微积分学

第二分册

（初稿）

杨从仁编

高等教育出版社

本書是为天津市广播函授大学机械、电机、化工、冶金四个系的学員們所写的教材，全書共有六章：第一章作为学习微积分学的准备，講授了极限概念及其运算，第二章講述代数函数的微分法以及微分学的各种应用，如計算变化率、描繪曲綫法、极值研究等；第三章講述指数函数、对数函数及三角函数的微分法；第四章講述不定积分及其計算；第五章，不定积分的各种应用；第六章，复变函数的微分法、积分法及其应用。

本書可作为业余学校的教材及具有中等以上文化程度讀者的自修参考書。

微 积 分 学

第二分册

（初 稿）

楊从仁 編

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市書刊出版业营业許可証出字第054号）

人民教育印刷厂印装 新华书店发行

統一书号13010·699 开本 850×1168 1/32 印张 2 7/16

字数59,000 印数9,001—14,000 定价(6) ¥0.22

1960年1月第1版 1960年1月北京第2次印刷

目　录

第二章　一个变量的函数的微分法

§ 1. 变量的变化率・切綫的斜率……39

§ 2. 导数及求导数的一般法则……45

§ 3. 求导数的基本公式……51

§ 4. 曲綫的切綫与法綫……65

§ 5. 利用导数研究函数的变化，函数的极大值与极小值……72

§ 6. 高阶导数及其应用……86

§ 7. 微分……102

第二章　一个变量的函数的微分法

§1. 变量的变化率·切綫的斜率

1.1 設有一个变量 u（例如大气压力、电流强度、室内溫度等），它随着时間的前进而不断地变化着。若时間由 t_1 增至 t_2，这个量由 u_1 变化到 u_2。依照普通的說法，这个量在单位时間內（譬如在一小时或一分鐘內）的量的变化大小可用商 $\frac{u_2-u_1}{t_2-t_1}$ 来表示。我們把这个商，或者說这个比値，叫做量 u 在这一段时間 t_2-t_1 內的平均变化率。

例如，設某一車間的溫度从上午 9 点到 11 点由 $40°$ 增至 $70°$，那么在这两小时內溫度的平均变化率是

$$\frac{u_2-u_1}{t_2-t_1}=\frac{70-40}{11-9}=\frac{30}{2}=15,$$

即是說，它的平均变化率是每一点鐘上升 $15°$，或者說，每分鐘上升 $0.25°$。由这个例子我們知道，平均变化率的意思是說，在上午 9 点的时候若 $40°$ 的溫度按照每分鐘上升 $0.25°$ 这一相等的变化率变化时，那么在上午 11 时它的溫度是 $70°$。变化的最初溫度（即 $40°$）及最后溫度（即 $70°$）都正确地由平均变化率表达出来。但是在一个中間时刻的溫度，例如在 10 点的溫度一般說来就不能由平均变化率表达出来，因为溫度的变化一般并不是按照每分鐘都上升 $0.25°$ 这个相等的变化率在变化着的。例如在 9 点 55 分室內溫度可能已上升至 $80°$，这时忽然将室內暖气停止开放，而溫度在此后5分鐘內稳定下来保持不变，由 10 点到 11 点再由 $80°$ 降至 $70°$。所以在 10 点整的溫度是 $80°$ 而且此后的溫度不仅不上升而且是开始下降。但是若按每分鐘都相等的增加 $0.25°$ 来計算，那

么在 10 点整的溫度应該是 $40^\circ+15^\circ=55^\circ$。

要求在变化过程中每一时刻的溫度正是我們的目的。从上面的例子看得很清楚，平均变化率只能表达变化过程中最初的状态及最后的状态，为了表达中間时刻的状态(例如 10 点的溫度)就必須縮短平均变化率的时間，就是說，愈縮短变化的时間，平均变化率就能愈精确地表达眞正的变化状态。在上面这个例子，我們說，“由上午 9 点到 11 点溫度的平均变化率是每分鐘上升 0.25°”，就不如說，“由 9 点到 10 点溫度的平均变化率是每分鐘上升 0.66°”那样更精确地表示这个变化状态。

照上面所說的，变化过程中的时間愈縮短，平均变化率就能愈精确表示变化状态。因此我們得出在时刻 t 的变化率这一有用定义。依照第一章所采用的記号，把 t_2-t_1 記成 Δt, u_2-u_1 記成 Δu, 換句話說，在 Δt 这一段时間內的平均变化率就是增量 Δu 与增量 Δt 的比值

