

面向 21 世纪高等学校电子 / 通信类专业规划教材  
电子科技大学“十五”规划精品教材

# 电磁场与电磁波

## DIANCICHANG YU DIANCIBO

杨显清 赵家升 王园 编著

国防工业出版社

National Defence Industry Press

<http://www.ndip.cn>

面向 21 世纪高等学校电子/通信类专业规划教材  
电子科技大学“十五”规划精品教材

# 电磁场与电磁波

杨显清 赵家升 王园 编著



国防工业出版社

·北京·

## 内 容 提 要

本书采用演绎法建立的公理化体系,即根据演绎推理的方法,按一般到特殊的顺序组织教材内容。

本书覆盖了电磁场与电磁波的基本内容,分为八章,即电磁场的数学物理基础、平面电磁波在无界均匀媒质中的传播、平面电磁波在分界面上的反射和透射、导行电磁波、传输线理论、电磁波的辐射与天线、静态电磁场、静态场边值问题的解法。在每节之后有紧密结合该节基本内容的练习题,每章之后选编了一些具有综合性的习题,书末附有阶段测试题,并给出了习题的参考答案。

本书可作为高等学校电子信息类专业作为“电磁场与电磁波”、“电磁场理论”、“电磁场与天线”等课程的教材或教学参考书,也可供相关科技人员阅读参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波 / 杨显清等编著. —北京:国防工业出版社, 2003.7

ISBN 7-118-03106-2

I. 电... II. 杨... III. ①电磁场②电磁波  
IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 011181 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

新艺印刷厂印刷

新华书店经售

\*

开本 787×1092 1/16 印张 24 550 千字

2003 年 7 月第 1 版 2003 年 7 月北京第 1 次印刷

印数:1—5000 册 定价:32.00 元

---

(本书如有印装错误,我社负责调换)

# 前 言

“电磁场与电磁波”是高等学校电子信息类及电气信息类专业本科生必修的一门技术基础课,它包含的内容是合格的电子、电气信息类专业本科生应具备的知识结构的重要组成部分。近代科学技术的发展过程表明,电磁场与电磁波基本理论又是一些交叉学科的生长点和新兴边缘学科发展的基础。因此,学好电磁场与电磁波课程不仅为学习专业课程准备了必须的基础知识,而且将对完善自身素质、增强适应能力和创造能力长久地发挥作用。

本书采用演绎法建立的公理化体系,即根据演绎推理的方法,按一般到特殊的顺序组织教材内容。一开始简要回顾了电磁学的一些基本物理量和基本定律,从而引出麦克斯韦方程组,紧接着讨论时变电磁场,进而讨论电磁波的传播与辐射特性,把静态电磁场作为时变电磁场的特殊情况来分析。这样处理有利于建立电磁场与电磁波的整体概念,同时,既与“大学物理”(电磁学部分)有较好的衔接,又避免了在内容上过多的重复。这种教材体系压缩了静态场,充实了时变电磁场与波的内容,符合电子信息类专业教学改革的需要。

在本书编写中,编者对以下几个方面予以关注:

(1)注重教材的基础性,突出电磁场与波的基本内容,期望学生牢固掌握基础知识和基本分析计算方法。

(2)注重电磁场与波的基本理论与工程应用的结合,在论述和举例中体现电磁场与波强烈的实践性。

(3)精选例题和习题。“解题难”一直是学生学习电磁场课程的难点所在,针对这一特点,本书编入了相当数量的例题。这些例题突出解题思路的分析,将会对学生拓宽解题思路、增强应用基本理论分析和解决问题的能力有所帮助。在每节之后有紧密结合该节基本内容的练习题,每章之后选编了一些具有综合性的习题,书末给出了习题的参考答案。

(4)对传统电磁场与波教材的一些内容进行必要的删减。例如传输线理论中的圆图,由于计算机技术的发展和应用,完全可以通过计算机来准确求解传输线问题,故本书删去了“圆图”。

