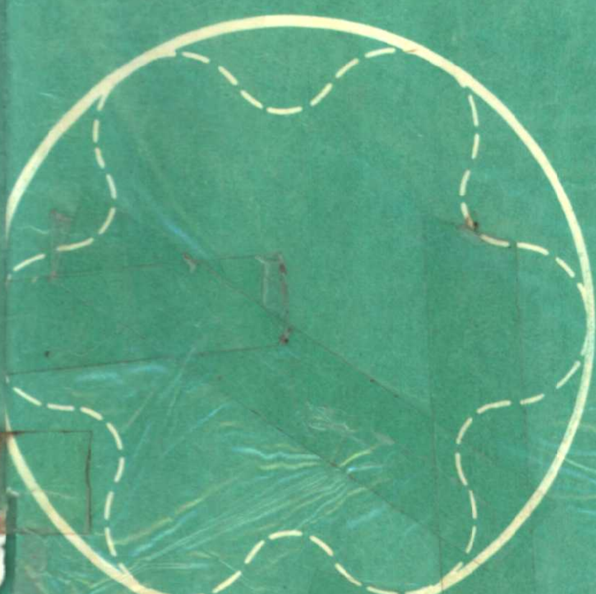
·近代物理学丛书·

量子力学提要与题析

熊钰庆　何宝鹏　周鹿声



华南理工大学出版社

·近代物理学丛书·

量子力学提要与题析

华南理工大学出版社

内容提要

本书选编了周世勋编《量子力学》(1961年版)和《量子力学教程》(1979年版)、曾谨言编《量子力学》(1982年版)和《量子力学导论》(1992年版)以及源自多本中外量子力学教科书、研究生入学试题等230余道题目，每题给出详解，部分还给出了多种解法。各章配有内容提要，便于复习和练习。

全书包括量子力学基础、波函数与薛定谔方程、算符表示力学量、表象理论、近似方法、散射问题、自旋与角动量、多体问题和相对论量子力学等九章。

本书可作为高等院校理工科师生的教学参考书，也可供有关科技工作者和研究生入学考试应试参考。

[粤] 新登字 12 号

量子力学提要与题析

熊钰庆　何宝鹏　周篪声

华南理工大学出版社出版发行

(广州 五山　邮码　510641)

广东省新华书店经销

华南师范大学印刷厂印装

开本 850×1168　1/32　印张　13.25　字数　336千

1994年1月第1版　1994年1月第1次印刷

印数 1—2000

ISBN 7—5623—0628—1

O·65　　定价：8.50元

前　言

本书的雏型是《量子力学题解一百例》和《量子力学题解二百例》.《二百例》原意是提供给参加广东省高教局委托华南师大物理系举办的"量子力学进修班"的兄弟院校教师和华南师大物理系青年教师作为进修和教学参考之用. 数十所兄弟院校交流使用后，求索者甚众，故多次印刷，最后整理成本书.

经整理后付印的题目共有232道，包括了周世勋编《量子力学》(1961年版)和《量子力学教程》(1979年版)的全部习题和曾谨言编著《量子力学》部分习题，以及源自多本中外量子力学教科书中的习题和硕士研究生入学试题，全部给出了较为详细的解答，还有不少题是一题多解，目的是开拓读者的思路，培养解题的灵活性. 习题中有一部分是为初学者引路用的，借以消除初学量子力学者常有的畏难心理，同时也有大量题目适应于有志深入钻研量子力学的读者和参加研究生入学考试的应试者，他们将从本书中获得启迪，促进解题能力的提高.

本书每章都有内容提要. 读者如能先阅读提要再看题解或自己动手解题，将会收到事半功倍的效果. 因为只有在初步掌握了量子力学基本原理和基本方法的基础上，才能理解题意进行解题，通过解题反过来加深对基本原理的理解和真正掌握量子力学的基本方法. 要想掌握量子力学的解题方法和技巧，以便为应用量子力学于实际问题中打下基础，除了阅读一些题解作为引路外，更重要的是要通过自己动脑动手解题，因此，题解集只能作为参考之用，不必细读，重要的是从中悟出解题的要旨和方法. 至于详细的数学演算，同类型的题目中，一定要自己动手全过程演算有代表性的范题，做到触类旁通，举一反三. 本书附录还列出了量

子力学解题中常用的数学公式和物理常数，以备查用.