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

令 Δt 无限制地縮短(但不能令它等于零，因为零不能作除数)，我們就得到极限值

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

此后我們就把这个极限值叫做溫度 u 在时刻 t 的变化率。它就能很精确地代表溫度 u 在任一时刻 t 的变化状态。

由上面所說，我們得出变化率的定义如下。

定义 **函数 $y=f(x)$ 的增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 对于自变量 x 的增量的比当 Δx 趋于零时的極限值 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 叫做函数 y 在給定的 x 处的变化率。**

若自变量 x 代表时間 t, 函数 y 代表物体运动时所經过的距离

s, 那么变化率 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 就叫做物体在时刻 t 的速度。

根据上述，研究变量的变化状态时，极限值 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 就有很重要的意义。

例. 設物体开始由 0 点降落（在 0 点开始降落的时刻算做零秒），經过时刻 t 秒后到达 M 点（图 11）。由物理学知道，它落下的距离 $s=OM$ 可由下式表达：

$$s=\frac{1}{2}gt^2. \qquad (1)$$

我們来求运动开始后一秒末的速度及三秒末的速度。

解：在指定的时刻 t 給以增量 Δt, 到了时刻 $t+\Delta t$, 物体到达 M' 点。用 Δs 表示对应于 Δt 所产生的路途的增量 MM', 那么在公式(1)中以 $\Delta t+t$ 代 t 时，可得对应的 s 的值为 $s+\Delta s$, 即是說

图 11.

$$s+\Delta s=\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2,$$

或将 $s+\Delta s$ 計算出来，便得

$$s+\Delta s=\frac{1}{2}gt^2+\frac{1}{2}g\cdot 2t\cdot\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2, \qquad (2)$$

由(2)減去(1)便求出 Δs 来

$$\begin{array}{rl} s+\Delta s &= \frac{1}{2}gt^2+gt\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \\ s &= \frac{1}{2}gt^2 \\ -) \hline \Delta s &= \qquad\quad gt\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2. \end{array}$$

以 Δt 除：Δs 得出

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=gt+\frac{1}{2}g\Delta t.$$

由此根据定义，物体在 t 秒末的速度等于

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{1}{2}g\Delta t\right)=gt.$$

因之在一秒末的速度等于 $g\times 1=980\times 1=980$ 厘米/每秒，在三秒末的速度等于 $g\times 3=2940$ 厘米/每秒。

習　　題

1. 如果物体在 t 秒中所經过的路程为 s 米，且 $s=2t^3-3$。求它在 2 秒末及 3 秒末的速度。　　答：24 厘米/每秒，54 厘米/每秒.

2. 按照規則 $s=t^2-4t+5$ 运动的物体，它在什么时候的速度等于 0？　　答：2 秒末.

3. 求函数 $y=2x^2-3x+1$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 时候的变化率。　　答：-1.

1.2　切綫的斜率。設直綫 PP'（图 12）与曲綫 c 相交于不同的两点。我們把直綫 PP' 叫做曲綫 c 的割綫或者过 P, P' 两点的弦。把曲綫 c 上的点 P 固定下来，令 P' 沿着曲綫向 P 移动，那么当 P' 十分接近于 P 时，割綫 PP' 就接近于一个极限位置 PT。我們把这个代表割綫的极限位置的直綫 PT 叫做曲綫 c 在 P 点的**切綫**。

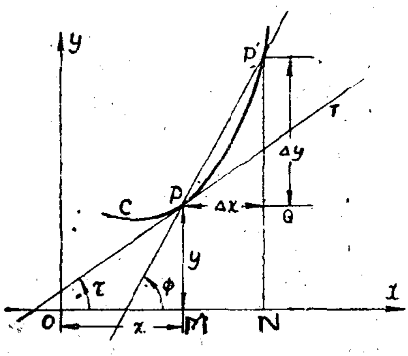

图 12.