本书共八章,即电磁场的数学物理基础、平面电磁波在无界均匀媒质中的传播、平面电磁波在分界面上的反射和透射、导行电磁波、传输线理论、电磁波的辐射与天线、静态电磁场、静态场边值问题的解法。

本书的第一、七、八章由杨显清编写,第二、三、六章由赵家升编写,第四、五章由王园编写。本书的编写融入了编著者长期从事电磁场与电磁波课程教学和进行教学研究的经验,以及长期进行电磁场与波应用的科研实践体会,也吸取了全国高等学校电磁场教学与

#### IV

教材研究会学术年会交流的经验。本书的编写得到电子科技大学电子工程学院、微波工程系以及电磁场课程教学小组同仁的支持,编者表示谢意。

限于编者的学识水平和能力,书中不妥或错误之处,敬请读者指正。

编 者

2002 年 10 月

于电子科技大学

# 目 录

|                      |    |
|----------------------|----|
| 第一章 电磁场的数学物理基础       | 1  |
| 1.1 矢量分析与场论基础        | 1  |
| 1.1.1 标量场的梯度         | 2  |
| 1.1.2 矢量场的散度         | 4  |
| 1.1.3 矢量场的旋度         | 7  |
| 1.1.4 拉普拉斯运算         | 10 |
| 1.1.5 亥姆霍兹定理         | 10 |
| 练习题                  | 12 |
| 1.2 电磁场的源量——电荷与电流    | 13 |
| 1.2.1 电荷与电荷密度        | 13 |
| 1.2.2 电流与电流密度        | 14 |
| 1.2.3 电荷守恒定律与电流连续性方程 | 15 |
| 练习题                  | 16 |
| 1.3 电场强度与磁感应强度       | 16 |
| 1.3.1 电场强度           | 16 |
| 1.3.2 磁感应强度          | 19 |
| 练习题                  | 21 |
| 1.4 电磁场中媒质的电磁特性      | 22 |
| 1.4.1 介质的极化·电位移矢量    | 22 |
| 1.4.2 磁介质的磁化·磁场强度矢量  | 24 |
| 1.4.3 导电媒质的传导特性      | 26 |
| 练习题                  | 27 |
| 1.5 静态场的基本规律         | 27 |
| 1.5.1 静电场的基本规律       | 28 |
| 1.5.2 静磁场的基本规律       | 29 |
| 练习题                  | 31 |
| 1.6 电磁感应定律和位移电流      | 31 |
| 1.6.1 电磁感应定律         | 31 |
| 1.6.2 位移电流           | 33 |
| 练习题                  | 35 |
| 1.7 麦克斯韦方程组          | 35 |
| 1.7.1 麦克斯韦方程组的微分形式   | 35 |

|                                   |           |
|-----------------------------------|-----------|
| 1.7.2 麦克斯韦方程组的积分形式 .....          | 37        |
| 1.7.3 麦克斯韦方程组的复数形式 .....          | 37        |
| 练习题 .....                         | 39        |
| 1.8 电磁场的边界条件 .....                | 39        |
| 1.8.1 边界条件的一般形式 .....             | 40        |
| 1.8.2 理想导体表面上的边界条件 .....          | 41        |
| 练习题 .....                         | 43        |
| 1.9 电磁能量守恒定律 .....                | 43        |
| 1.9.1 坡印廷定理和坡印廷矢量 .....           | 44        |
| 1.9.2 正弦电磁场的平均坡印廷矢量 .....         | 45        |
| 练习题 .....                         | 46        |
| 习 题 .....                         | 47        |
| <b>第二章 平面电磁波在无界媒质中的传播</b> .....   | <b>53</b> |
| 2.1 波动方程 .....                    | 53        |
| 练习题 .....                         | 54        |
| 2.2 非导电媒质中的均匀平面波 .....            | 54        |
| 2.2.1 一维波动方程的解 .....              | 54        |
| 2.2.2 均匀平面波的传播特性 .....            | 56        |
| 2.2.3 沿任意方向传播的均匀平面波 .....         | 61        |
| 练习题 .....                         | 63        |
| 2.3 导电媒质中的均匀平面波 .....             | 63        |
| 2.3.1 导电媒质中的波动方程及其解 .....         | 63        |
| 2.3.2 良导体中的波 .....                | 67        |
| 2.3.3 低损耗媒质中的波 .....              | 69        |
| 2.3.4 色散现象和群速 .....               | 72        |
| 练习题 .....                         | 74        |
| 2.4 波的极化 .....                    | 74        |
| 2.4.1 线极化 .....                   | 74        |
| 2.4.2 圆极化 .....                   | 75        |
| 2.4.3 椭圆极化 .....                  | 76        |
| 练习题 .....                         | 79        |
| 2.5 各向异性媒质中的平面波 .....             | 79        |
| 2.5.1 等离子体中的平面波 .....             | 79        |
| 2.5.2 铁氧体中的平面波 .....              | 83        |
| 练习题 .....                         | 85        |
| 习 题 .....                         | 86        |
| <b>第三章 平面电磁波在分界面上的反射和透射</b> ..... | <b>89</b> |

