三导丛书

数值分析

（第四版）

导教·导学·导考

DAOJIAO DAOXUE DAOKAO

封建湖 聂玉峰 王振海 编

- 重点内容提要
- 知识结构图
- 常考题型及典型题精解
- 学习效果测试题及答案
- 课后习题全解

西北工业大学出版社

三导丛书

数值分析

（第四版）

导教·导学·导考

封建湖　聂玉峰　王振海　编

西北工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数值分析 导教·导学·导考/封建湖等编. 西安:西北工业大学出版社,2003.6

(三导丛书)

ISBN 7-5612-1642-4

Ⅰ.数… Ⅱ.封… Ⅲ.数值计算—计算方法—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 023149 号

出版发行: 西北工业大学出版社
通信地址: 西安市友谊西路 127 号 **邮编:** 710072 **电话:** 029-8493844
网　　址: www.nwpup.com
印 刷 者: 西安市向阳印刷厂
开　　本: 850mm×1 168mm　1/32
印　　张: 8.625
字　　数: 282 千字
版　　次: 2003 年 6 月第 1 版　2003 年 6 月第 1 次印刷
印　　数: 1～10 000 册
定　　价: 12.00 元

前　言

随着计算机技术的高速发展，越来越多的科技工作者使用计算机进行科学研究和解决工程技术问题。数值分析（或计算方法）课程的内容是科学工程计算的必备知识，已经成为众多理工科大学生、研究生的必修课程，越来越受到重视。

本书主要以李庆扬、王能超、易大义三位著名教授编写的《数值分析》（清华·第四版）的章节为顺序，以其内容为基础而编写的。共分九章，每章设计了五个板块：

一、重点内容提要　列出了基本概念、重要内容简介，重要定理和公式，突出考点的核心知识。

二、知识结构图　用框图形式列出了各知识点间的有机联系。

三、常考题型及典型题精解　从多年教学经验出发，列出了常见考研题型和课程结业考试试题，并编入了一些典型题，给出了详细解答。其中不少题目是对相应内容的进一步补充。

四、学习效果测试题　这一部分是为检查读者的学习效果和应试能力而设计的。通过测试，读者可以

进一步加深对所学内容的理解，增强解题应试能力。

五、课后习题全解 对《数值分析》（清华·第四版）的课后习题作了详细解答。

本书从指导课程教学、学习和考试、考研的角度，通过对大量典型题、测试题的解答，揭示了数值分析的解题方法、解题规律和解题技巧。这对于提高读者理解课程的基本概念和理论，开拓解题思路，增强数学素质，会收到良好的效果。

全书共有九章，分别由聂玉峰（第一至第三章）、王振海（第四至第六章）、封建湖（第七至第九章）执笔编写，由封建湖负责统稿。

由于水平有限，书中疏漏与不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

2003 年 3 月于西安

目　　录

第1章 绪 论

一、重点内容提要

(一) 误差来源及分类

数值分析主要研究两类误差。

1. 舍入误差

由于计算机字长的有限性，初始数据在机器内的表示以及进行算术运算(+，−，×，÷)时产生的误差，称之为舍入误差.

2. 截断误差(方法误差)

为了在有限时间段内得到运算结果，用有限的过程取代无穷的过程时产生的误差，称之为截断误差或方法误差.

用数值方法求解数学模型所得到的近似解包含舍入误差和截断误差两部分。

(二) 误差度量

1. 绝对误差(误差)

(1) **定义**:近似值 x^* 与准确值 x 之差称为绝对误差，用公式表示为 $e(x^*) \xlongequal{\text{def}} x^* - x$. 绝对误差常简称为误差. 在不引起混淆时可简记 $e(x^*)$ 为 e^*.

(2) 绝对误差限(误差限):绝对误差绝对值的较小上界，用符号表示为 $\varepsilon(x^*)$ 或 ε^*.

2. 相对误差

(1) **定义**:绝对误差 e^* 与准确值 x 的比值称为相对误差. 用符号表示为 $e_r(x^*)$ 或 e_r^*. 由于准确值 x 通常未知，可用下列公式计算 e_r^*

$$e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$$

当 x^* 较好地近似 x 时,两种方法仅相差高阶无穷小.