我們現在来求切綫 PT 的斜率。設曲綫的方程式是

$$y=f(x).$$

設P点坐标是(x, y)，P'点的坐标是$(x+\Delta x, y+\Delta y)$，由图可知，割綫PP'的斜率等于

$$\frac{NP'-MP}{ON-OM}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\tan\phi.$$

当Δx趋近于零时，P'就沿曲綫c趋近于P，因此极限值$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$就代表切綫$PT$在$P$点的斜率：

$$\text{切綫的斜率}=\tan t=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

由此可知，**曲綫$y=f(x)$在$P(x, y)$点的切綫的斜率等于在該点的增量比$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的極限值。**

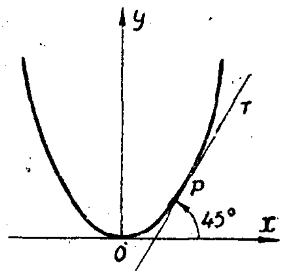

图 13.

例 1. 求抛物綫$y=x^2$在点$x=\frac{1}{2}$及頂点$x=0$的切綫的斜率。

解：因$y=x^2$。給x以增量Δx，則函数得到对应的增量Δy。因之

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^2,$$

卽

$$y+\Delta y=x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$$

两端减去 $\quad y \quad =x^2$

得出 $\quad \Delta y= \quad 2x\Delta x+(\Delta x)^2$

除以Δx得 $\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x.$

令Δx趋近于零，得出曲綫在任一点(x, y)的切綫的斜率

$$\tan t=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

为了求得在$x=\frac{1}{2}$点的切綫的斜率，只須在上式中令$x=\frac{1}{2}$，由此便得

$$x=\frac{1}{2}\text{ 时}，\tan t=2\times\frac{1}{2}=1,\text{ 故 } t=45°.$$

即在P点(图 13)的切綫与x軸的交角为45°。

同理，$x=0$时 $\tan t=2\times 0=0$, 即在頂点的切綫的斜率为0, 也就是說，切綫与x軸重合。

例 2. 求曲綫 $y=x^3$ 在(2, 8)点的切綫方程式。

解: 先求曲綫在(2, 8)点的切綫的斜率。同于例 1。

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^3=x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$

减去 $y=x^3$

得出 $\Delta y=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$,

由此 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

令Δx趋近于零，得出曲綫在任一点(x, y)的切綫的斜率

$$\tan t=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2)=3x^2.$$

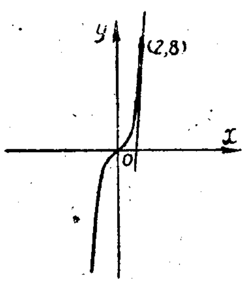

图 14.

因此当 $x=2$ 时

$$\tan t=12.$$

既知切綫的斜率，又知切綫过(2, 8)点，因之利用解析几何学所講过的直綫方程式(已知斜率及一点)可知：过(2, 8)点的切綫方程式是

$$y-8=12(x-2),$$

即 $$y-12x+16=0.$$

習　題

求出下列曲綫在指定点的切綫的斜率:

1. $y=x^2-4$ 在 $x=2$ 的点。　　答: 4.
2. $y=6-x^2$ 在 $x=1$ 的点。　　答: -2.
3. $y=\frac{2}{x}$ 在 $x=-2$ 的点。　　答: $-\frac{1}{2}$

4. $y=\frac{1}{x-1}$ 在 $x=3$ 的点。 答: $-\frac{1}{4}$

5. 求抛物綫 $y=4x^2+4x-3$ 在 $x=-1$ 点的切綫方程。

答: $4x+y+7=0$.

6. 求双曲綫 $y=\frac{1}{x}$ 在 $x=1$ 点的切綫方程式。 答: $x+y-2=0$.

§2. 导数及求导数的一般法則

2.1 导数的定义。我們已經看到，增量的比

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

当 $\Delta x\to 0$ 时的极限，和各个技术科学的基本概念之間有本質的联系。因之求这个比极限就有很重要的意义。在微积分学中，对于这个极限特别注意，并給它以一个专門的名称，叫做函数 $y=f(x)$ 关于自变量 x 的导数。导数的确切定义可述如下：

定义 設在自变量所取的某一定值 x 处的增量为 Δx，并設函数 $y=f(x)$ 的对应增量为 Δy，那么当 $\Delta x\to 0$ 时，比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的極限值

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

就叫做函数 $y=f(x)$ 在定值 x 处的导数。

依照一般习慣我們用記号 y' 或 $f'(x)$ 或 $\frac{dy}{dx}$ 表示导数，所以有下述公式：

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{I}$$

我們举几个例子。

例 1. 物体若依 $s=f(t)$ 的关系运动，t 代表时間，s 代表与 t 对应的距离，由 §1 所述，它在时刻 t 的速度等于 $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=s'$，因之速度是距离 s 关于时間 t 的导数。

