

量子物理学

下 册

〔美〕R·埃斯伯格 R·瑞斯尼克 著

北京工业学院出版社

量子物理学

下册

[美] R·埃斯伯格 R·瑞斯尼克 著

吴伯泽 暴永宁 黄惠英 译

北京工业学院出版社

内 容 简 介

本书从初等量子力学观点出发，清楚地论述了几乎全部重要的量子系统的各种性质，并且特别注意量子力学的应用。书中的材料丰富，讨论由浅入深，各章都有很多例题、思考题和习题。因此，本书既适合作为教材，也适合作为自学材料使用。

本书可供大专院校物理系师生、研究生和有关的研究人员阅读。

量 子 物 理 学

下 册

〔美〕R·埃斯伯格 R·瑞斯尼克 著

吴伯泽 暴永宁 黄惠英 译

北京工业学院出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经营

通县向阳印刷厂印刷



787×1092毫米 16开本 20.5印张 510千字

1987年12月第一版 1987年12月第一次印刷

ISBN 7-81013-040-4/O·89

印数：1—4000册 定价：3.40元

目 录

下 册

第十一章 量子统计学	(1)
11-1 引言	(2)
11-2 不可分辨性与量子统计	(3)
11-3 两种量子分布函数	(6)
11-4 各个分布函数的比较	(9)
11-5 结晶固体的比热	(13)
11-6 玻耳兹曼分布是量子分布的近似	(16)
11-7 激光	(18)
11-8 光子气体	(22)
11-9 声子气体	(23)
11-10 玻色凝聚与液氦	(24)
11-11 自由电子气体	(29)
11-12 接触电势和热离子发射	(31)
11-13 系统状态的经典描述和量子描述	(33)
第十二章 分子	(39)
12-1 引言	(39)
12-2 离子键	(40)
12-3 共价键	(42)
12-4 分子光谱	(45)
12-5 转动光谱	(46)
12-6 振动-转动光谱	(49)
12-7 电子光谱	(52)
12-8 喇曼效应	(54)
12-9 核自旋和对称特性的确定	(56)
第十三章 固体——导体和半导体	(64)
13-1 引言	(64)
13-2 固体的类型	(65)
13-3 固体的能带理论	(66)
13-4 金属的电传导	(70)
13-5 自由电子的量子模型	(72)
13-6 电子在周期性点阵中的运动	(77)
13-7 有效质量	(80)

13-8 半导体	(83)
13-9 半导体元件	(88)
第十四章 固体——超导体和磁性质	(98)
14-1 超导性	(98)
14-2 固体的磁性质	(106)
14-3 顺磁性	(107)
14-4 铁磁性	(110)
14-5 反铁磁性与亚铁磁性	(115)
第十五章 原子核模型	(119)
15-1 引言	(120)
15-2 原子核性质概述	(121)
15-3 原子核的大小和密度	(125)
15-4 原子核的质量和丰度	(129)
15-5 液滴模型	(136)
15-6 幻数	(140)
15-7 费米气模型	(141)
15-8 壳层模型	(144)
15-9 壳层模型的预言	(149)
15-10 集体模型	(154)
15-11 小结	(158)
第十六章 原子核衰变和核反应	(163)
16-1 引言	(163)
16-2 α 衰变	(164)
16-3 β 衰变	(171)
16-4 β 衰变相互作用	(181)
16-5 γ 衰变	(186)
16-6 穆斯堡尔效应	(191)
16-7 原子核反应	(193)
16-8 原子核的激发态	(202)
16-9 裂变和反应堆	(205)
16-10 聚变和各种元素的起源	(210)
第十七章 基本粒子	(220)
17-1 引言	(220)
17-2 核力	(221)
17-3 同位旋	(232)
17-4 π 介子	(234)
17-5 μ 子	(241)
17-6 奇异性	(243)
17-7 几种基本相互作用和守恒律	(249)

17-8 几个基本粒子家族	(252)
17-9 超荷和夸克	(255)
附录A 狭义相对论	(262)
附录B 加速电荷的辐射	(279)
附录C 玻耳兹曼分布	(282)
附录D 卢瑟福的散射轨道	(287)
附录E 复数	(289)
附录F 方势阱的不含时薛定谔方程的数值解	(292)
附录G 方势阱的不含时薛定谔方程的解析解	(297)
附录H 简谐振子势的不含时薛定谔方程的级数解	(303)
附录I 球极坐标中的拉普拉斯算符和角动量算符	(309)
附录J 托马斯进动	(312)
附录K LS耦合中的不相容原理	(315)
附录L 参考文献	(318)
附录M 某些习题的答案	(320)
附录N 常用常数和换算因子	(322)