解法中难免存在笨拙的方法，或不妥之处，甚至错误的解法，恳请读者指出商榷、批评指正.

编　者

1992 年 9 月

目　　录

第一章　量子力学基础

内容提要

1. 黑体辐射、光电效应等现象揭示了光的波粒二象性.

● 黑体辐射的困难由普朗克(Planck)在 1900 年引进了能量子 $h\nu$ 的假设后才得到解决. 普朗克得到了与实验结果符合得很好的经验公式——黑体辐射公式:

$$\rho_\nu \mathrm{d}\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}\mathrm{d}\nu$$

● 爱因斯坦(Einstein)引进了光量子(光子)的假说，成功地解释了光电效应. 爱因斯坦的光电效应方程是

$$\frac{1}{2}\mu v_m^2 = h\nu - W.$$

● 普朗克的理论开始突破了经典物理学在微观领域内的束缚，打开了认识光的微粒性的途径，而第一个完全肯定光除了波动性之外还具有微粒性的是爱因斯坦. 康普顿(Compton)效应又进一步证实了光具有粒子性. 下面两个关系式把光的二象性——波动性和粒子性联系起来:

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

$$p = \frac{h\nu}{c}n = \frac{h}{\lambda}n = \hbar k$$

等式左边是描述粒子特性的能量和动量，而等式右边则是描述波的特性的频率和波长(或角频率和波矢).

2. 原子结构的玻尔(Bohr)理论

● 1913 年玻尔对氢原子光谱线系的巴耳末(Balmer)公式

$$\nu = RC(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}), \quad n > n', n' = 1,2,3,\cdots, n = 2,3,4,\cdots$$

作出理论解释.玻尔在原子的核模型(行星模型)的基础上引进了定态的概念,并提出了量子化假设和频率条件

$$M = n\hbar = n\frac{h}{2\pi}$$

$$\nu = \frac{|E_n - E_m|}{h}$$

并利用经典力学推出了巴耳末公式.

• 索末菲(Sommerfeld)将玻尔的量子化条件推广为

$$\oint p\mathrm{d}q = nh$$

可应用于多个自由度的情况.

3. 微观粒子的波粒二象性假设

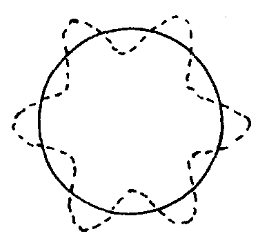
• 1924 年德布罗意(de Broglie)提出了微观粒子也具有波动性的假设,从而把光(波场)的波粒二象性推广到实物粒子具有波粒二象性:

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

$$p = \frac{h}{\lambda}n = \hbar k$$

这个公式称为德布罗意公式或德布罗意关系.

• 德布罗意把原子中的定态与驻波联系起来,即把粒子能量的量子化问题与有限空间中驻波的频率及波长的不连续性联系起来.在氢原子中作稳定圆形轨道运动的电子所相应的德布罗意驻波的一种波形如图所示.驻



波条件要求波绕原子核传播一周后应光滑地衔接起来,这对轨道有所限制,即轨道的圆周长应为波长的整数倍:

$$2\pi r = n\lambda, \quad n = 1,2,3,\cdots$$

应用德布罗意关系 $\lambda=\frac{h}{p}$ 可得到粒子的角动量

$$M = n\hbar$$

这正是玻尔的量子化条件.

• 与自由粒子联系的波是平面波

$$\Psi = Ae^{\frac{i}{\hbar}(p\cdot r-Et)}$$

称为德布罗意波.

• 1927 年戴维孙(Davisson)与革末(Germer)所做的电子衍射实验验证了德布罗意波的布在.

习　题

1. 利用普朗克的能量分布函数证明辐射的总能量与绝对温度的四次方成正比,并求比例系数.

2. 由黑体辐射公式导出维恩位移定律:能量密度极大值所对应的波长 λ_{max} 与温度 T 成反比,即

$$\lambda_{max}T = b(\text{恒量});$$

并近似计算 b 的数值,准确到二位有效数字.

3. 当光对自由质子散射时,求它的波长的改变.