例 2. 設 $y=f(x)$ 代表一个曲綫的方程，那么由 §1 所述，这个曲綫在 x 点的切綫的斜率等于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{dy}{dx}=y'$，因之曲綫在某一点 x 的切綫的斜率是函数 $y=f(x)$ 在該点的导数。

例 3. 設量 u 依規律 $u=f(t)$ 随时間 t 而变化，那么依 §1 所述，它在 t 点的变化率等于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta t}=\dfrac{du}{dt}=u'$，因之一个量 u 的变化率是它关于时間 t 的导数。

例 4. 用 Q 代表时間 t 內經过电綫横切面的电量(以庫侖作单位)，自然 Q 是 t 的函数 $Q=f(t)$。那么变化率 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}=\dfrac{dQ}{dt}=$ $=Q'$ 就叫做电流强度，它代表单位时間內流过电綫横切面的电量。因之电流强度是电量 Q 关于时間 t 的导数。它代表变化率的一种特例。

例 5. 用 θ 代表溫度(攝氏)，以 W 代表一克物質由 $0°$ 升高至 $\theta°$ 所需要的热量。W 显然是 θ 的函数，即 $W=f(\theta)$。增量的比 $\dfrac{\Delta W}{\Delta\theta}$ 便是升高单位溫度所需要的热量的平均增量。这个比的极限 $\lim\limits_{\Delta\theta\to 0}\dfrac{\Delta W}{\Delta\theta}=\dfrac{dW}{d\theta}$，叫做物体在溫度 θ 的比热，因此比热是热量 W 关于溫度 θ 的导数。

最后，我們再注意一下，記号 $\dfrac{dy}{dx}$ 只不过表示函数 y 关于自变量 x 的导数，与以前解釋增量 Δx 或 Δy 的記号一样，$\dfrac{dy}{dx}$ 并不是說 y 及 x 前乘以 d 再相除。它整个說来代表一个不可分割的特殊記号。

2.2 求导数的一般法則。計算一个函数 $y=f(x)$ 的导数的方法叫做微分法。以后我們常說“微分某函数”就等于說“求某函数的导数”。

根据导数的定义，求一个函数的导数，可依照下列四个步驟进

行。

(1) 在表达函数的公式 $y=f(x)$ 中把 x 换成 $x+\Delta x$，由此計算函数的对应值 $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$。

(2)从函数的新值 $y+\Delta y$ 减去函数的旧值 y 而得出函数的对应增量 Δy。

(3)以 Δx 除 Δy 得出增量的比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$。

(4)求比式 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 当 $\Delta x\to 0$ 时的極限，这个極限就是我們所求的函数在 x 点的导数。

現在我們举几个具体例子說明上述法則。

例 6. 求 $y=3x^2+5$ 在任一点 x 的导数。

(1) $y+\Delta y=3(x+\Delta x)^2+5=3(x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2)+5=$
$$=3x^2+6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2+5,$$

(2)
$$\begin{array}{rll} y+\Delta y= & 3x^2+6x\Delta x+3(\Delta x)^2 & +5 \\ y= & 3x^2 & +5 \\ \hline \Delta y= & 6x\Delta x+3(\Delta x)^2 & \end{array}$$

(3)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=6x+3\Delta x,$$

(4)令 $\Delta x\to 0$ 由公式(I)有
$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(6x+3\Delta x)=6x.$$

例 7. 求函数 $y=x^3-2x+7$ 在任一点的导数。

(1) $y+\Delta y=(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)+7=$
$$=x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2x-2\Delta x+7,$$

(2)
$$\begin{array}{rlllll} y+\Delta y= & x^3 & +3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3 & -2x & -2\Delta x & +7 \\ y= & x^3 & & -2x & & +7 \\ \hline \Delta y= & & 3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3 & & -2\Delta x & \end{array}$$

(3)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2-2,$$

(4) $y'=\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2-2)=$

$=3x^2-2.$

例 8. 微分函数 $y=\dfrac{c}{x^2}$。

(1) $$y+\Delta y=\frac{c}{(x+\Delta x)^2},$$

(2) $$y+\Delta y=\frac{c}{(x+\Delta x)^2}$$

$$\begin{array}{lcl} y & = & \dfrac{c}{x^2} \\ \hline \end{array}$$

$$\Delta y=\frac{c}{(x+\Delta x)^2}-\frac{c}{x^2}=\frac{cx^2-c(x+\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2}=$$

$$=\frac{cx^2-c(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2)}{x^2(x+\Delta x)^2}=\frac{-c\Delta x(2x+\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)^2},$$