第十一章 量子统计学

11-1 引言

统计学的作用；玻耳兹曼分布

11-2 不可分辨性与量子统计

玻耳兹曼分布不适用于量子体系；对不可分辨性的回顾；费米子抑制因子的再次讨论；玻色子增强因子的推导

11-3 两种量子分布函数

热平衡；细致平衡；结合细致平衡推导玻色分布；玻耳兹曼分布和玻色子增强因子；由同一方式运用费米子抑制因子推导费米分布

11-4 各个分布函数的比较

归一化常数；费米能；费米分布在低温下表现的定性解释；高能情况下经典分布和量子分布的融合；低能情况下经典分布介于两个量子分布之间；分布函数比较一览表

11-5 结晶固体的比热

杜隆-珀替定律；爱因斯坦的工作；德拜的工作；弹性振动模；玻耳兹曼分布可用于比热研究；德拜温度；德拜公式

11-6 以玻耳兹曼分布近似代替两个量子分布

玻耳兹曼因子；玻耳兹曼分布可用于气体分子；核磁共振

11-7 激光

自发发射、吸收和受激发射之间的关系；爱因斯坦 A 系数和爱因斯坦 B 系数；发射-吸收比的推导；光抽运造成粒子数翻转；相干性；红宝石激光器的能级；激光器的构造；玻色子增强因子在激光器中得到体现

11-8 光子气体

光子的玻色分布；普朗克辐射谱的推导

11-9 声子气体

对声子的定性讨论

11-10 玻色凝聚与液氮

根据盒中粒子模型得出玻色分布的归一化因子；理想玻色气体粒子的平均能量；简并效应；与粒子间距-德布罗意波长比有关的简并项；玻色凝聚；估算氮的简并项；液氮的性质；用玻色子增强因子进行解释

11-11 自由电子气体

理想费米气体的粒子平均能量；电子气体；传导电子的能量分布；传导电子与比热

11-12 接触电势和热离子发射

观测性质及用费米分布进行的解释；功函数和费米能

11-13 对系统状态的经典描述和量子描述

相空间；量子原理对相格最小体积的限制；与熵的关系

思考题

习题

11-1 引 言

随着物理系统内成员数目的增加，对它的详细描述就会越来越复杂。因此，当我们研究的对象从单电子原子转向多电子原子、分子，最后又转向固体时，自然会料到在详尽处理这些系统时，情况会步步复杂，困难会步步加深。举一个大家熟悉的例子：对处于标准状态下的1升气体(约含 10^{22} 个分子)这样一个系统，若要描述其中一个分子，情况之复杂自是可想而知的。幸运的是，对于确定有关该系统的最重要的性质、即确定该气体的压强和温度等可测量性质来说，如上的详尽信息一般来说并非必须。而且，一个含有大量成员的系统，其许多为我们观察到的简单性质，恰恰就是这种众多性造成的。现在就来解释这一点。

在将力学的普遍原理(如守恒定律等)运用于一个多粒子系统时，可以忽略有关各个粒子的运动和它们之间相互作用的详情，而单单根据统计观点推导出系统行为的有关简单性质。事实上，即使只从统计角度进行一些初步研究，也使我们能够描述和解释许多方面的现象，并获得有关真实物理系统行为的许多知识。这是因为，如果系统中含有的粒子数目大到足以使统计研究得以进行，则该系统的观测性质与其可能发生的行为之间就会存在确定的关系。比如，有一个含有大量经典粒子的、处于热平衡温度 T 的孤立系统。为了实现并保持这一平衡状态，粒子间必须能够彼此交换能量。在这一过程中，每个粒子的能量都会有起伏，有时比该体系中每个粒子的平均能量高些，有时又比它低些。然而，经典统计力学理论的要求是一个粒子前前后后所具有的能量的分布，或者说在某一时刻系统中各个粒子所具有的能量的分布，应遵从于一个确定的几率分布函数。这一分布函数叫玻耳兹曼分布，它与温度 T 有关。知道了系统中各个粒子占有各种能态的几率，就能利用这些几率计算当粒子处于这些状态时在整个系统中粒子的许多重要性质的平均值，从而确定整个系统的相应性质。

下面举一个较为具体的例子，大家在过去学习物理时，可能已经接触到这个例子。这就是经典气体的种种性质与气体分子的麦克斯韦速率分布之间的关系。麦克斯韦分布是玻耳兹曼分布的一个特殊情况，它由分布函数 $N(v)$ 所描述。 $N(v)dv$ 给出了分子速率介于 v 到 $v+dv$ 之间的几率。由此，我们便可以算出平均速率(它与分子具有的动量值有关)、方均速率(它与分子具有的能量有关)等物理量。由这些平均量，我们又可算出压强(与动量有关)、温度(与能量有关)等观测性质。

统计方法还可用来近似地处理只包含一定数目——但不是很大——粒子的系统。比如，我们在第十五章讲述原子核的费米气体模型时，将对一个原子核(其中的核子数为 10^2 数量级)进行统计处理。不过，这一处理不能用玻耳兹曼分布，该分布不适用于量子化粒子，而核子却是量子化的。

在这一章里，我们将寻求适用于量子化粒子的分布函数。下面会看到，这样的分布有两种：一是玻色分布，适用于本征函数对于任意两个粒子的“交换标记”为对称的粒子系统(如 α 粒子和光子的系统)；一是费米分布，适用于本征函数对于“交换标记”为反对称的粒子系统(如电子、质子和中子的系统)。

首先，我们将回顾一下经典统计力学的推导过程——附录C中有详细叙述，第一章里也用到过。玻耳兹曼分布正是经典统计力学的结果。然后，我们会看到，量子化考虑迫使经典过程发生重要变化。再下来，我们将从由玻耳兹曼分布出发的简单平衡态推得两个量子分布函数。随后，通过比较各个分布函数，我们会总结出有用的深刻理解。最后，我们又会看到应用有关各种分布的各类例子，并将理论预言与实验事实进行比较；在此过程中，我们将研究许多重要的现象，如超流、固体的电子比热和点阵比热、激光等。

