成人高校辅导丛书

刘维翰　主编
张旭辉
吴增炽　编著
吴彩麟

高等数学简明辅导

下　册

广西人民出版社

成人高校辅导丛书

高等数学简明辅导

（下 册）

刘维翰　　主编

张旭辉　吴增炽　吴彩麟　　编著

广西人民出版社

成人高校辅导丛书

高 等 数 学 简 明 辅 导

（下册）

刘维翰　　主编

吴增炽　张旭辉　吴彩麟　编著

☆

广西人民出版社出版

（南宁市河堤路14号）

广西新华书店发行广西大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　12.375 印张　274 千字

1987年4月第1版　　1987年4月第1次印刷

印　数 1—9600 册

书号：7113·762　　　　定价：1.80元

ISBN　7-219-00134-7

0.2

内 容 简 介

本书内容共八章，包括空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、级数、常微分方程、场论初步*。每章均包括四个部分：主要内容简述，典型例题分析及解法指导，小结，自我检查题与测验题。内容简明完整，重点突出，例题典型、广泛，解题清楚明确。

本书是各类成人高校学员、自学者学习高等数学的辅导用书，亦可供普通高等工科院校、财经院校学生及辅导教师参考使用。

目　　录

第九章　空间解析几何

一、主要内容简述

（一）空间直角坐标系

1．概念

$O—xyz$坐标系是由空间一点O（原点）及互相垂直的三条数轴ox，oy，oz构成，三个坐标平面 xoy，xoz，yoz 分割整个空间为八个挂限.

空间点M与有序数组（x_0，y_0，z_0）一一对应，给定空间一点要会求其坐标；给定坐标要会确定该点的空间位置.

2．空间点间距离

空间两点M_1、M_2间距离为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

（二）向量代数

1．基本概念

（1）向量的特征　两要素——模和方向，其中方向更为重要.

（2）向量表示法：

$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}=\{a_1, a_2, a_3\}$

（3）模 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

（4）单位向量 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，即方向与$\boldsymbol{a}$相同、模为1的向量。

基本单位向量：

$\boldsymbol{i}=\{1, 0, 0\}$；$\boldsymbol{j}=\{0, 1, 0\}$；$\boldsymbol{k}=\{0, 0, 1\}$。

（5）方向余弦 $\cos\alpha=\dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$

$\cos\beta=\dfrac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$　　$\cos\gamma=\dfrac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$

满足$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

2．向量的基本运算

（1）加减法 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_1\pm b_1, a_2\pm b_2, a_3\pm b_3\}$

符合三角形、平行四边形法则。

（2）数乘向量 实数m，向量$\boldsymbol{a}$，则

$m\boldsymbol{a}=\{ma_1, ma_2, ma_3\}$，$|m\boldsymbol{a}|=|m||\boldsymbol{a}|$

（3）向量的数量积（点积、内积）

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})=|\boldsymbol{a}|^2$

交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

结合律：$m(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(m\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}$

分配律：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

注意： 数$|a|\cos(a, b)$称为a在b上的投影，记作

$$Prj_b a = |a|\cos(a, b)$$

（4）向量的向量积（叉积、外积）

$$a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$|a\times b| = |a||b|\sin(a, b)$$

$a\times b$同时垂直于a和b，且a、b、$a\times b$成右手螺旋关系。

$|a\times b|$的几何意义为以a、b为相邻两边的平行四边形的面积。

结合律：$\lambda(a\times b) = (\lambda a)\times b$

分配律：$(a+b)\times c = a\times c + b\times c$

注意： $a\times b = -b\times a$（反交换律）

*（5）向量的混合积

$$(a\times b)\cdot c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

其绝对值的几何意义是以a、b、c为棱的平行六面体的体积。

轮换性： $(a\times b)\cdot c = (b\times c)\cdot a = (c\times a)\cdot b$

3．向量的基本性质

（1）两向量$a\perp b \rightleftharpoons a\cdot b = 0$

（2）两向量 $a \parallel b \rightleftharpoons a\times b = 0$ 或$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