(3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-c(2x+\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)^2},$$

(4) $y'=\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-c(2x+\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)^2}=-\dfrac{2c}{x^3}.$

例 9. 求函数 $s=at^2+bt+c$ 在 $t=3$ 的导数。

(1) $s+\Delta s=a(t+\Delta t)^2+b(t+\Delta t)+c=$

$=a(t^2+2t\Delta t+(\Delta t)^2)+b(t+\Delta t)+c,$

(2) $s+\Delta s=at^2+2at\Delta t+a(\Delta t)^2+bt+b\Delta t+c$

$$\begin{array}{llll} s & =at^2 & +bt & +c \\ \hline \Delta s= & 2at\Delta t+a(\Delta t)^2 & +b\Delta t & \end{array}$$

(3) $$\frac{\Delta s}{\Delta t}=2at+a\Delta t+b,$$

(4) $s'=\dfrac{ds}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(2at+a\Delta t+b)=2at+b,$

因之要求在 $t=3$ 的导数，只須在上式中令 $t=3$ 即可，就是説

$$(s')_{t=3}=\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=3}=2a\cdot 3+b=6a+b.$$

这里$(s')_{t=3}$或$\left(\dfrac{ds}{dt}\right)_{x=3}$依次代表$s'$及$\dfrac{ds}{dt}$在$t=3$的值。

習　題

1. 求 $y=mx+b$ 在任一点 x 的导数。　　答：$y'=m$.
2. 求 $y=cx^3$ 在任一点 x 的导数。　　答：$y'=3cx^2$.
3. 求 $y=3x^2-4x-5$ 在任一点 x 的导数。　　答：$y'=6x-4$.
4. 求 $y=x^4$ 在 $x=2$ 的导数。　　答：$(y')_{x=2}=32$.
5. 求 $y=\frac{x+4}{x}$ 在任一点 x 的导数。　　答：$y'=-\frac{4}{t^2}$. ? $y'=-\frac{4}{x^2}$

2.3 导数的存在与函数的連續性。到現在为止，我們研究导数的概念时，一直不曾涉及在給定点的导数在什么条件下才是存在的这样一个問題。事实上，导数是定义为增量比 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限，而我們在第一章討論极限时就曾經說过并不是所有变量都有极限的。所以在某些情况下极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

不一定有意义，也就是說，它不一定存在。例如說函数在某一点不連續，那么由它的图形不难看出它在不連續点处就沒有导数，因为这时它是沒有切綫的。

但是我們可以証明，如果~~要~~函数在給定的点 x 有导数，那么函数在这一点一定是連續的。关于这一点有下面定理成立。

定理　如果函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点有导数 $y'=f'(x_0)$，那么函数 $f(x)$ 在 x_0 点是連續的。 (逆之不真)

証明　因为 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，按照极限定义，当 $\Delta x\to 0$ 时，差 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)=\alpha$ 是一个无穷小量，即是說，当 $\Delta x\to 0$ 时 $\alpha\to 0$。

$\Delta y-\Delta x f(x_0)=\alpha$

$\Delta y=\Delta x f(x_0)+\alpha$.

由这个等式我們求得

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x \tag{1}$$

已知 $\Delta x\to 0$ 时 $\alpha\to 0$, 因此 $\alpha\Delta x\to 0$。又在 $x=x_0$ 处导数 $f'(x_0)$ 是定値,因而 $f'(x_0)\Delta x\to 0$。这样一来我們就証明了,当 $\Delta x\to 0$ 时 $\Delta y\to 0$, 它正説明了函数 $f(x)$ 在 x_0 点是連續的。

反过来,即使已知函数在某一点連續,它不一定在那一点就有导数。这样的例子可以举出很多。茲举一个簡单的例如下:

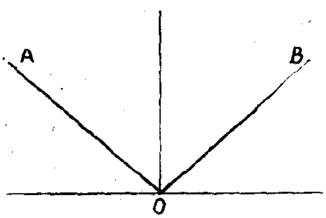

图 15.