(2) 相对误差限:相对误差绝对值的较小上界,用符号表示为 $\varepsilon_r(x^*)$ 或 ε_r^*. 也可用下式计算

$$\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|}$$

3. 有效数字

(1) **定义**:设准确值 x 的近似值 x^*(非零)可表示为

$$x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + a_3 \times 10^{-2} + \cdots) \tag{1.1}$$

式(1.1)中 $a_1, a_2, \cdots$, 是 0 到 9 中的某一个数字且 $a_1 \neq 0$, m 为整数. 记使不等式

$$|x^* - x| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n^*+1}$$

成立的整数 n^* 的最大值为 n,则称 x^* 近似 x 具有 n 位有效数字,$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 分别是 x^* 近似 x 的第一位、第二位、…、第 n 位有效数字.

(2) 有效数:称近似值末位也是有效数字的近似数为有效数. 此时,绝对误差限不超过末位单位的一半. 进而可以知道,对准确值进行四舍五入或对近似数的准确位进行四舍五入所得近似值均为有效数. 有效数的有效数字位数等于左起第一位非零数字到末位数字的位数.

4. 三种度量间的联系

(1) 绝对误差与相对误差的关系参阅相对误差的定义.

(2) 绝对误差与有效数字的关系参阅有效数字的定义.

(3) 相对误差与有效数字的关系.

定理 1.1 设非零近似数 x^* 有形如式(1.1)的表示,若 x^* 具有 n 位有效数字,则相对误差限满足

$$\varepsilon_r^* \leqslant \frac{1}{2a_1} \times 10^{1-n}$$

定理 1.2 设非零近似数 x^* 有形如式(1.1)的表示,若 x^* 的相对误差限满足

$$\varepsilon_r^* \leqslant \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{1-n}$$

则 x^* 至少具有 n 位有效数字.

(三) 初值误差传播

1. 一元函数误差传播

$$e(f(x^*)) = f(x^*) - f(x) \approx f'(x^*)e(x^*)$$

$$\varepsilon(f(x^*)) \approx |f'(x^*)|\varepsilon(x^*)$$

$$\varepsilon_r(f(x^*)) \approx C_p(f, x^*)\varepsilon_r(x^*)$$

其中条件数 $$C_p(f, x^*) \xlongequal{\text{def}} \left|\frac{x^* f'(x^*)}{f(x^*)}\right|$$

2. n 元函数误差传播

$$e(f(x_1^*, \cdots, x_n^*)) = f(x_1^*, \cdots, x_n^*) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \approx \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\bigg|_{(x_1^*, \cdots, x_n^*)}\right)e(x_k^*)$$

$$\varepsilon(f(x_1^*, \cdots, x_n^*)) \approx \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\bigg|_{(x_1^*, \cdots, x_n^*)}\right|\varepsilon(x_k^*)$$

$$\varepsilon_r(f(x_1^*, \cdots, x_n^*)) \approx \sum_{k=1}^{n} C_p(f, x_k^*)\varepsilon_r(x_k^*)$$

$$C_p(f, x_k^*) \xlongequal{\text{def}} \left|\frac{x_k^* \dfrac{\partial f}{\partial x_k}\bigg|_{(x_1^*, \cdots, x_n^*)}}{f(x_1^*, \cdots, x_n^*)}\right|$$

3. 二元算术运算的误差传播

$$\varepsilon(x_1^* \pm x_2^*) = \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*)$$

$$\varepsilon(x_1^* x_2^*) \approx |x_2^*|\varepsilon(x_1^*) + |x_1^*|\varepsilon(x_2^*)$$

$$\varepsilon\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right) \approx \frac{|x_2^*|\varepsilon(x_1^*) + |x_1^*|\varepsilon(x_2^*)}{|x_2^*|^2} \quad (x_2^* \neq 0)$$

$$\varepsilon_r(x_1^* + x_2^*) \approx \max\{\varepsilon_r(x_1^*), \varepsilon_r(x_2^*)\} \quad (x_1^* x_2^* > 0)$$

$$\varepsilon_r(x_1^* \overset{\times}{\underset{\div}{}} x_2^*) \approx \varepsilon_r(x_1^*) + \varepsilon_r(x_2^*) \quad (x_1^* x_2^* \neq 0)$$

(四) 算法的数值稳定性

对于给定的求解算法，如果输入数据有误差，由此导致的计算过程中的舍入误差不增长，则称此算法是数值稳定的，否则称此算法为数值不稳定的.

(五) 算法设计中避免误差危害的要点

(1) 避免除数绝对值远小于被除数绝对值的除法，否则会扩大舍入误差，甚至出现溢出.