11-2 不可分辨性与量子统计

玻耳兹曼分布是经典物理学的、而不是量子物理学的一个带有根本性意义的结果。然而，它却常被用来讨论量子物理学。这一点，我们在前面已有、后面还会继续有体会，为此，我们在本书中给出两种大相径庭、但又殊途同归——都得出玻耳兹曼分布——的论证。它们都收入附录C。读者最好现在就把这部分内容读一遍，或反复读上几遍。

附录C的第一种论证涉及到这样一个问题，即计数热平衡系统内确定的总能量在各个全同实体之间进行分配的可分辨方式有多少种。这时若设想各种可能的分配方式都具有相同的几率，就会得出玻耳兹曼分布。所谓可分辨，是指这样一种情况，即若某一分配方式和另一分配方式在能量的分配上一样，只是实体的安排不同，就要看做两种分配方式。这就是说，在进行排布的过程中，各个全同实体要看作可以区分开的。在第二种论证中，我们设想一个实体对某个特是能态的占据，完全不会妨碍、也不会增加另一个全同实体占据该能态的机会。在这一论证中，也同样要假设系统能量的各种可能的分配是等几率的。

在经典物理学中，这些假设是完全可以接受的。在量子物理学中，各种可能的分配方式都具有相同几率这一假设仍被接受下来，但别的假设则不再成立。我们在9-2节中看到，如果系统中的两个全同粒子（即全同实体）的波函数有了一定的重叠，不可分辨性就会造成非常重要的非经典效应。效应之一，就是可测量到的结果不能靠给全同粒子“做标记”的方法得出。既然没有什么方法可用来确切地一一认定系统中的全同粒子，也就没有办法分辨开两个只由重新排布所形成的分配局面，即令重新排布是在两个不同的量子态（能态）间进行的。因此，“对系统的能量进行可分辨的分配”这一经典说法便不再成立。量子化粒子不可分辨性的另一个效应是，某一特定量子态的存在，会以确定的方式影响另一个全同粒子处于该态的机会。我们已经知道，如果是由反对称的总本征函数描述的两个全同粒子，既象电子这类服从不相容原理的粒子，其中的一个在某个量子态上的存在，就完全排除了另一个也处于该态的可能性。下面我们很快还会看到，如果是用对称的总本征函数描述的两个全同粒子，即象 α 粒子等不服从不相容原理的粒子，若其中有一个处于某一量子态上，便会增加另一个也处于同一态上的机会。

当然，如果系统虽含有全同的量子化粒子，但所处的环境却使得任何两个粒子波函数的重叠可以忽略，那么，这些粒子实际上确实是可以分辨开的。在这种情况下，不可分辨性的效果变得可以忽略不计，这正是9-2节和9-4节中提到过的内容。这样一来，玻耳兹曼分布所需要的假设条件就得到满足。气体就属于这种情况。就实验室中一般所能遇到的密度而言，气体分子——它们当然都是全同的量子化微粒——的波函数不会有什么重叠，因而可以用玻耳兹曼分布精确地预言其性质。

在量子统计中，由反对称的本征函数描述的粒子叫做费米子，由对称的本征函数描述的粒子叫做玻色子。这就是说，一个由若干个全同的费米子组成的系统，如果其中有任意两个粒子互换标记，本征函数就会改变符号；而由若干个全同的玻色子组成的系统，在互换标记后，本征函数并不变号。表9.1列出了一些费米子和玻色子。费米子和玻色子的命名，是为了纪念两位对量子统计学的发展作出杰出贡献的物理学家——费米 (E. Fermi) 和玻色 (S. Bose)。

一个费米子会阻止另一个全同费米子也处于同一量子态上，这就是不相容原理。它和它的某些极其重要的结果，是我们在研究多电子原子时已经熟悉的内容。对不相容原理可作出更为正式的表述，这就是：如果已有 n 个费米子处于某个量子态，则再有一个费米子加入该态的几率，应比倘不存在量子力学的不可分辨性要求时为低，降低的倍数为 $(1-n)$ ，称为抑制因子。如果 $n=0$ ，该因子取值 $1-0=1$ ，因而第一个费米子进入该量子态的几率不受影响。但若 $n=1$ ，该因子便取值 $1-1=0$ ，因而第二个费米子绝对地被排除在该态之外。应该注意，该因子自动地限制了处于任何一个量子态上的费米子数目，使之只能为 $n=0$ 或 $n=1$ ，这与不相容原理是一致的。

前面我们未能有机会证明，处在某个量子态的一个玻色子，会增加第二个全同玻色子也处于该态的几率，这是因为自提出不可分辨粒子的量子力学以来，我们还没有与玻色子打过多少交道。现在我们便来作一证明。

考虑含有两个玻色子的系统，其本征函数为对称的，如(9-8)式所示：

$$\psi_s = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2) + \psi_\beta(1)\psi_\alpha(2)]$$