|                              |            |
|------------------------------|------------|
| 3.1 均匀平面波对分界面的垂直入射 .....     | 89         |
| 3.1.1 完纯介质与完纯导体的分界面 .....    | 89         |
| 3.1.2 完纯介质与完纯介质的分界面 .....    | 93         |
| 3.1.3 一般导体与一般导体的分界面 .....    | 98         |
| 练习题 .....                    | 103        |
| 3.2 均匀平面波对多层媒质分界面的垂直入射 ..... | 104        |
| 3.2.1 多层媒质的场量关系和等效波阻抗 .....  | 104        |
| 3.2.2 两个有重要意义的特例 .....       | 106        |
| 练习题 .....                    | 109        |
| 3.3 均匀平面波对分界面的斜入射 .....      | 109        |
| 3.3.1 垂直极化波对完纯介质表面的斜入射 ..... | 110        |
| 3.3.2 平行极化波对完纯介质表面的斜入射 ..... | 114        |
| 3.3.3 全反射和临界角 .....          | 116        |
| 3.3.4 全透射和布儒斯特角 .....        | 119        |
| 3.3.5 垂直极化波对完纯导体表面的斜入射 ..... | 121        |
| 3.3.6 平行极化波对完纯导体表面的斜入射 ..... | 124        |
| 练习题 .....                    | 126        |
| 习 题 .....                    | 127        |
| <b>第四章 导行电磁波 .....</b>       | <b>131</b> |
| 4.1 均匀波导的一般特性 .....          | 132        |
| 4.1.1 横向场分量与纵向场分量的关系 .....   | 132        |
| 4.1.2 TEM 波 .....            | 134        |
| 4.1.3 TM 波 .....             | 135        |
| 4.1.4 TE 波 .....             | 138        |
| 练习题 .....                    | 141        |
| 4.2 矩形波导 .....               | 141        |
| 4.2.1 矩形波导中的 TM 波 .....      | 142        |
| 4.2.2 矩形波导中的 TE 波 .....      | 147        |
| 4.2.3 矩形波导中的主模 .....         | 151        |
| 练习题 .....                    | 157        |
| 4.3 圆柱形波导 .....              | 158        |
| 4.3.1 纵向场分量与横向场分量的关系 .....   | 158        |
| 4.3.2 圆柱形波导中的 TM 波 .....     | 159        |
| 4.3.3 圆柱形波导中的 TE 波 .....     | 162        |
| 4.3.4 圆柱形波导中波的传播特性 .....     | 163        |
| 4.3.5 圆柱形波导中的几个主要模式 .....    | 165        |
| 练习题 .....                    | 168        |
| 4.4 同轴波导 .....               | 168        |