(2) 避免两相近数相减，否则会使有效数字严重损失.

(3) 尽可能防止大数“吃掉”小数，否则可能影响计算结果的可靠性.

(4) 简化计算步骤，减少运算次数.

(5) 选用数值稳定的算法.

二、知识结构图

- 误差及算法
  - 误差
    - 分类
      - 舍入误差的产生及定义
      - 截断误差的产生及定义
    - 度量
      - 绝对误差(限)
      - 相对误差(限)
      - 有效数字
      - 三者的联系
    - 传播
      - 一元函数
      - n 元函数
      - 二元算术运算
      - 计算函数值问题的条件数
  - 算法
    - 数值稳定性概念
    - 算法设计注意要点

三、常考题型及典型题精解

例 1-1 指出如下有效数的有效数字位数和绝对误差限，并计算相对误差限.

$$x^* = 49\times 10^{-2},\quad y^* = 0.049\,0,\quad z^* = 490.00$$

解 x^* 有两位有效数字，绝对误差限 $\varepsilon(x^*) = \frac{1}{2}\times 10^0\times 10^{-2} = 0.005$，相对误差限为

$$\varepsilon_r(x^*) = \frac{\varepsilon(x^*)}{|x^*|} = \frac{0.005}{49\times 10^{-2}} \approx 0.010\,2$$

y^* 有四位有效数字，绝对误差限 $\varepsilon(y^*) = \frac{1}{2}\times 10^{-4} = 0.000\,05$，相对误差

限为

$$\varepsilon_r(y^*)=\frac{\varepsilon(y^*)}{|y^*|}=\frac{0.000\ 05}{0.049\ 0}\approx 0.001\ 02$$

z^* 有五位有效数字，绝对误差限 $\varepsilon(z^*)=\frac{1}{2}\times 10^{-2}=0.005$，相对误差限为

$$\varepsilon_r(z^*)=\frac{\varepsilon(z^*)}{|z^*|}=\frac{0.005}{490.00}\approx 0.000\ 010\ 2$$

例1-2 下列数据作为 $x=\mathrm{e}$ 的近似值，试确定它们各有几位有效数字，并确定相对误差限．

$$x_1^*=2.7,\quad x_2^*=2.71,\quad x_3^*=2.72$$

解法一 $x_1^*=2.7=10^0\times 2.7$，于是有 $m=0$，由

$$|e(x_1^*)|=|x_1^*-x|=|2.7-\mathrm{e}|=0.018\cdots\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\times 10^{-1}=\frac{1}{2}\times 10^{0-2+1}$$

知 x_1^* 具有两位有效数字．利用不等式

$$|e_r(x_1^*)|=\frac{|e(x_1^*)|}{|x_1^*|}=$$

$$\frac{0.018\cdots}{2.7}\leqslant\frac{0.019}{2.7}\approx 0.007\ 0$$

得相对误差限 $\varepsilon_r(x_1^*)\approx 0.007\ 0$.

$x_2^*=2.71=10^0\times 2.71$，于是有 $m=0$，由

$$|e(x_2^*)|=|x_2^*-x|=|2.71-\mathrm{e}|=0.008\ 2\cdots\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\times 10^{-1}=\frac{1}{2}\times 10^{0-2+1}$$

知 x_2^* 具有两位有效数字．利用不等式

$$|e_r(x_2^*)|=\frac{|e(x_2^*)|}{|x_2^*|}=$$

$$\frac{0.008\ 2\cdots}{2.71}\leqslant\frac{0.008\ 3}{2.71}\approx 0.003\ 1$$

得相对误差限 $\varepsilon_r(x_2^*)\approx 0.003\ 1$.

$x_3^*=2.72=10^0\times 2.72$，于是有 $m=0$，由

$$|e(x_3^*)| = |x_3^* - \mathrm{e}| = 0.001\,7\cdots \leqslant$$

$$\frac{1}{2}\times 10^{-2} = \frac{1}{2}\times 10^{0-3+1}$$

知 x_3^* 具有三位有效数字．利用不等式

$$|e_r(x_3^*)| = \frac{|e(x_3^*)|}{|x_3^*|} = \frac{0.001\,71\cdots}{2.72} \leqslant$$

$$\frac{0.001\,72}{2.72} \approx 0.000\,63$$

得相对误差限 $\varepsilon_r(x_3^*) \approx 0.000\,63$.

