小問題'(蘇聯國家技術出版局，1948)等書.

И. П. 納湯松 一九四九，一二，一七

目　次

前　　言

在技術與自然科學裏，在生產與日常生活裏，我們可以遇到一種特殊類型的數學問題，就是所謂'極大極小問題'. 下面是幾個這種問題的例子：

(1) 要把一根圓柱形的木料鋸成截面是矩形的柱子，使得廢料儘量地少.

(2) 一批現成的板子，足夠建立 200 米長的圍牆，要用來圍成一塊矩形的空場. 問如何可使所圍的面積最大？

(3) 牆上高高地掛着一張畫（掛得比人高）. 問在離牆多遠的地方看去視角最大？

(4) 一盞裝着滑輪的電燈，對着圓桌的中心掛着. 問拉在離桌面多高地方時，可使桌邊照得最亮？

在一切這類問題裏，撇開其相異之點不論，我們可以找到這樣的共同之點：它們的論點都是要在無數可能利用的辦法之中求其效果最好的. 解這類問題的技能是多麼重要，自不待言. 在數學裏已創造了很有力的一般方法來解這類問題；這些方法在微分學裏面研究.

但是在許多情形，這種問題也可以不必引用複雜的微分學工具來解，而只要用一點簡單的初等代數就行了. 在這小

册子裏就是要講一些不必依靠高等數學的方法來解一些極大極小問題*. 固然,這些方法只能適用於個別的情形,但即使熟悉微分學的人知道一點也是有益處的.

一 一個關於二次三項式的基本定理

1. 我們來討論兩個變數 x 與 y, 其間以下面這等式聯系着:

$$y=2x^2+7 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

倘若我們設 $x=3$, 則可看出 $y=25$. 倘我們給 x 以別的數值,例如 $x=10$, 則得到 $y=207$. 一般地,我們可以隨意給 x 以任何數值;但當我們所選擇的這個數值一經取定以後,則 y 就要'自動地'取其相當的數值,因爲它被等式 (i) 所決定,已經不復依憑我們的自由意志了. 對這種數學上的情況,我們說: **y 是 x 的函數**. 這個數量 x 在此就叫做**自變數**.

現在我們提出這個問題: 在由等式 (i) 所定的函數 y 所取的一切數值中,是否有一個最大的呢? 很容易看出, **y 的數值中是沒有最大的**. 事實上,倘若自變數 x 取下面這些數值.

$$x_1=1,\ x_2=10,\ x_3=100,\ x_4=1000,\cdots\cdots,$$

則函數 y 的相應數值是

$$y_1=9,\ y_2=207,\ y_3=20007,\ y_4=2000007,\cdots\cdots,$$

由此可見, y 的最大數值是沒有的.

但如果我們問 y 的數值中是否有最小的,則得到完全相

* 也包括上面所說那四個問題.

反的一種答案。

事實上，如等式(i)所表示，函數 y 是 $2x^2$ 與 7 這樣兩項之和。其中第二項 7 是一個常數，與 x 的數值沒有聯系。至於第一項 $2x^2$，則它顯然對 x 的任何數值都不能成爲負的，卽不能小於零。可是要它等於零倒是可以做得到的，卽只要取 $x=0$ 就行了。如此，這第一項 $2x^2$ 以及總和 $2x^2+7$ 都在 $x_0=0$ * 時取得其最小值。這個最小值，或者說極小值，顯然就是 7，可以寫成 $$y_{min}=7.$$

以同樣的理由可以指明，這些函數

$$y=5x^2+3,\ y=9x^2+4,\ y=2x^2-5,\ y=3x^2-11$$

之中每個都具有類似的性質：最大的數值是沒有的，而最小的數值是有的，並且所有這四個函數都在 $x_0=0$ 時達到其最小值，卽各爲

$$y_{min}=3,\ \ y_{min}=4,\ \ y_{min}=-5,\ \ y_{min}=-11.$$

2. 上面所討論的例子都只是很簡單的。簡單的緣故是因爲 y 可以表示成兩項之和的形狀，其中一項是常數，而另一項是平方(帶着一個正的係數)，不會表示負的。

情形比較複雜的是這個例子：

$$y=2x^2-12x+93.$$

爲得要能應用前面那些概念，我們把 y 變成另一種形式：

$$y=2(x^2-6x)+93.$$

* 我們常用 x_0 表示自變數的那個與函數最小值相應的數值。

現在在括弧裏加上一個這樣的數，使得其中成一完全平方：

$$y=2(x^2-6x+9)+93-18,$$

或
$$y=2(x-3)^2+75.$$

現在我們能應用與前面同樣的論證了．事實上，函數 y 表成了兩項之和，其中一項，即 75，完全與 x 無關，而另一項，$2(x-3)^2$，決不會是負的，但當 $x=3$ 時可變成零．所以我們這函數在 $x=3$ 時達到其最小值 $y_{min}=75$.