我们都记得， $\psi_\alpha(1)$ 表示标记着1号的粒子处于量子态 α ， $\psi_\beta(2)$ 表示标记着2号的粒子处于量子态 β ，如此等等。虽说给粒子做了标记，但诸如几率密度 $\psi_s^* \psi_s$ 等可测量的量仍具有与标记无关的取值。我们还记得，由于因子 $1/\sqrt{2}$ 的存在，因此若 $\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)$ 和 $\psi_\beta(1)\psi_\alpha(2)$ 是归一化的，则 ψ_s 同样是归一化的。现在，令两个玻色子都处于同一量子态——比如 β 态——之上，这样，由于 $\alpha=\beta$ ，本征函数便成为

$$\begin{aligned} \psi_s &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_\beta(1)\psi_\beta(2) + \psi_\beta(1)\psi_\beta(2)] \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \psi_\beta(1)\psi_\beta(2) = \sqrt{2} \psi_\beta(1)\psi_\beta(2) \end{aligned}$$

而几率密度则为

$$\psi_s^* \psi_s = 2 \psi_\beta^*(1)\psi_\beta^*(2)\psi_\beta(1)\psi_\beta(2) \quad (11-1)$$

如果没有全同粒子的不可分辨性这一要求，这两个全同粒子所组成的系统又会有怎样的本征函数和几率密度呢？这样的本征函数是在提出不可分辨性要求之前直接解薛定谔方程求得的，因此应取(9-4)或(9-5)式的形式。我们采用(9-4)式：

$$\psi = \psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)$$

如果 $\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)$ 是归一化的，则本征函数 ψ 也是归一化的。对于我们要研究的情况，有 $\alpha=\beta$ ，因此有

$$\psi = \psi_\beta(1)\psi_\beta(2)$$

归一化的几率密度则为

$$\psi^* \psi = \psi_a^*(1) \psi_a^*(2) \psi_a(1) \psi_a(2) \quad (11-2)$$

(11-1)和(11-2)这两个几率密度都是归一化的，可以彼此进行比较。可以看出，两个玻色子处于同一量子态的几率 $\psi_a^* \psi_a$ ，为该系统由不满足不可分辨性量子力学要求的本征函数描述时，发生同样情况的几率之两倍。对此，我们可以这样说：两个玻色子处于同一状态的几率为经典粒子的两倍。这样，当一个玻色子处于某特定量子态时，第二个玻色子也处于该态的机会将比经典粒子时大一倍。而经典粒子在占据量子态时，彼此间不存在什么特殊关系。

例11-1 将三个全同玻色子处于同一量子态上的几率，与三个经典粒子处于同一状态的几率进行比较。

看一下例9-3中关于三个玻色子的系统的本征函数，可看出其中包括诸如 $\psi_a(1)\psi_a(2)\psi_a(3)$ 的项共 $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ 项，而归一化常数为 $1/\sqrt{3!}$ 。令 $\alpha = \beta = \gamma$ ，使三个玻色子处于同一量子态上，几率密度将包含 $(3!)^2$ 个相同的项，但系数为归一化因子的平方，即 $(1/\sqrt{3!})^2$ 。所以，三个玻色子处于同一状态的几率，是三个全同经典粒子处于同一状态的几率的 $(3!)^2/3!$ 倍。因此，玻色子系统的这一几率增大为 $3!$ 倍。

例11-1的结果显然可推广到 n 个处于同一量子态的全同玻色子。可以证明，发生这种情况的几率，是 n 个全同经典粒子处于同一状态几率的 $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$ 倍。下面这个问题是从另一个角度提出的，它的结果十分有用。这个问题是：在玻色子从各种初态向各种终态跃迁的系统中，如果在某个特定的量子终态上已有 n 个玻色子，那么，再有一个玻色子跃迁到这一能态上的几率是怎样的？

令 P_1 表示将第一个玻色子加到这一特定的、在此之前尚未被占据的状态上的几率。如果不存在我们这里正在讨论的所谓增强效应，接连增加每一个玻色子的几率都是不变的。由于各个粒子都是独立地加入进来的，而独立事件的几率是相乘的，因此， n 个玻色子处于这一状态的几率就是 P_1 的 n 次幂，即

$$P_n = (P_1)^n$$

然而， n 个玻色子在这一状态上的实际几率值应增大到

$$P_n^{\text{玻色}} = n! P_n = n! (P_1)^n$$

$n+1$ 个玻色子处于该态的实际几率为

$$P_{n+1}^{\text{玻色}} = (n+1)! P_{n+1}$$

$$(n+1)! = (n+1)n! , P_{n+1} = (P_1)^{n+1} = (P_1)^n P_1 = P_n P_1$$

故有

$$P_{n+1}^{\text{玻色}} = (n+1)n! P_n P_1$$

即

$$P_{n+1}^{\text{玻色}} = (1+n)P_1 P_n^{\text{玻色}} \quad (11-3)$$

$P_n^{\text{玻色}}$ 是 n 个玻色子处于该态的实际几率。我们前面提出的问题是这样的：“……如果在某个

特定的量子终态上已有 n 个玻色子……?”因此答案是 $(1+n)P_1$ 。不过, P_1 是不存在增强效应时增加任何一个玻色子的几率, 所以得到的结论是: 如果已有 n 个玻色子处于某一量子态上, 则再增加一个玻色子的几率, 将等于不存在量子力学的不可分辨性要求时的 $(1+n)$ 倍。

11-3 两种量子分布函数

要想求得满足量子微粒的不可分辨性要求的分布函数, 最常用的作法是对附录 C 的第一种论证进行满足不可分辨性要求的修正, 然后将计算过程推广到粒子数目和能态个数都很大的情况。这里我们要用一个与附录 C 的第二种论证相类似、但却简单得多的过程。