4. 当氢原子放射一个具有频率 ω 的光子的时候,求它的反冲,并求当反冲时由于把能量传递给原子而产生的 ω 的改变.

5. 运动光源辐射时,辐射的频率要发生改变(多普勒效应),根据微粒的概念推导辐射的频率与光源运动速度的关系公式.

6. 利用玻尔——索末菲的量子化条件求:

(1)一维谐振子的能量;

(2)在均匀磁场中作圆周运动的电子轨道的可能半径.

7. 上题中已知外磁场 $H=10$ 特斯拉,玻尔磁子 $M_B=9\times10^{-24}$ 焦耳/特斯拉,试计算动能的量子化间隔 ΔE,并与 $T=4$K 及 $T=100$K 的热运动能量相比较.

8. 求与下列各粒子相关的德布罗意波的波长:

(1)能量为 100 电子伏的自由电子；

(2)能量为 0.1 电子伏，质量为 1 克的质点；

(3)温度 $T=1\text{K}$ 时，具有动能 $E=\dfrac{3}{2}kT$(k 为玻耳兹曼常数)的氦原子；

(4)一质量为 60 千克(相当人的质量)以 0.5 米/秒速度运动的粒子.

9. 电子从静止开始在电压 V 下加速，求电子的德布罗意波长 λ 与电压 V 的关系.

10. 设一电子为电势差 V 所加速，最后打在靶上. 若电子的动能转化为一个光子，求当这光子相应的光波波长分别为 5000 Å(可见光)，1 Å(x 射线)，以及 0.001 Å(γ 射线)时，加速电子所需的电势差是多少？

11. 两个光子在一定条件下可以转化为正负电子对. 如果两光子的能量相等，问要实现这种转化，光子的波长最大是多少？

12. 求在真空中以接近光的速度运动的电子的相速 u 和相应的德布罗意波波长之间的关系.

13. 一波包在 $t=0$ 时刻具有振幅 $a(k)=\exp\left[-\left(\dfrac{k-k_0}{q}\right)^2\right]$，求它的形式.

14. 试证明一个自由运动的微观粒子对应的德布罗意波的群速度 v_g 等于该粒子运动的速度 v.

解　　答

1. 普朗克能量分布函数为

$$\rho_\nu \, d\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

故辐射的总能量为

$$U = \int_0^\infty \rho_\nu \, d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \tag{1}$$

令$\frac{h\nu}{kT}=x$，即 $\nu=\frac{kTx}{h}$，得 $\nu^3=\frac{k^3T^3x^3}{h^3}$，$d\nu=\frac{kT}{h}dx$

代入(1)式得

$$U = \frac{8\pi k^4}{c^3 h^3} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \tag{2}$$

式中

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} = 6.4939 \tag{3}$$

代入(2)式得：

$$U = \frac{8}{15} \cdot \frac{\pi^5 k^4}{c^3 h^3} T^4 = \sigma T^4 \tag{4}$$

式中

$$\sigma = \frac{8}{15} \cdot \frac{\pi^5 k^4}{c^3 h^3}. \tag{5}$$

*　　　*　　　*

(3)式的积分计算如下：

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \int_0^\infty x^3 \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^\infty x^3 \sum_{n=1}^\infty e^{-nx} dx$$

令 $nx=y$，则上式变成

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} \int_0^\infty y^3 e^{-y} dy \tag{6}$$

式中

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \tag{7}$$

又注意到

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t = \Gamma(x)$$

$\therefore$
$$\int_0^{\infty} y^3 e^{-y} \mathrm{d}y = \Gamma(4) = 3! = 6 \tag{8}$$

将(7)、(8)两式代入(6)最后得

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 \mathrm{d}x}{e^x - 1} = 6 \times \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}.$$

2. 在频率间隔 $\nu \to \nu + \mathrm{d}\nu$ 之间的能量为 $\rho_\nu \, \mathrm{d}\nu$. 同样，用波长表示的能量是 $\rho_\lambda \, \mathrm{d}\lambda$，于是应有

$$\rho_\nu \, \mathrm{d}\nu = \rho_\lambda \, \mathrm{d}\lambda \tag{1}$$

因为

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad |\mathrm{d}\nu| = \frac{c}{\lambda^2} \mathrm{d}\lambda \tag{2}$$