至於我們這函數的最大值則不存在．這可以如此看出：例如設

$$x_1=13,\ x_2=103,\ x_3=1003,\cdots\cdots,$$

函數 y 的相應值為

$$y_1=275,\ y_2=20075,\ y_3=2000075,\cdots\cdots.$$

同樣可解這個例子：

$$y=3x^2+24x+50.$$

這裏我們把說明略去，直接寫出算式如下（因為根本是很明顯的）：

$$y=3(x^2+8x)+50,$$

$$y=3(x^2+8x+16)+50-48,$$

$$y=3(x+4)^2+2.$$

所以，函數 y 在 $x_0=-4$ 時取得最小值，並且這最小值是

$$y_{min}=2.$$

這裏再舉一個例子：

$$y=5x^2-50x+39.$$

在這例中，我們可算出

$$x_0=5,\ \ y_{min}=-86.$$

3. 不要以爲任何'二次三項式'（上面所討論的這種函數這樣稱呼）都有最小值而沒有最大值.

例如，這函數 $y=-3x^2+8$

顯然就有最大值，或者說極大值，卽

$$y_{max}=8,$$

此值可在 $x_0=0$ 時達到．但是最小值倒是沒有的．

同樣，函數 $y=-4x^2+40x-73$

也沒有最小值而有最大值，這可由下面的變化看出：

$$y=-4(x^2-10x)-73,$$

$$y=-4(x^2-10x+25)-73+100,$$

$$y=-4(x-5)^2+27,$$

由此在 $x_0=5$ 時得到 $y_{max}=27.$

4. 所以，有些二次三項式有最小值而沒有最大值，另一些則相反，有最大值而沒有最小值．留心的讀者或許已經看出，三項式的性質由其最高次項係數的符號來決定．爲得要嚴格地證實這一點，我們來討論這問題的一般形式．

設我們有一個二次三項式

$$y=ax^2+bx+c.$$

這裏各係數可以是任何實數，正數與負數並且甚至可以成零．但是最高次項係數 a 卻在任何情形都須不等於零，因爲不然

y 裏就不含 x^2 這一項而根本不成二次三項式了.

我們把 y 照下面這樣子變化一下:

$$y=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x\right)+c,$$

$$y=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}.$$

爲簡單起見,設 $$c-\frac{b^2}{4a}=M,$$

最後得 $$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+M.$$

特別要注意的是,這 M 是一個常數,完全由係數 a, b 與 c 來決定,與自變數 x 的數值毫無關係.

我們分兩種情形來討論.

(1) 若 $a>0$,則第一項 $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 永不會是負的,但是在

$$x_0=-\frac{b}{2a}$$

的時候變成零. 所以函數 y 有一最小值,等於 M, 即

$$y_{min}=M,$$

而沒有最大值.

(2) 若 $a<0$,則以同樣的理由,可以知道

$$y_{max}=M,$$

並且這數值可以在 $$x_0=-\frac{b}{2a}$$

時達到,而 y_{min} 是沒有的.

我們注意，一個函數的最小值與最大值同稱爲它的**極端值**（或'盡頭值'）. 所以上面所說的一切，可以總括成下面這個定理；這定理對我們是很基本的.

定理　一個二次三項式

$$y=ax^2+bx+c$$

在

$$\boxed{x_0=-\frac{b}{2a}}$$

時有一個極端值. 這 x_0 在 $a>0$ 時給出最小值，而在 $a<0$ 時給出最大值. 若 y_{max} 存在，則 y_{min} 不存在；反之，若 y_{min} 存在，則 y_{max} 不存在.

我們還要注意，由以上可見，這個極端值恆等於 M，可寫成

$$y_{extr}=M,$$

或寫詳細點，就是

$$y_{extr}=c-\frac{b^2}{4a}.$$

但是後面這個等式是**不必記住**的，因爲這根本就是我們這三項式在

$$x=x_0=-\frac{b}{2a}$$

時的數值.