|            |                      |            |
|------------|----------------------|------------|
| 4.4.1      | 同轴波导中的 TEM 波 .....   | 169        |
| 4.4.2      | 同轴波导中的 TM 波 .....    | 171        |
| 4.4.3      | 同轴波导中的 TE 波 .....    | 173        |
|            | 练习题 .....            | 175        |
| 4.5        | 微波谐振器 .....          | 175        |
| 4.5.1      | 矩形谐振腔 .....          | 176        |
| 4.5.2      | 圆柱形谐振腔 .....         | 182        |
|            | 练习题 .....            | 185        |
| 习 题        | .....                | 185        |
| <b>第五章</b> | <b>传输线理论</b> .....   | <b>187</b> |
| 5.1        | 传输线方程 .....          | 187        |
| 5.1.1      | 传输线中“场”与“路”的关系 ..... | 187        |
| 5.1.2      | 等效电路及传输线方程 .....     | 189        |
| 5.1.3      | 传输线方程的解 .....        | 190        |
|            | 练习题 .....            | 193        |
| 5.2        | 电压波和电流波的传输特性参数 ..... | 193        |
| 5.2.1      | 传播常数 .....           | 193        |
| 5.2.2      | 相速度 .....            | 194        |
| 5.2.3      | 特性阻抗 .....           | 194        |
|            | 练习题 .....            | 195        |
| 5.3        | 传输线的阻抗 .....         | 195        |
| 5.3.1      | 定义 .....             | 195        |
| 5.3.2      | 几种特殊情况下的输入阻抗 .....   | 196        |
|            | 练习题 .....            | 200        |
| 5.4        | 传输线的反射系数 .....       | 200        |
| 5.4.1      | 定义 .....             | 200        |
| 5.4.2      | 反射系数与电压、电流的关系 .....  | 202        |
| 5.4.3      | 反射系数与输入阻抗的关系 .....   | 202        |
| 5.4.4      | 反射系数与负载阻抗的关系 .....   | 202        |
|            | 练习题 .....            | 203        |
| 5.5        | 传输线的工作状态 .....       | 204        |
| 5.5.1      | 行波状态 .....           | 204        |
| 5.5.2      | 驻波状态 .....           | 205        |
| 5.5.3      | 行驻波状态 .....          | 207        |
|            | 练习题 .....            | 212        |
| 5.6        | 传输功率与效率 .....        | 213        |
| 5.6.1      | 传输功率的计算 .....        | 213        |
| 5.6.2      | 传输线的功率容量 .....       | 214        |

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| 5.6.3 传输线的传输效率 .....          | 214 |
| 练习题 .....                     | 217 |
| 5.7 传输线的阻抗匹配 .....            | 217 |
| 5.7.1 $\lambda/4$ 阻抗变换器 ..... | 217 |
| 5.7.2 单短截线匹配器 .....           | 219 |
| 练习题 .....                     | 223 |
| 5.8 传输线谐振器 .....              | 224 |
| 练习题 .....                     | 225 |
| 习 题 .....                     | 226 |
| <b>第六章 电磁波的辐射与天线</b> .....    | 228 |
| 6.1 矢量位函数和标量位函数 .....         | 228 |
| 6.1.1 矢量位和标量位的波动方程 .....      | 228 |
| 6.1.2 滞后位 .....               | 230 |
| 练习题 .....                     | 231 |
| 6.2 电偶极子的辐射 .....             | 231 |
| 6.2.1 电偶极子的电磁场 .....          | 232 |
| 6.2.2 近区场和远区场 .....           | 233 |
| 练习题 .....                     | 236 |
| 6.3 磁偶极子的辐射 .....             | 236 |
| 6.3.1 磁偶极子的电磁场 .....          | 236 |
| 6.3.2 近区场和远区场 .....           | 238 |
| 练习题 .....                     | 239 |
| 6.4 天线的电参数 .....              | 239 |
| 6.4.1 辐射方向图 .....             | 239 |
| 6.4.2 辐射效率 .....              | 243 |
| 6.4.3 增益系数 .....              | 243 |
| 6.4.4 输入阻抗 .....              | 244 |
| 6.4.5 有效长度 .....              | 244 |
| 6.4.6 极化特性 .....              | 245 |
| 6.4.7 频带宽度 .....              | 245 |
| 练习题 .....                     | 245 |
| 6.5 线形天线 .....                | 245 |
| 6.5.1 对称振子天线 .....            | 245 |
| 6.5.2 阵列天线 .....              | 249 |
| 6.5.3 单极天线 .....              | 254 |
| 6.5.4 引向天线 .....              | 257 |
| 6.5.5 螺旋天线 .....              | 261 |