解法二 由于 $x_1^* = 2.7$ 可由对 $x = \mathrm{e}$ 进行四舍五入得到，故 x_1^* 是有效数，它有两位有效数字．利用定理 1.1 得到相对误差限

$$\varepsilon_r(x_1^*) \leqslant \frac{1}{2a_1}\times 10^{1-n} = \frac{1}{4}\times 10^{1-2} = 0.025$$

由于 $x_3^* = 2.72$ 可由对 $x = \mathrm{e}$ 进行四舍五入得到，故 x_3^* 是有效数，它有三位有效数字．利用定理 1.1 得到相对误差限

$$\varepsilon_r(x_3^*) \leqslant \frac{1}{2a_1}\times 10^{1-n} = \frac{1}{4}\times 10^{1-3} = 0.002\,5$$

因为 x_2^* 不是有效数，不能用此法求解，可以用解法一求解．

例 1-3 已知 $x = x^* \pm \delta(\delta > 0)$，试求 $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ 的相对误差限．

解 由题知近似数 x^* 的绝对误差限 $\varepsilon(x^*) = \delta$，相对误差限 $\varepsilon_r(x^*) = \frac{\delta}{|x^*|}$. 计算函数值的条件数

$$C_p(f, x^*) = \left|\frac{x^* f'(x^*)}{f(x^*)}\right| = \left|\frac{x^* \cdot \frac{1}{n}(x^*)^{\frac{1-n}{n}}}{(x^*)^{\frac{1}{n}}}\right| = \frac{1}{n}$$

利用一元函数的误差传播公式有相对误差限

$$\varepsilon_r(f(x^*)) \approx C_p(f, x^*)\varepsilon_r(x^*) = \frac{\delta}{n|x^*|}$$

例 1-4 要使 $\sqrt{17}$ 的相对误差不超过 0.1%，应取几位有效数字?

解 $\sqrt{17}$ 的首位数字 $a_1 = 4$. 设 x^* 有 n 位有效数字，由定理 1.1 知相对误差限

$$\varepsilon_r(x^*) \leqslant \frac{1}{2a_1} \times 10^{1-n} = \frac{1}{8} \times 10^{1-n}$$

令$\frac{1}{8} \times 10^{1-n} \leqslant 0.1\%$,解得 $n \geqslant 3.097$,即需取四位有效数字.

例1-5 长方体的长、宽和高分别大约为50 cm, 20 cm和10 cm. 测量误差满足什么条件时该长方体表面积误差不超过1 cm^2.

解 设测量工具足够长,即不需借助加法运算可以直接测量出长方体的长、宽和高,这样可以设长、宽和高分别为

$$l = l^* \pm \delta = 50 \pm \delta,\ w = w^* \pm \delta = 20 \pm \delta,\ h = h^* \pm \delta = 10 \pm \delta$$

式中 δ 由测量工具可以直接读出的最小刻度确定.

长方体表面积 $A = 2(lw + lh + wh)$,利用误差传播公式有

$$\begin{aligned}\varepsilon(A^*) = {} & 2[l^*\varepsilon(w^*) + w^*\varepsilon(l^*) + l^*\varepsilon(h^*) + h^*\varepsilon(l^*) + \\ & w^*\varepsilon(h^*) + h^*\varepsilon(w^*)] = \\ & 4\delta[l^* + w^* + h^*] = 320\delta\end{aligned}$$

令$320\delta < 1$,解得$\delta \leqslant 0.003\ 1$,即长、宽和高的测量误差均不能超过0.003 1 cm.

例 1-6 已知准确值 $x_1 = 29.785$, $x_2 = 29.780$ 和它们各自的近似值 $x_1^* = 29.783$, $x_2^* = 29.781$. 试计算 $y^* = x_1^* - x_2^*$ 的相对误差和有效数字的位数,并与 x_1^*, x_2^* 的相对误差和有效数字位数比较,能够得到什么结论?

解

$$y = x_1 - x_2 = 29.785 - 29.780 = 0.005$$

$$y^* = x_1^* - x_2^* = 29.783 - 29.781 = 0.002$$

利用相对误差和有效数字的定义可得表 1-1。

表 1-1

近似值	x_1^*	x_2^*	y^*
相对误差限	0.68×10^{-4}	0.34×10^{-4}	0.6
有效数字位数	4	4	0

通过比较知相近数相减严重损失有效数字,扩大了相对误差,故应在算法设计时避免相近数相减.