這就是說，只要在三項式裏用

$$x_0=-\frac{b}{2a}$$

這個數替代 x, 就可以得到 y_{extr} 的數值了.

例: $y=3x^2-12x+8,\quad x_0=2,\quad y_{min}=-4;$

$y=-2x^2+8x-3,\quad x_0=2,\quad y_{max}=5;$

$y=2x^2+20x+17,\quad x_0=-5,\quad y_{min}=-33.$

二 基本定理的一些應用

5. 我們要來指明,在第 4 節裏證明的那個定理,可以解決許多各色各樣的具體問題.

問題 1. 分已知正數 A 爲兩部分,使其乘積爲最大.

解 以 x 表示所求的一部分,則第二部分應等於 $A-x$, 而其乘積爲

$$y=x(A-x),$$

或

$$y=-x^2+Ax.$$

如此,問題就變成要找能使這二次三項式取得最大值的那個 x 的數值了. 按第 4 節的定理,這個數值可以豫知其必存在(因爲這裏最高次項係數等於 -1, 是負的),並且等於

$$x_0=\frac{A}{2}.$$

這時候

$$A-x_0=\frac{A}{2},$$

所以兩部分應該彼此相等.

例如, 30 這個數可以這樣分法:

$30=5+25,\quad 5\times25=125;\quad 30=7+23,$

$7\times23=161;\quad 30=13+17,\quad 13\times17=221;$

$30=20+10$, $20\times 10=200$; $30=29+1$,

$29\times 1=29$; $30=30+0$, $30\times 0=0$.

所有這些乘積都小於 $15\times 15=225$.

6. 問題 2. 有一條鐵絲,其長爲 l. 現在要把它彎成一個矩形,使其所圍面積儘量地大.

解 設 x 代表矩形的一個邊(圖 1). 於是顯然它的另一個邊是 $\frac{l}{2}-x$, 而面積是

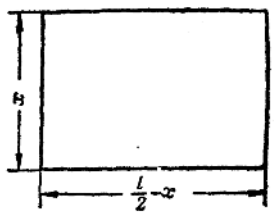


圖 1

$$S=x\left(\frac{l}{2}-x\right),$$

或 $$S=-x^2+\frac{l}{2}x.$$

這函數在 $$x_0=\frac{l}{4}$$

時取得其最大值,並且這 $\frac{l}{4}$ 也就是所求矩形的一邊的長. 於是它的另一邊是

$$\frac{l}{2}-x_0=\frac{l}{4},$$

這就是說我們所求的矩形是**正方形**. 這所得的解可用定理的形式寫出如下:

定理 在一切周長相等的矩形中,正方形的面積爲最大.

註 我們這問題借助問題 1 的結果來解也很容易. 事實上,我們知道所求的矩形的面積是

$$S=x\left(\frac{l}{2}-x\right).$$

換句話說，S 是兩個數 x 與 $\frac{l}{2}-x$ 的乘積。而這兩個數的和是

$$x+\left(\frac{l}{2}-x\right)=\frac{l}{2},$$

這個數是與 x 的選擇法無關的．這意思也就是，我們的問題成了要把 $\frac{l}{2}$ 這個數分爲兩部分，使得其乘積爲最大．但是我們知道，這乘積在兩部分相等時，亦即 $x=\frac{l}{4}$ 時爲最大．

7. 問題 3. 一批現成的板子可構成長 200 米的圍牆．現在要用這批板子來圈一塊矩形的園場，一邊利用一個工廠的牆．求所圍的最大面積．

解 設以 x 代表圍牆的一邊（圖 2）．於是它的另一邊等於 $200-2x$，而其面積爲

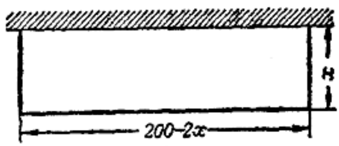


圖 2

$$S=x(200-2x),$$

或

$$S=-2x^2+200x.$$

按第 4 節的定理，這個函數在

$$x_0=50$$

時達到其最大值．

所以，與工廠的牆垂直的這兩邊圍牆應該各等於 50 米，因此平行的這邊是 100 米，即圍牆應該成半個正方形的形狀．

註 倘若我們要在此利用解問題 1 的結果，還不能直接