|            |                      |     |
|------------|----------------------|-----|
| 6.5.6      | 对数周期天线 .....         | 264 |
| 6.5.7      | 平衡—不平衡变换器 .....      | 266 |
|            | 练习题 .....            | 268 |
| 6.6        | 面形天线 .....           | 268 |
| 6.6.1      | 分析面形天线辐射场的方法 .....   | 268 |
| 6.6.2      | 旋转抛物面天线 .....        | 269 |
| 6.6.3      | 卡塞格伦天线 .....         | 270 |
|            | 练习题 .....            | 271 |
| 习 题        | .....                | 271 |
| <b>第七章</b> | <b>静态电磁场</b> .....   | 272 |
| 7.1        | 静电场的标量电位 .....       | 272 |
| 7.1.1      | 静电位的微分方程 .....       | 272 |
| 7.1.2      | 电位差 .....            | 273 |
| 7.1.3      | 静电位的边界条件 .....       | 274 |
|            | 练习题 .....            | 276 |
| 7.2        | 恒定电场及其电位函数 .....     | 277 |
| 7.2.1      | 恒定电场的基本方程 .....      | 277 |
| 7.2.2      | 恒定电场的边界条件 .....      | 278 |
|            | 练习题 .....            | 280 |
| 7.3        | 恒定磁场的矢量位和标量位 .....   | 280 |
| 7.3.1      | 恒定磁场的矢量位 .....       | 280 |
| 7.3.2*     | 静磁场的标量磁位及其微分方程 ..... | 284 |
|            | 练习题 .....            | 285 |
| 7.4        | 电容与部分电容 .....        | 286 |
| 7.4.1      | 电容 .....             | 286 |
| 7.4.2      | 电介质击穿 .....          | 287 |
| 7.4.3*     | 部分电容 .....           | 288 |
| 7.4.4      | 静电屏蔽 .....           | 291 |
|            | 练习题 .....            | 291 |
| 7.5        | 电阻 .....             | 292 |
| 7.5.1      | 电阻 .....             | 292 |
| 7.5.2      | 接地电阻 .....           | 293 |
| 7.5.3      | 电阻率法测井 .....         | 294 |
|            | 练习题 .....            | 295 |
| 7.6        | 电感 .....             | 295 |
| 7.6.1      | 自感 .....             | 295 |
| 7.6.2      | 互感 .....             | 297 |
| 7.6.3      | 纽曼公式 .....           | 298 |

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| 练习题 .....                 | 300 |
| 7.7 静电能量和静电力 .....        | 300 |
| 7.7.1 静电场能量 .....         | 300 |
| 7.7.2 静电力 .....           | 303 |
| 练习题 .....                 | 305 |
| 7.8 磁场能量与磁场力 .....        | 305 |
| 7.8.1 磁场的能量 .....         | 305 |
| 7.8.2 磁场力 .....           | 307 |
| 练习题 .....                 | 309 |
| 习 题 .....                 | 310 |
| <br>第八章 静态场边值问题的解法 .....  | 315 |
| 8.1 边值问题的惟一性定理 .....      | 315 |
| 8.1.1 边值问题的类型 .....       | 315 |
| 8.1.2 惟一性定理 .....         | 316 |
| 练习题 .....                 | 317 |
| 8.2 分离变量法 .....           | 317 |
| 8.2.1 直角坐标系中的分离变量法 .....  | 317 |
| 8.2.2 圆柱面坐标系中的分离变量法 ..... | 320 |
| 8.2.3 球面坐标系中的分离变量法 .....  | 324 |
| 练习题 .....                 | 326 |
| 8.3 镜像法 .....             | 327 |
| 8.3.1 导体平面的镜像 .....       | 327 |
| 8.3.2 导体球面镜像 .....        | 330 |
| 8.3.3 导体圆柱面镜像 .....       | 333 |
| 8.3.4 介质平面的镜像 .....       | 336 |
| 练习题 .....                 | 338 |
| 8.4 有限差分法 .....           | 338 |
| 8.4.1 有限差分方程 .....        | 338 |
| 8.4.2 差分方程的求解方法 .....     | 340 |
| 练习题 .....                 | 341 |
| 8.5 有限元法 .....            | 341 |
| 8.5.1 泛函极值问题的构成 .....     | 342 |
| 8.5.2 场域的剖分与插值 .....      | 342 |
| 8.5.3 变分问题的离散化 .....      | 343 |
| 练习题 .....                 | 344 |
| 8.6 矩量法 .....             | 345 |
| 练习题 .....                 | 347 |
| 习 题 .....                 | 347 |