光初步考虑一个处于热平衡的全同经典粒子系统。粒子间会交换能量, 而其作用是独立的, 即一个粒子不会影响其他粒子的特定行为。集中注意这些粒子能态中特定的两个; \mathcal{E}_1 和 \mathcal{E}_2 , 并令占有这两个能态的平均粒子数为 n_1 和 n_2 。再令此系统中一个粒子由能态 1 到能态 2 的平均跃迁率为 $R_{1 \rightarrow 2}$, 而一个粒子由能态 2 到能态 1 的平均跃迁率为 $R_{2 \rightarrow 1}$ 。 $R_{1 \rightarrow 2}$ 和 $R_{2 \rightarrow 1}$ 都是每个粒子的跃迁率, 即每个粒子每秒钟的跃迁几率。 n_1 是有机会进行这一跃迁的粒子数, $R_{1 \rightarrow 2}$ 是每个粒子每秒钟获得这一机会的几率, 这样, 该系统中的粒子进行 $1 \rightarrow 2$ 这一跃迁的总跃迁率为 $n_1 R_{1 \rightarrow 2}$ 。该系统中粒子进行 $2 \rightarrow 1$ 这一跃迁的总跃迁率为 $n_2 R_{2 \rightarrow 1}$ 。

如果这两个总跃迁率相等, 即

$$n_1 R_{1 \rightarrow 2} = n_2 R_{2 \rightarrow 1} \quad (11-4)$$

且如果在所有两两成对的粒子能态间的“向外”与“向内”的总跃迁率都相等, 那么, 所有能态上都将保持不随时间变化的恒定平均粒子数。而恒定的平均粒子数正标志着系统处于热平衡。方程(11-4)是保证平衡态得以维持的条件, 而平衡态又是我们始终设定的情况。从原理上说, 只要在互相关联的、各包含几个能态的若干组循环性跃迁内实现出入相抵, 那么, 即使每一对能态上不满足(11-4)式给出的总跃迁关系, 平衡态也能得以维持。不过, 我们未发现表明实际上果然存在这种情况的证据; 而从另一方面来说, 可以将(11-4)式看作一条假设, 叫做细致平衡, 由它可得出与实验相符的结果, 从而证明了此式本身的正确性。

注意, (11-4)式意味着

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{R_{2 \rightarrow 1}}{R_{1 \rightarrow 2}} \quad (11-5)$$

在热平衡时, 对经典系统来说, 能态 1 上的平均粒子数, 或者说可在能态 1 上找到的粒子数 n_1 , 是由玻耳兹曼分布——附录 C 中有推导过程——按该能态的能量值 \mathcal{E}_1 给出的。所以

$$n_1 = n(\mathcal{E}_1) = A e^{-\mathcal{E}_1/kT} \quad (11-6)$$

对 n_2 也有类似的方程。这样, 这两个粒子数的比值为

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{e^{-\mathcal{E}_1/kT}}{e^{-\mathcal{E}_2/kT}} \quad (11-7)$$

(11-5)和(11-7)式表明, 每个经典粒子的跃迁率之比一定遵从

$$\frac{R_{2 \rightarrow 1}}{R_{1 \rightarrow 2}} = \frac{e^{-g_1/kT}}{e^{-g_2/kT}} \quad (11-8)$$

现在, 我们将(11-4)这一热平衡条件用于玻色子系统。此时的(11-4)式应写成

$$n_1 R_{1 \rightarrow 2}^{\text{玻色子}} = n_2 R_{2 \rightarrow 1}^{\text{玻色子}} \quad (11-9)$$

这里, n_1 和 n_2 是我们所关心的两个量子态上的平均玻色子数, $R_{1 \rightarrow 2}^{\text{玻色子}}$ 和 $R_{2 \rightarrow 1}^{\text{玻色子}}$ 为每个玻色子在这两个能态间的跃迁率。这两个跃迁率可通过有关经典粒子的公式表示, 即用经典粒子的跃迁率, 乘以11-2节末推导出的增强因子 $(1+n)$ 。这是因为, 当 $1 \rightarrow 2$ 这一跃迁发生时, 平均说来在第二个量子态上会有 n_2 个玻色子, 实际的每个粒子每秒的跃迁几率 $R_{1 \rightarrow 2}^{\text{玻色子}}$, 就要比不满足不可分辨性要求的经典粒子跃迁率 $R_{1 \rightarrow 2}$ 大 $(1+n_2)$ 倍。随着 n 从近似于0(几乎未容纳玻色子)变为越来越大的数值(容纳越来越多的玻色子), 增强因子就从近似于(几乎不增强)变为越来越大的值(增强作用越来越显著)。归纳起来便是:

$$R_{1 \rightarrow 2}^{\text{玻色子}} = (1+n_2)R_{1 \rightarrow 2} \quad (11-10)$$

类似地

$$R_{2 \rightarrow 1}^{\text{玻色子}} = (1+n_1)R_{2 \rightarrow 1} \quad (11-11)$$

由(11-9)、(11-10)和(11-11)三式, 可得到

$$n_1(1+n_2)R_{1 \rightarrow 2} = n_2(1+n_1)R_{2 \rightarrow 1}$$

即

$$\frac{n_1(1+n_2)}{n_2(1+n_1)} = \frac{R_{2 \rightarrow 1}}{R_{1 \rightarrow 2}} = \frac{e^{-g_1/kT}}{e^{-g_2/kT}} \quad (11-12)$$