现将黑体辐射公式

$$\rho_\nu \, \mathrm{d}\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \mathrm{d}\nu \tag{3}$$

及(2)式代入(1)式得

$$\begin{aligned} \rho_\lambda \, \mathrm{d}\lambda = \rho_\nu \, \mathrm{d}\nu &= \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \mathrm{d}\nu \\ &= \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \mathrm{d}\lambda \end{aligned} \tag{4}$$

将(4)对 λ 求导代入$\frac{\mathrm{d}\rho_\lambda}{\mathrm{d}\lambda}=0$ 得

$$\frac{8\pi hc}{\lambda^6} \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \left[\frac{hc}{\lambda kT} \frac{hc}{e^{\lambda kT}} \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} - 5 \right] = 0$$

即
$$\frac{hc}{\lambda kT} e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} - 5 = 0 \tag{5}$$

令
$$\frac{hc}{\lambda kT} = x \tag{6}$$

则(5)式变成

$$x e^x \cdot \frac{1}{e^x - 1} - 5 = 0$$

即
$$e^{-x} + \frac{x}{5} - 1 = 0 \tag{7}$$

这是一个超越方程，其根为 $x=4.9651$.

由(6)式有

$$\lambda_{max}T=\frac{hc}{kx}=\frac{\frac{hc}{k}}{x}=b,$$

式中

$$b=\frac{\frac{hc}{k}}{x}=\frac{\frac{hc}{k}}{4.9651}$$

$$=\frac{6.626\times10^{-23}\times2.998\times10^{8}}{4.9651\times1.38\times10^{-23}}\text{米·度}$$

$$\simeq2.897\times10^{-3}\text{米·度}=2897\text{微米·度}.$$

3. 根据康普顿散射公式

$$\Delta\lambda=4\pi\frac{\hbar}{mc}\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

对质子

$$\Delta\lambda=\frac{4\times3.1416\times1.0545\times10^{-27}}{1840\times9.1\times10^{-28}\times3\times10^{10}}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$=2.65\times10^{-13}\sin^2\frac{\theta}{2}\text{厘米}=2.65\times10^{-5}\sin^2\frac{\theta}{2}\text{Å}$$

4. 设氢原子的质量为 m，不反冲时，光子的频率为 ω，反冲时，光子的频率为 ω'. 则由能量与动量守恒定律

$$\hbar\omega-\hbar\omega'=\frac{mv'^2}{2},\quad mv'=-\frac{\hbar\omega'}{c}$$

得

$$\hbar(\omega-\omega')=\frac{\hbar^2}{2mc^2}\omega'^2$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega'^2}=\frac{\omega-\omega'}{\omega'^2}=\frac{\hbar}{2mc^2}$$

5. 原子辐射光量子时要受到反冲，假定原子的初速度 v，被辐射的光量子频率在与原子相对静止的参考系中为 ω，能量和动量守恒定律有如下形式：

$$\hbar\omega'=\frac{mv^2}{2}-\frac{mv'^2}{2}+\hbar\omega \qquad (1)$$

$$mv' = mv - \hbar k' \tag{2}$$

此处 v' 为原子在辐射后的速度，ω' 为在实验室参考系中的频率。对(2)式平方，得到

$$m^2v'^2 = m^2v^2 - 2mv\frac{\hbar\omega'}{c}\cos\varphi + \frac{\hbar^2\omega'^2}{c^2}$$

此处 φ 为矢量 v 及 k' 之间的夹角，将上式与(1)式合并，得

$$\hbar\omega' = \hbar\omega + \frac{\hbar\omega'}{c}v\cos\varphi - \frac{\hbar^2\omega'^2}{2mc^2}$$

$$\simeq \hbar\omega + \frac{v}{c}\hbar\omega'\cos\varphi$$

即 $\quad \hbar\omega'(1 - \frac{v}{c}\cos\varphi) = \hbar\omega$

$$\omega' = \frac{\omega}{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi} \simeq (1 + \frac{v}{c}\cos\varphi)\omega = \omega + \frac{v}{c}\omega\cos\varphi,$$