## 附录

|             |                 |     |
|-------------|-----------------|-----|
| 附录一         | 常用正交坐标系 .....   | 351 |
| 附录二         | 重要的矢量公式 .....   | 353 |
| 附录三         | 部分材料的电磁参数 ..... | 354 |
| 习题答案 .....  |                 | 356 |
| 阶段测验题 ..... |                 | 369 |

# 第一章 电磁场的数学物理基础

电磁现象是广泛存在的,其中一些来源于自然界,例如闪电、星体辐射等。另一些则是由人为方式产生的,例如无线电波、激光、电器开关火花等。麦克斯韦于1864年在对宏观电磁现象的实验规律进行分析总结的基础上,经过扩充和推广总结出了麦克斯韦方程组。麦克斯韦方程组的建立是对电磁理论的重大贡献,是物理学上的一个伟大的成就,为现代电磁理论奠定了基础。麦克斯韦方程组揭示了电磁场与电荷、电流之间,电场与磁场之间的相互作用和联系,是一切宏观电磁现象所遵循的普遍规律。所以,它是电磁场的基本方程,是现代电磁理论的核心和精髓,是分析研究电磁场问题的基本出发点。

本章将首先对矢量分析进行简要讨论,它是研究电磁理论的重要数学工具,然后介绍电磁场中的一些基本物理量和媒质的电磁特性,从静电、静磁和电磁感应等现象的基本规律出发,建立麦克斯韦方程,并对麦克斯韦方程组的意义和内涵进行详细的讨论。在本章中,还介绍了求解电磁场问题必不可少的电磁场边界条件,讨论了反映电磁场中能量守恒与转换关系的坡印廷定理。

本章的主要目的在于让读者首先从整体上了解并掌握电磁理论的核心内容,为分析研究电磁场问题打下良好的基础。

## 1.1 矢量分析与场论基础

在电磁理论中,我们要研究某些物理量(如电位、电场强度、磁场强度等)在空间的分布和变化规律。为此,引入了场的概念。如果每一时刻,一个物理量在空间中的每一点都有一个确定的值,则称在此空间中确定了该物理量的场。

标量场:若所研究的物理量是一个标量,则称该物理量的场为标量场,例如:温度场、密度场、电位场;

矢量场:若所研究的物理量是一个矢量,则称该物理量的场为矢量场,例如:力场、速度场、电场。

若物理量不随时间变化,则称该物理量所确定的场为静态场;反之,则称为动态场或时变场。

电磁场是分布在三维空间的矢量场,矢量分析是研究电磁场在空间的分布和变化规律的基本数学工具之一。标量场在空间的变化规律由其梯度来描述,而矢量场在空间的变化规律则通过场的散度和旋度来描述。下面将着重讨论标量场的梯度、矢量场的散度和旋度的概念及其运算规律。

### 1.1.1 标量场的梯度

#### 1. 等值面

一个标量场  $u$  可以用一个标量函数来表示。在直角坐标系中,可表示为

$$u = u(x, y, z) \quad (1.1.1)$$

在标量场中,为了形象直观地描述物理量在空间的分布状况,常常要考察场中物理量取得相同值的点,引入了等值面的概念。在标量场中,使标量函数  $u(x, y, z)$  取得相同数值的点构成一个空间曲面,称为标量场的等值面。例如,在温度场中,由温度相同的点构成等温面;在电位场中,由电位相同的点构成等位面。