在得出此式时, 我们又用到了(11-8)这一玻耳兹曼分布下单位粒子的经典跃迁率之比的公式。(11-12)式又可写成

$$\frac{n_1}{1+n_1} e^{g_1/kT} = \frac{n_2}{1+n_2} e^{g_2/kT} \quad (11-13)$$

等式的左边不含与状态2有关的量, 右边则不含与状态1有关的量, 所以, 这两边都共同等于一个与具体能态没有什么特殊关系, 而只与双方的共性有关的值。既然左右两边都共同与平衡温度 T 相联系, 看来 T 就是这个共性。这样, 我们可以得出结论说, (11-13)式的两边都等于 T 的某个函数。为方便起见, 将这个函数写成 e^{-a} , 而 $a = a(T)$ 。令(11-13)的左边与之相等, 便有

$$\frac{n_1}{1+n_1} e^{g_1/kT} = e^{-a}$$

即

$$\frac{n_1}{1+n_1} = e^{-(\alpha + \mathcal{E}_1/kT)}$$

所以

$$n_1 = n_1 e^{-(\alpha + \mathcal{E}_1/kT)} + e^{-(\alpha + \mathcal{E}_1/kT)}$$

即

$$n_1 [1 - e^{-(\alpha + \mathcal{E}_1/kT)}] = e^{-(\alpha + \mathcal{E}_1/kT)}$$

因此

$$n_1 = \frac{e^{-(\alpha + \mathcal{E}_1/kT)}}{1 - e^{-(\alpha + \mathcal{E}_1/kT)}} = \frac{1}{e^\alpha e^{\mathcal{E}_1/kT} - 1}$$

如果用(11-13)式的右边,我们会得到与之完全类似的有关 n_2 与 \mathcal{E}_2 的关系。事实上,这个结果可用在任一能量为 \mathcal{E} 的量子态上玻色子的平均占有数目(或称可能数目),即

$$n(\mathcal{E}) = \frac{1}{e^\alpha e^{\mathcal{E}/kT} - 1} \quad (11-14)$$

这就是玻色分布,它给出了处于平衡温度 T 的系统中,在能量为 \mathcal{E} 的量子态上玻色子的可能数目。

对费米子的平衡系统也可采用同样的推导方式。热平衡条件(11-4)对费米子为

$$n_1 R_{1 \rightarrow 2}^{\text{费米子}} = n_2 R_{2 \rightarrow 1}^{\text{费米子}} \quad (11-15)$$

这里, $R_{1 \rightarrow 2}^{\text{费米子}}$ 为每个费米子从量子态1到量子态2的跃迁率, $R_{2 \rightarrow 1}^{\text{费米子}}$ 为每个费米子从量子态2到量子态1的跃迁率, n_1 和 n_2 是这两个态上的平均费米子数。由于不相容原理,处于这两个态上的瞬时粒子数非0即1。由于热平衡状态的统计本性,粒子数目会随时间变化,其平均值为 n_1 和 n_2 。费米子的跃迁率可通过有关经典粒子的公式来表达,就是经典粒子的跃迁率乘以11-2节中讨论过的抑制因子 $(1-n)$ 。 n 是处于某一量子态上的平均粒子数, $(1-n)$ 是抑制因子的平均值,它们正是这里需要的两个量。随着 n 从近于0(几乎一直不容纳费米子)变为近于1(差不多永远容纳着一个费米子),抑制因子便从 ~ 1 (几乎不抑制)变为 ~ 0 (近于完全抑制),这与不相容原理是一致的。于是便有

$$R_{1 \rightarrow 2}^{\text{费米子}} = (1-n_2)R_{1 \rightarrow 2} \quad (11-16)$$

和

$$R_{2 \rightarrow 1}^{\text{费米子}} = (1-n_1)R_{2 \rightarrow 1} \quad (11-17)$$

这里, $R_{1 \rightarrow 2}$ 和 $R_{2 \rightarrow 1}$ 是不满足导致费米子不相容原理的不可分辨性要求的经典粒子的跃迁率。

由(11-15)、(11-16)和(11-17)三式,可得到

$$n_1(1-n_2)R_{1 \rightarrow 2} = n_2(1-n_1)R_{2 \rightarrow 1}$$

即

$$\frac{n_1(1-n_2)}{n_2(1-n_1)} = \frac{R_{2 \rightarrow 1}}{R_{1 \rightarrow 2}} = \frac{e^{-\mathcal{E}_1/kT}}{e^{-\mathcal{E}_2/kT}} \quad (11-18)$$

这里，我们又用到了(11-8)式这一服从玻耳兹曼分布的单位粒子的经典跃迁率之比的公式。(11-18)式可写成

$$\frac{n_1}{1-n_1} e^{\mathcal{E}_1/kT} = \frac{n_2}{1-n_2} e^{\mathcal{E}_2/kT} \quad (11-19)$$