$\therefore \quad \Delta\omega \simeq \frac{v}{c}\omega\cos\varphi.$

6. 玻尔-索末菲量子化条件：当广义坐标 q 和广义动量 p 之间满足如下条件时，力学系统才是定态：

$$\oint p_i\,\mathrm{d}q_i = n_i h$$

对一维运动为

$$\oint p\mathrm{d}q = nh. \tag{1}$$

(1) 求一维谐振子能量：

方法 I

一维谐振子能量

$$E = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2q^2$$

可改写成如下形式：

$$\frac{p^2}{(\sqrt{2\mu E})^2} + \frac{q^2}{(\sqrt{\frac{2E}{\mu\omega^2}})^2} = 1 \tag{2}$$

(2)式是椭圆方程，两半轴为 a,b：

$$a = \sqrt{2\mu E} \qquad b = \sqrt{\frac{2E}{\mu\omega^2}}$$

而
$$\oint p\,\mathrm{d}q = 椭圆面积 = \pi ab = 2\pi\frac{E}{\omega} = \frac{E}{\nu}$$

代入(1)式，得$\frac{E}{\nu} = nh$，故

$$E = nh\nu. \quad n = 1,2,3,\cdots$$

方法Ⅱ

设谐振子振动方程为：

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

其特解为

$$q = A\sin(\omega t + \delta) \tag{3}$$

显然
$$p = \mu\dot{q} = \mu A\omega\cos(\omega t + \delta) \tag{4}$$

由谐振子能量表示式

$$E = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 q^2$$

得
$$E = \frac{1}{2\mu}\mu^2 A^2\omega^2\cos^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\sin^2(\omega t + \delta)$$

$$= \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2. \tag{5}$$

为了满足量子化条件(1)式的要求，必须计算$\oint p\mathrm{d}q$．为此，将(3)式微分

$$\mathrm{d}q = A\omega\cos(\omega t + \delta)\mathrm{d}t.$$

于是：
$$\oint p\mathrm{d}q = \int_0^T \mu A\omega\cos(\omega t + \delta)\cdot A\omega\cos(\omega t + \delta)\mathrm{d}t$$

$$= \mu A^2\omega^2\int_0^T\cos^2(\omega t + \delta)\mathrm{d}t$$

$$= \mu A^2\omega^2\cdot\frac{T}{2} = \frac{\mu A^2\omega^2}{2}\cdot\frac{1}{\nu},$$

将此结果代入量子化条件(1)式，得

$$\frac{\mu A^2\omega^2}{2}\cdot\frac{1}{\nu} = nh$$

$$\frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 = nh\nu.$$

代入(5)式即得谐振子能量

$$E = nh\nu.$$

(2) 求电子轨道的可能半径：

电子作圆周运动时，取转角 φ 为广义坐标，而角动量 p_φ 则为广义动量，由广义动量的定义

$$p_\varphi = \frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left(\frac{1}{2}\mu R^2\dot{\varphi}^2\right) = \mu R^2\dot{\varphi} = \mu R v$$

式中 R 为电子作圆周运动时的轨道半径，$v=R\dot{\varphi}$ 为线速度.

为了满足量子化条件(1)式，计算 $\oint p\mathrm{d}q$：

$$\oint p\,\mathrm{d}q = \int_0^{2\pi} p_\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \mu R v \mathrm{d}\varphi = 2\pi\mu R v$$

代入量子化条件(1)式

$$\int_0^{2\pi} p_\varphi\,\mathrm{d}\varphi = nh$$

得

$$2\pi\mu R v = nh$$

∴

$$v = \frac{nh}{2\pi\mu R} = \frac{n\hbar}{\mu R} \tag{6}$$

另一方面，电子在均匀磁场 $\mathscr{H}$ 中作圆周运动时所受向心力来源于电子所受的罗仑兹力，即

$$\frac{e}{c}\mathscr{H}v = \mu\frac{v^2}{R}$$

由此得

$$v = \frac{e\mathscr{H}R}{c\mu}. \tag{7}$$

比较(6)与(7)式得

$$R^2 = \frac{n\hbar c}{e\mathscr{H}}$$

∴

$$R = \sqrt{\frac{n\hbar c}{e\mathscr{H}}}, \quad n = 1,2,3,\cdots \tag{8}$$

这就是电子在均匀磁场中运动时轨道的可能半径. 由(8)式可见，满足了量子化条件后，轨道半径是不连续的，即量子化的.