对任意给定的常数  $C$ , 方程

$$u(x, y, z) = C \quad (1.1.2)$$

就是等位面方程。常数  $C$  取一系列不同的值,就得到一系列不同的等值面,形成等值面族(见图 1-1)。等值面族充满整个场空间,且不同的等值面互不相交。

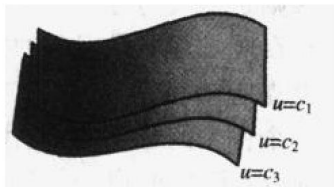


图 1-1 等值面

#### 2. 方向导数

标量场  $u(x, y, z)$  的等值面只描述了场量  $u$  的分布状况,而研究标量场的另一个重要方面,就是要研究标量场  $u(x, y, z)$  在空间任一点的邻域内沿各个方向的变化规律。为此,引入了标量场的方向导数和梯度的概念。

设  $M_0$  为标量场  $u(M)$  中的一点,从点  $M_0$  出发引一条射线  $l$ , 点  $M$  是射线  $l$  上的动点,到点  $M_0$  距离为  $\Delta l$ , 则标量场  $u(M)$  在点  $M_0$  处沿方向  $e_l$  ( $e_l$  是射线的单位矢量) 的方向导数为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l} \quad (1.1.3)$$

在直角坐标系中,设  $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$  是  $e_l$  方向的方向余弦,即

$$\cos\alpha = \frac{dx}{dl}, \cos\beta = \frac{dy}{dl}, \cos\gamma = \frac{dz}{dl}$$

根据复合函数求导法则,容易得到直角坐标系中方向导数的计算公式为

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \quad (1.1.4)$$

方向导数具有以下性质:

(1) 方向导数  $\frac{\partial u}{\partial l}$  是标量场  $u(M)$  在点  $M_0$  处沿方向  $e_l$  对距离的变化率。当  $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$  时,标量场  $u(M)$  沿  $e_l$  方向是增加的;当  $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$  时,标量场  $u(M)$  沿  $e_l$  方向是减小的;当  $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$  时,标量场  $u(M)$  沿  $e_l$  方向无变化。

(2) 方向导数值既与点  $M_0$  有关,也与  $e_l$  方向有关。因此,标量场中,在一个给定点  $M_0$  处沿不同方向  $e_l$ , 其方向导数的值一般是不同的。

### 3. 梯度

在标量场中,从一个给定点出发有无穷多个方向。一般说来,标量场在同一点  $M$  处沿不同方向上的变化率是不同的,在某个方向上,变化率可能最大。那么标量场在什么方向上的变化率最大、其最大的变化率又是多少? 为了描述这个问题,引入了梯度的概念。

标量场  $u$  在点  $M$  处的梯度记作  $\text{grad} u$ , 它是一个矢量,其方向为标量场  $u$  变化率最大的方向、大小则等于其最大变化率,即

$$\text{grad} u = e_l \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{\max} \quad (1.1.5)$$

在直角坐标系中,由方向导数的计算公式(1.1.4),可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma = \\ &= \left( e_x \frac{\partial u}{\partial x} + e_y \frac{\partial u}{\partial y} + e_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot (e_x \cos \alpha + e_y \cos \beta + e_z \cos \gamma) = \\ &= G \cdot e_l = |G| \cos(G, e_l) \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

式中,  $G = e_x \frac{\partial u}{\partial x} + e_y \frac{\partial u}{\partial y} + e_z \frac{\partial u}{\partial z}$  是与方向  $e_l$  无关的矢量。从式(1.1.6)可以看出,当方向  $e_l$  与矢量  $G$  的方向一致时,方向导数的值最大,且等于矢量  $G$  的模  $|G|$ 。根据梯度的定义,可得到直角坐标系中梯度的表达式为

$$\text{grad} u = e_x \frac{\partial u}{\partial x} + e_y \frac{\partial u}{\partial y} + e_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.1.7)$$