通过与前面一样的推理方式，可以看出此方程的两边都等于 T 的某个函数，仍记为 $e^{-\alpha}$ ，且 $\alpha = \alpha(T)$ 。令方程的左边等于这个公共项，得到

$$\frac{n_1}{1-n_1} e^{\mathcal{E}_1/kT} = e^{-\alpha}$$

即

$$\frac{n_1}{1-n_1} = e^{-(\alpha + \mathcal{E}_1/kT)}$$

所以

$$n_1 = -n_1 e^{-(\alpha + \mathcal{E}_1/kT)} + e^{-(\alpha + \mathcal{E}_1/kT)}$$

即

$$n_1 [1 + e^{-(\alpha + \mathcal{E}_1/kT)}] = e^{-(\alpha + \mathcal{E}_1/kT)}$$

因此

$$n_1 = \frac{e^{-(\alpha + \mathcal{E}_1/kT)}}{1 + e^{-(\alpha + \mathcal{E}_1/kT)}} = \frac{1}{e^{\alpha} e^{\mathcal{E}_1/kT} + 1}$$

因为对于所有的各个量子态都可得到同一个结果，所以可去掉下标1，该式便变为

$$n(\mathcal{E}) = \frac{1}{e^{\alpha} e^{\mathcal{E}/kT} + 1} \quad (11-20)$$

这便是费米分布，它给出了在温度为 T 的平衡系统中，处于能量为 \mathcal{E} 的量子态上的费米子的平均数目，亦即可能数目。

11-4 各个分布函数的比较

先来看(11-6)式这一玻耳兹曼分布

$$N(\mathcal{E}) = A e^{-\mathcal{E}/kT}$$

若令常数 A 取 $A = e^{\alpha}$ 的形式，则玻耳兹曼分布为

$$n_{\text{玻耳兹曼}}(\mathcal{E}) = \frac{1}{e^{\alpha} e^{\mathcal{E}/kT}} \quad (11-21)$$

由(11-14)可知玻色分布为

$$n_{\text{玻色}}(\mathcal{E}) = \frac{1}{e^{\alpha} e^{\mathcal{E}/kT} - 1} \quad (11-22)$$

而(11-20)表明费米分布为

$$n_{\text{费米}}(\mathcal{E}) = \frac{1}{e^{\alpha} e^{\mathcal{E}/kT} + 1} \quad (11-23)$$

在这些关系式中, k 为玻耳兹曼常数, T 为系统的平衡温度。对于给定的系统和温度, 参数 α 由系统中包含的粒子总数确定。比如, 在附录C的末尾, 我们计算了适用于谐振子系统的特定玻耳兹曼分布中的 $A = e^{\alpha}$ 的值。我们在此例中定义 $n_{\text{玻耳兹曼}}(\mathcal{E})$ 是发现一个特定的谐振子处于能态 \mathcal{E} 的几率的量度。结果得到 $A = 1/kT$ 。如果我们在此例中以发现任意一个谐振子处于这一能态的几率或位于该态上的谐振子的可能数目来定义 $n_{\text{玻耳兹曼}}(\mathcal{E})$, 显然就会看出 $A = N\mathcal{E}/kT$, 其中 $N\mathcal{E}$ 是系统中谐振子的总数。这后一个 $n_{\text{玻耳兹曼}}(\mathcal{E})$ 给出了经典粒子处在能态 \mathcal{E} 的可能数目, 因此与我们目前的定义相一致。换句话说, A 是个归一化常数, 在给定温度 T 下, A 的值由玻耳兹曼分布所描述的系统中粒子的总数确定。该分布式中出现的参数 α 也是如此。玻色分布式中出现的 α , 在给定 T 后也由系统中的玻色子总数确定, 分布式本身则给出了处于能态 \mathcal{E} 的玻色子的可能数目。费米分布也有同样的情况。

图11-1给出了 T 和 α 取三组不同值时以能量为横坐标的玻耳兹曼曲线。注意, 这种分布曲线完全是指数型的, 且能量 \mathcal{E} 每增大 kT , 函数值就减小为原来的 $1/e$, 这在第一章里已有过较详细的论述。

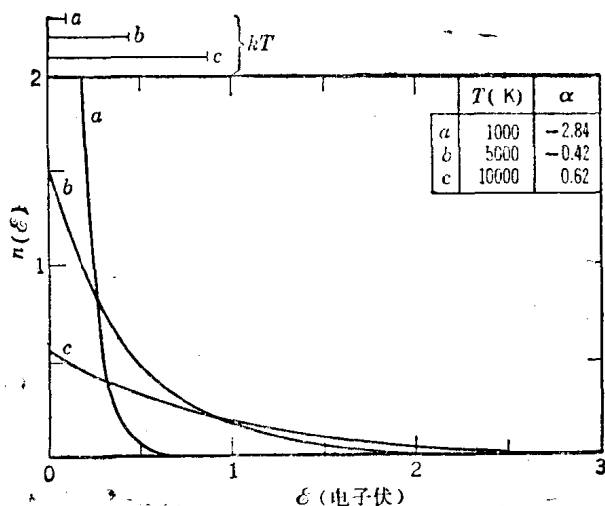


图11-1 三组不同的 T 和 α 取值下以能量为横坐标的玻耳兹曼分布曲线。这一分布函数完全是指数型的; 能量每增大 kT , 函数值就减为原来的 $1/e$ 。各个温度下等于 kT 的能量值在图的上方标出。该图所取的粒子密度与图11-3相同。选定了密度, 任意温度 T 下的 α 值便可确定。