例　設 $y=|x|$。

那么根据絕对値的定义可知,当 $x>0$ 时 $y=|x|=x$, 又当 $x<0$ 时 $y=|x|=-x$。在 $x=0$ 时 $y=|0|=0$。这个函数的图形如图15 所示,它由折綫 AOB 代表。由图不难看出,它在 $x=0$ 这一点是連續的。自变量 x 在 $x=0$ 点的任一增量是 $\Delta x=x-0=x$。从而函数 $y=|x|$ 的对应增量是

$$\Delta y=|0+\Delta x|-|0|=|\Delta x|-0=|\Delta x|=|x|,$$

因之 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{|x|}{x}$。当 $\Delta x\to 0$ 即 $x\to 0$ 且 x 保持大于零时有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

又当 $\Delta x\to 0$ 且 x 保持小于零(这时 $|x|=-x$)时有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-1.$$

既然 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 沒有确定的值,所以函数 $y=|x|$ 在原点 $x=0$ 的导数不存在。

从上例看出,上述定理的逆定理不成立。虽然这样,但在一般

的技术科学上所碰到的总是有导数的連續函数。以后不特别声明时，总是討論有导数的連續函数。

§3. 求导数的基本公式

3.1 基本公式表 I。在§2我們从导数的定义直接得出求导数的一般法則，为了便于掌握这个重要的运算方法，我們把它分成四个步驟来进行。虽然有了这样一个一般的法則，但在某些具体的問題上要使用它是并不方便的，有时甚至会造成很大的困难。为此我們从这个一般的法則出发或利用其他簡捷办法导出一些公式。利用这些公式就会使我們对于导数的計算变得容易。

为此，我們列举一些求导数的重要公式如下。为了便于記忆及了解，我們把一些基本公式汇积成表。这时也把 $y=f(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$ 表示成 $\frac{df(x)}{dx}$，因为只写 $\frac{dy}{dx}$，在特殊問題上不能清楚表达出我們所求的究竟是怎样一个函数的导数。例如設 $y=x^n$，我們把它导数写成 $\frac{dx^n}{dx}$ 就比一般写成 $\frac{dy}{dx}$ 更清楚。

在下面的公式中，u 及 v 都代表 x 的函数，c 代表一个常数，n 代表一个正整数。

导数的基本公式表 I

(I) $\frac{dc}{dx}=0.$

(II) $\frac{dx}{dx}=1.$

(III) $\frac{d(u\pm v)}{dx}=\frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx}.$

(IV) $\frac{d(cu)}{dx}=c\frac{du}{dx}.$

(V) $\frac{d(uv)}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}.$

(VI) $\dfrac{du^n}{dx}=nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$.

(VII) $\dfrac{d\left(\dfrac{v}{u}\right)}{dx}=\dfrac{u\dfrac{dv}{dx}-v\dfrac{du}{dx}}{u^2}$.

(VIII) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$.

上面这些公式都是十分重要的，讀者宜把它熟記下来便于使用。以下我們就来証明这些公式并引导大家熟习它的使用法。

3.2 常量的导数。我們已經說过，常量 c 可以看作不記自变量 x 取什么値而它总取同一値 c 的函数。

設 $$y=c,$$

我們根据求导数的一般法則所說的四个步驟来求它的导数。

給常量函数 $y=c$ 的自变量 x 以增量 Δx。因 y 所取的値永远是 c，所以函数 y 的对应值 $y+\Delta y$ 也等于 c，即 $y+\Delta y=c$。

从而 $\Delta y=(y+\Delta y)-y=c-c=0$。除以 Δx 后得增量比为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{0}{\Delta x}=0$（永远記住自变量的增量 Δx 是不等于零的！）由此根据导数的定义有

$$c'=\frac{dc}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0.$$

这样一来，我們就証明了公式 I。即是說，**常量的导数等于零。**

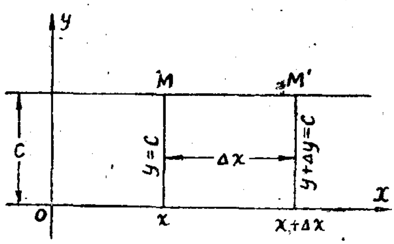

图 16.

这个結果从几何的意义来看也很明显。方程 $y=c$ 表达一条平行于 Ox 軸的直綫（图 16），因此由解析几何可知它的斜率等于零。函数 $y=c$ 的导数 $(c)'$ 是这直綫任一点的切綫的斜率。但据切