标量场的梯度具有以下性质:

- (1) 标量场  $u(M)$  的梯度是一个矢量场,通常称  $\text{grad} u$  为标量场  $u$  所产生的梯度场。
- (2) 标量场  $u(M)$  中,在给定点处沿任意方向  $e_l$  的方向导数等于梯度在该方向上的投影。
- (3) 标量场  $u(M)$  中每一点  $M$  处的梯度,垂直于过该点的等值面,且指向  $u(M)$  增加的方向。

在矢量分析中,经常使用那勃勒算符  $\nabla$  (读作“del”或“Nabla”)。 $\nabla$  是一个矢量微分运算符。

在直角坐标系中,有

$$\nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.1.8)$$

因此,标量场  $u$  的梯度通常用那勃勒算符  $\nabla$  表示为

$$\text{grad} u = \left( e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \nabla u \quad (1.1.9)$$

也就是说,可以把标量场  $u$  的梯度看作是算符  $\nabla$  作用于标量函数  $u$  的运算。

梯度在圆柱面坐标系和球面坐标系中的表达式要复杂一些。

在圆柱面坐标系  $(\rho, \phi, z)$  中,有

$$\nabla u = e_\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + e_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi} + e_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.1.10)$$



在球面坐标系 $(r, \theta, \phi)$ 中,有

$$\nabla u = \mathbf{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \quad (1.1.11)$$

**例 1.1** 设点电荷  $q$  位于坐标原点,在周围空间任一点  $M(x, y, z)$  处产生的电位为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$$

式中,  $\epsilon$  为介电常数,  $\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ , 试求电位  $\varphi$  的梯度。

**解:** 根据球面坐标系的梯度运算公式(1.1.11),得

$$\begin{aligned} \nabla \varphi &= \nabla \left( \frac{q}{4\pi\epsilon r} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = \\ &\mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) = -\mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon r^3} \mathbf{r} \end{aligned}$$

而点电荷  $q$  产生的电场强度  $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^3} \mathbf{r}$ , 故有

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

这表明,静电场中的电场强度等于电位梯度的负值。

### 1.1.2 矢量场的散度

为了研究矢量场的空间变化规律,引入了矢量场的散度和旋度的概念。本小节讨论矢量场的散度,而矢量场的旋度则在下一小节讨论。

#### 1. 矢量线

在矢量场中,各点的场量是随空间位置变化的矢量。因此,一个矢量场  $\mathbf{F}$  可以用一个矢量函数来表示。在直角坐标系中可表示为

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{e}_x F_x(x, y, z) + \mathbf{e}_y F_y(x, y, z) + \mathbf{e}_z F_z(x, y, z) \quad (1.1.12)$$

式中,  $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$  和  $\mathbf{e}_z$  分别是沿  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向的单位矢量;  $F_x(x, y, z)$ 、 $F_y(x, y, z)$  和  $F_z(x, y, z)$  是  $\mathbf{F}(x, y, z)$  的三个分量。

在矢量场中,为了形象直观地描述矢量在空间的分布状况,引入了矢量线的概念。矢量线是一条空间曲线,在它上面每一点的场矢量都与其相切,并且用箭头来表示矢量线的正方向(见图 1-2)。例如,静电场中的电力线、磁场中的磁力线等,都是矢量线的例子。一般地,矢量场中的每一点都有矢量线通过,所以矢量线也充满矢量场所在的空间。

根据矢量线的概念可知,矢量线满足的方程为

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{F} = 0 \quad (1.1.13)$$

式中,  $d\mathbf{l}$  是矢量线的长度元矢量。

#### 2. 矢量场的通量

如图 1-3 所示,  $S$  为一有向曲面,其正侧的单位法线矢量为  $\mathbf{n}$ , 则矢量场  $\mathbf{F}$  在曲面  $S$  上的积分

$$\psi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.1.14)$$