（3）两非零向量 a与 b 的夹角由下式确定：

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

（4）三向量共面$\Leftrightarrow(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$

（三）平面

1．平面方程

（1）点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

（2）一般式 $Ax+By+Cz+D=0$

（3）三点式 $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$

（4）截距式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

2．二平面间的夹角

夹角φ由下式确定

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

3．两平面间的关系

（1）两平面平行$\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$；

（2）两平面重合$\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$；

（3）两平面垂直⇌$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$；

（4）两平面相交⇌方程中x，y，z的对应系数不成比例。

4．点到平面距离

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

（四）空间直线

1．直线方程

（1）交面（一般）式方程

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

（2）标准（点向）式方程

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

（3）两点式方程

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

（4）参数式方程

$$\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}\qquad(-\infty<t<+\infty)$$

2．两直线夹角

夹角φ由下式确定

$$\cos\varphi=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

其中两直线的方向向量分别为

$\boldsymbol{l}_1=\{a_1, b_1, c_1\}$　　$\boldsymbol{l}_2=\{a_2, b_2, c_2\}$

3．直线与平面的夹角

夹角φ由下式确定：

$$\sin\varphi=\frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

其中直线方向向量　$\boldsymbol{l}=\{a, b, c\}$

平面法向量　$\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$

4．两直线平行、垂直、相交条件

设 $\boldsymbol{l}_1=\{a_1, b_1, c_1\}$，$\boldsymbol{l}_2=\{a_2, b_2, c_2\}$，则

（1）　$\boldsymbol{l}_1/\!/\boldsymbol{l}_2 \rightleftharpoons \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

（2）　$\boldsymbol{l}_1\perp\boldsymbol{l}_2 \rightleftharpoons a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

（3）　$\boldsymbol{l}_1$ 与 $\boldsymbol{l}_2$ 相交　$\rightleftharpoons \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ 或 $\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$

两直线异面条件是：两直线既不平行也不相交．

5．直线与平面平行、垂直、相交条件

设直线方向向量　$\boldsymbol{l}=\{a, b, c\}$

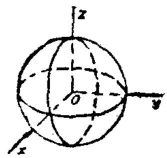
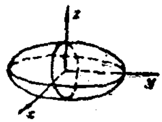
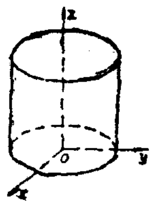
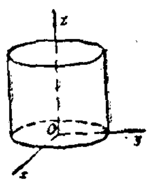
平面法向量　$\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$，则

（1）　直线$/\!/$平面　$\rightleftharpoons$　$Aa+Bb+Cc=0$

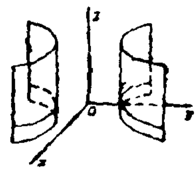
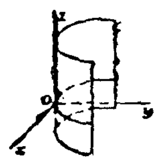
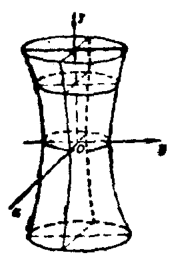
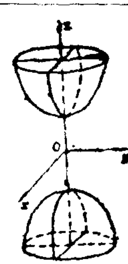
（2） 直线⊥平面 $\Leftrightarrow \frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}$

（五）二次曲面

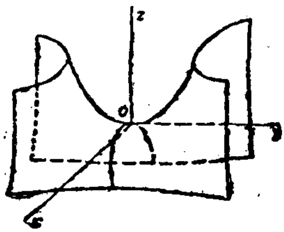
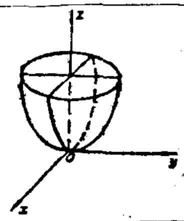
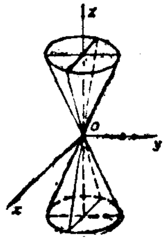
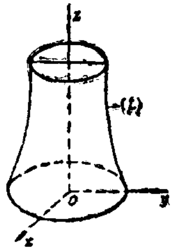
这部分内容列表如下：

名称		方程	图形	在坐标面上的截痕
球面	球面	$x^2+y^2+z^2=R^2$		圆
	椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		椭圆
柱面	圆柱面	$x^2+y^2=R^2$		在xy面上为圆
	椭圆柱面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$		在xy面上为椭圆