图11-2 给出了三个不同 T 值时以能量为横坐标的玻色分布曲线。这里均取 $\alpha = 0$, 故 $e^{\alpha} = 1$, 这正是后面要讲到的光子气体的情况。注意, 当能量值远小于 kT 时, 玻色分布的每个量子态上的粒子数要高于玻耳兹曼分布。这是由于玻色分布律的分母项中含有 -1 的缘故。然而, 当能量远大于 kT 时, 该分布便会接近玻耳兹曼分布所特有的指数形式, 这是因为此时 (11-22) 式中的指数项远比 -1 为大的缘故。在这样的能量区域内, 每个量子态上的平均粒子数将远小于1。

图11-3给出了四组不同的 T 和 α 下以能量为横坐标的费米分布的函数曲线。由于不相容原理, 每个量子态上的粒子数不能大于1。这便解释了这类曲线在低能量处与前两种分布——它们都不存在对共同占有一个能态的限制——曲线截然不同。如果我们定义 $\mathcal{E}_F = -\alpha kT$

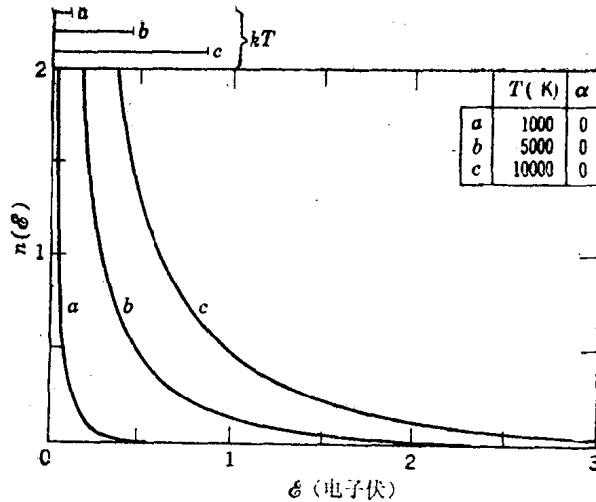


图11-2 三种不同 T 值下以能量为横坐标的玻色分布函数, α 值均取为零。在能量值相对于 kT 而言很大时, 该函数接近于玻耳兹曼分布的指数形式, 而在能量小于 kT 时, 该函数将大于玻耳兹曼分布。当能量趋于零时, 分布值趋向于无穷大。与每个温度 T 对应的 kT 值大小在图的上方给出。

为费米能, 便有 $\alpha = -\epsilon_F/kT$, (11-23) 式便可表示成更方便的形式

$$n_{\text{费米}}(\epsilon) = \frac{1}{e^{(-\epsilon_F)/kT} + 1} \quad (11-24)$$

这样表示有利于对它进行解释。比如, 对于 $\epsilon \ll \epsilon_F$ 的各态, 此式中的指数项在低温情况下接近于零, 故 $n_{\text{费米}}=1$ 。即这样的能态上各容纳一个费米子。对于 $\epsilon \gg \epsilon_F$ 的各态, 分母中的指数项在低温情况下会占有优势, 此时费米分布便接近于玻耳兹曼分布。注意, 在这一区域内, 每个量子态上的平均粒子数目要远远小于1。在 $\epsilon = \epsilon_F$ 时, 这一量子态上的平均粒子数是 $1/2$ 。

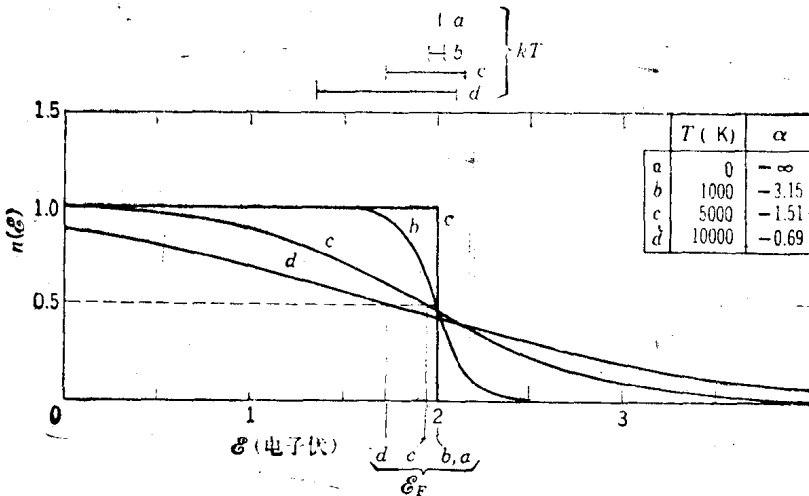


图11-3 四组不同的 T 和 α 值下以能量为横坐标的费米分布函数。不相容原理限定了每个量子态上至多只能有一个粒子。每条曲线的费米能 ϵ_F 在图的下方标出, 能量 kT 的大小在上方给出。在以 ϵ_F 为中心, 宽度约为 kT 的区域内, 曲线的下降令随温度的升高而越来越平缓。在高温高能量时, 函数接近玻耳兹曼分布。本图是以电子密度与钾(其费米能为2.1电子伏)相仿的物质为对象画出的。选定了密度, 就确定了费米能; 再给定 T , α 也就确定。