例 1-7 下列公式如何变形才能使数值计算得到比较精确的结果.

(1) $x-\sin x \quad (|x| \ll 1)$

(2) $\int_N^{N+1} \ln x \mathrm{d}x = (N+1)\ln(N+1) - N\ln N - 1$ （N 充分大）

解 (1) 将 $\sin x$ 在 $x=0$ 处 Taylor 展开，有

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

故有 $x-\sin x = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \cdots$，该级数为交错级数，可以根据精确要求确定项数．以 3 项为例给出计算公式，则有

$$x - \sin x \approx \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} = \quad \text{（产生截断误差）}$$

$$\left[\frac{x^4}{7!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{1}{3!}\right]x^3 = \quad \text{（避免大数吃小数）}$$

$$\left[\left(\frac{x^2}{42} - 1\right)\frac{x^2}{20} + 1\right]\frac{x^3}{6} \quad \text{（减少运算次数）}$$

(2) 为避免溢出以及相近数相减，变形

$$\int_N^{N+1} \ln x \mathrm{d}x = N\ln(N+1) - N\ln N + \ln(N+1) - 1 =$$

$$N\ln\frac{N+1}{N} + \ln(N+1) - 1$$

例 1-8 已知单精度实数最多能够保留 7 位有效数字，试给出用单精度实数存储并计算表达式

$$987654321 + \sum_{j=1}^{100\,000} \delta_i, \quad 0.001 \leqslant \delta_i \leqslant 1, i = 1, 2, \cdots, 10\,000$$

的一种有效算法．

解 为了避免大数吃掉小数，需先计算 $\sum\limits_{j=1}^{100\,000} \delta_i$，并且需分组求和，否则累加到一定程度又会再现大量的大数吃小数的现象．我们可以 1 000 个数为一组求和（这样可以保证大数吃小数出现的次数少一些），即变形

$$\sum_{j=1}^{100\,000} \delta_i = \sum_{k=1}^{100} \left(\sum_{j=1\,000(k-1)+1}^{1\,000k} \delta_i \right) \xlongequal{\text{def}} \sum_{k=1}^{100} M_k$$

由于单精度实数仅能保留 7 位有效数字，为避免存储 987654321 时产生较大的舍入误差，可将 987654321 分解为 M_{-1} 与 M_0 的和，其中

$$M_{-1} = 0.987\ 65 \times 10^9, \quad M_0 = 0.432\ 1 \times 10^4$$

这样原计算公式等价于计算公式

$$\sum_{k=0}^{100} M_k + M_{-1}$$

若还需减少舍入误差，可以继续采用分组策略以及较小数先加的策略求和 $\sum_{k=0}^{100} M_k$，进而得到最终的运算结果．

例 1-9 试设计一种算法计算多项式

$$a_0 x^8 + a_1 x^{16} + a_2 x^{32}$$

的函数值，使得运算次数尽可能少．

解 记 $y = x^8$，多项式可变为 $a_0 y + a_1 y^2 + a_2 y^4$，用秦九韶算法计算该多项式值

$$a_0 y + a_1 y^2 + a_2 y^4 = [(a_2 y^2 + a_1) y + a_0] y$$

对于 y 的计算可用变形 $y = x^8 = xxx^2 x^4$ 进行计算．

例 1-10 试给出一种计算积分 $I_n = \mathrm{e}^{-1} \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ 近似值的稳定递推算法．

解

$$I_n = \mathrm{e}^{-1} \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-1} \left[x^n \mathrm{e}^x \Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x^n \right] =$$

$$1 - n\mathrm{e}^{-1} \int_0^1 x^{n-1} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = 1 - nI_{n-1}$$

从上式可推得

$$I_{n-1} = \frac{1 - I_n}{n} \tag{1.2}$$

由此可以看到，当 I_n 的近似值有误差 ε_n 时，I_{n-1} 的近似值有误差 $\varepsilon_{n-1} = \frac{\varepsilon_n}{n}$（忽略除法运算引入的舍入误差）．依次类推得到 I_{n-k} 近似值的误差为

$$\varepsilon_{n-k} = \frac{\varepsilon_n}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} \tag{1.3}$$

随着递推过程的进行，初始误差对计算结果的影响越来越小，因而是一种稳定性很好的算法．

现在还需给出 I_n 的初始近似值，利用积分表达式知