续表

名称		方程	图形	在坐标面上的截痕
柱面	双曲柱面	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$		在xy面上为双曲线
	抛物柱面	$x^2-2py=0$		在xy面上为抛物线
双曲面	单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (a、b、$c>0$)		在xy面上为椭圆，在xz面和yz面上为双曲线
	双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (a、b、$c>0$)		在xy面无截痕，在xz面和yz面上截痕都是双曲线

续表

名称	方　程	图　形	在坐标面上的截痕
抛物面：双曲抛物面（马鞍面）	$z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$		在xy面上截痕为两条相交直线，在xz面上为开口向下的抛物线，在yz面上为开口向上的抛物线
抛物面：椭圆抛物面	$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$		在xy面上为一点，在xz面和yz面上皆为开口向上的抛物线
锥面	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ 当$a=b$时为圆锥面		在xy面上为一点，在yz面和xz面上各为两条相交直线
旋转曲面	曲线(L) $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕z轴旋转成曲面 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$		在xy面上为圆

二、典型例题分析及解法指导

例1　求定点 (a, b, c) 关于：(1)各坐标平面、(2)各坐标轴、(3)坐标原点的对称点的坐标。

解　(1) (a, b, c) 关于 xoy、yoz、zox 坐标面的对称点依次为：$(a, b, -c)$、$(-a, b, c)$、$(a, -b, c)$；

(2) (a, b, c) 关于 ox、oy、oz 轴的对称点依次为：$(a, -b, -c)$、$(-a, b, -c)$、$(-a, -b, c)$；

(3) (a, b, c) 关于原点的对称点为 $(-a, -b, -c)$。

说明　1°　求已知点关于坐标平面、坐标轴、坐标原点的对称点坐标，关键是要明了相应的对称概念，找到其空间上的对称点的位置，并注意已知点的有关对称点的三个坐标中，哪个坐标符号改变，哪个坐标符号不变。

2°　在空间的点 M 和其坐标 (a, b, c) 一一对应的意义下，我们把点 M 和它的坐标看成是一回事而不加区别，故有时称点 (a, b, c) 为点 M。

例2　求点 $A(4, -3, 5)$ 到坐标原点及各坐标轴的距离。

解　点 $A(4, -3, 5)$ 到 $O(0, 0, 0)$ 的距离为　$d=\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}=5\sqrt{2}$

从点 A 向 x 轴作垂直平面，其垂足为 $(4, 0, 0)$，故由点 A 到 x 轴的距离为

$$d_1=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$$

同理，点 A 到 y 轴及 z 轴的距离分别为

$$d_2=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$$

$$d_3=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$$

（读者还可以自行求点 A 到各坐标平面的距离）

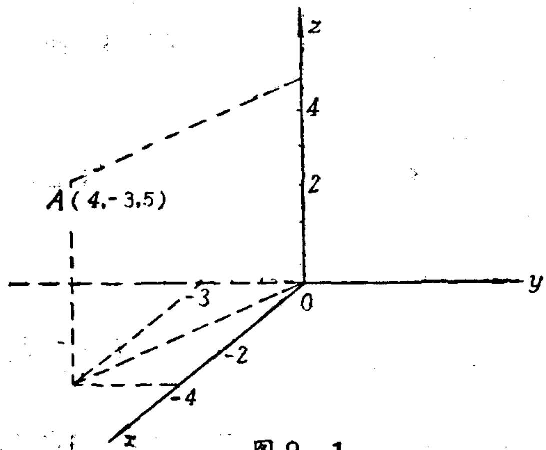


图9.1

说明 1° 点的坐标表示为 $M(x_0,y_0,z_0)$；x_0，y_0，z_0 分别为点 M 在三个坐标轴上的投影。

2° 点的三个坐标有正、负之分，而距离取非负值，注意点到点、点到直线、点到平面三者距离在概念上的区别。

例3 已知两点 $A(1，1，1)$，$B(3，3，2)$

（1） $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$ 各表示什么？

（2） $\boldsymbol{AB}$ 有哪几种表达形式？

（3） 求 $\boldsymbol{AB}$ 的单位向量。

解 （1） $\boldsymbol{AB}$表示由 A，B 两点且方向由 A 指向 B 构成的向量，AB 线段的长度 $|\boldsymbol{AB}|$ 为向量$\boldsymbol{AB}$ 的模，其值为

$$|\mathrm{AB}|=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2+(2-1)^2}=3$$