高等学校教材

近代物理实验

JINDAI WULI SHIYAN

主　编　李敬林
副主编　王庆禄　蔡秀峰

北方交通大学出版社
http://press.njtu.edu.cn

高等学校教材

近代物理实验

主　编　李敬林
副主编　王庆禄　蔡秀峰
参编者　杨会静　解其生
　　　　邸淑红　孙立萍

北方交通大学出版社
·北京·

内容简介

本书根据高等师范院校物理专业“近代物理实验”课程教学大纲的要求选编了包括原子物理、现代光学、固体基础实验、磁共振技术、其他实验技术等6章共19个实验。本书对所收集的实验原理的阐述详细、具体。为了进一步加强学生实验能力、科学素质、创新意识的培养，每个实验都设有提高篇。

本书可作为高等师范院校和理工类高等院校“近代物理实验”课程的教学用书，也可供从事实验物理研究的教师和科技人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

近代物理实验／李敬林主编．—北京：北方交通大学出版社，2003.8
高等学校教材
ISBN 7-81082-152-0

Ⅰ．近…　Ⅱ．李…　Ⅲ．物理学－实验－高等学校－教材　Ⅳ．O41-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第053508号

责任编辑：孙秀翠
印 刷 者：北方交通大学印刷厂
出版发行：北方交通大学出版社　　电话：010－51686045,62237564
北京市海淀区高梁桥斜街44号　　邮编：100044
经　　销：各地新华书店
开　　本：787×1 092　1/16　　印张：10.75　字数：268千字
版　　次：2003年8月第1版　　2003年8月第1次印刷
印　　数：4 000册　　定价：15.00元

前　　言

“近代物理实验”是物理专业学生必修的专业课之一，所安排的实验题目以近代物理学发展史中起重要作用的著名实验为主，注意介绍物理发展中有代表性的基本实验和方法，并结合当前科学发展的前沿及现代化的实验设备，设计了适合高层面学生的“提高部分”内容，使本教材不仅适用于师范物理专业的学生，同时也适用于开设该课程的其他各类物理专业学生的需要，以达到使该教材适用面更广泛的目的。

本教材所编出的内容共6章，含19个实验，且大部分实验都编有提高部分内容。各单元及各个实验在编排组合时，力求思维脉络清晰，突出物理思想和实验方法，并设有较大灵活性的内容，以适应不同层面的教学要求。

本书是由唐山师范学院物理系和廊坊师范学院物理系近代物理实验组共同编写的。第1章由李敬林编，第2章由蔡秀峰编，第3章由解其生、孙立萍编，第4章由杨会静编，第5章由邸淑红、李敬林编，第6章由王庆禄编。

由于我们两院物理系该组的成员相对于其他院校同类专业还是属于“年轻的一代”，因此在编写工作中的诸多方面定会存在着很多不足之处，恳请使用本教材的各位老师和读者提出宝贵意见，以达到共同推动本门课程发展的目的，这将是我们全体编者的愿望。

编　者

2003年8月

目　录

第 1 章　误差分析和数据处理

在物理实验中，几乎总要包括对某些物理量进行测量，所得到的数据结果，确实总是存在误差和不确定度。实验者感兴趣的是从现有的数据中提取最大量的有用信息，关心的是通过已有的有效数据估计误差大小及其对结果影响的程度。估计测量结果有多大的置信度，从而确定实验结果的有效程度。因此，对实验结果的误差分析和数据处理也应是实验的内容之一。

与普通物理实验相比，近代物理实验用到较为综合的实验技术和手段，实验设备也更加复杂；实验中测量对象的情况更加复杂，有些比较精确，有些具有明显的统计涨落，有的只能获得微弱的信息……因此为了更有效地进行实验，对实验人员的误差理论和知识提出了更高的要求，只有这样，才能对实验结果作出正确的评价和分析。

1.1　误差的基本概念

1. 绝对误差和相对误差

绝对误差是指测量值 x 与真值 x_0 之差，即

$$\Delta x = x - x_0 \tag{1-1}$$

绝对误差 Δx 是一个代数值，它表明了测量值偏离真值的程度和方向。

相对误差是指绝对误差和真值之比，常用百分数来表示，即

$$相对误差 = \frac{\Delta x}{x_0} \times 100\% \tag{1-2}$$

相对误差表示了测量结果的准确程度。

真值是指在特定条件下被测量的客观真实值。它是一个理想概念，在实验中采用约定真值，例如在仪器校验中，把高一级标准器的测量值作为低一级标准器或普通仪器的真值。

2. 直接测量和间接测量

可以用仪器直接读出数值的测量叫直接测量。由直接测量所得的量经过一定的函数关系计算出测量值的测量叫间接测量。

3. 精密度、准确度和精确度

在相同条件下，对同一物理量进行多次测量，测量结果中不可避免地同时包含有偶然误

差和系统误差。通常用精密度、准确度和精确度3个指标来评价测量结果的优劣。

精密度是描述重复测量结果之间的离散程度、表征测量结果的偶然误差的大小的量。如果精密度高，则测量的重复性好，离散程度小，测量的偶然误差小，但系统误差的大小不确定。

准确度是反映多次测量的平均值与真值的符合程度，表征测量结果的系统误差大小的量。如果准确度高，则平均值较接近真值，测量的系统误差较小，但偶然误差的大小不确定。

精密度和准确度从两个不同的方面来衡量测量结果的优劣。

精确度是对系统误差和偶然误差大小进行综合评价的指标，可以用来全面地描述测量结果的质量。精确度高，则精密度和准确度都高，偶然误差和系统误差都小。

4. 测量结果的不确定度

在误差理论中，与误差联系紧密而又不完全相同的另一个概念是不确定度。由于测量误差不可避免，以致真值无法求得，因此也就无法确定误差的大小，实验数据只能求出实验的最佳估计值和不确定度。把实验结果表示为

$$\text{测量值} = \text{最佳估计值} \pm \text{不确定度} \tag{1-3}$$

通常取算术平均值作为测量值的最佳估计值，用平均值的标准偏差来表示不确定度，真值以一定的概率处在式(1-3)所给定的范围之内。

1.2 误差的种类

误差的产生有多方面的原因，根据误差的性质和产生的原因，可将误差分为系统误差、偶然误差和粗大误差。

1. 系统误差

它是指在同一条件下多次测量同一量时，误差的绝对值和符号保持恒定；测量条件改变时，误差也按确定的规律变化的误差。系统误差的特征是它的确定性。系统误差产生的主要原因有：仪器的固有缺陷（如刻度不准、零点未调好等），环境的变化（如温度、压强等的影响），理论公式的近似或测量方法的不完善，以及个人习惯和偏向等方面。系统误差产生的原因往往是可知或能掌握的，一旦查明原因，应设法消除其影响。对未能消除的系统误差，如果大小和符号是确定的，可以对测量值进行修正；如果大小和符号是不确定的，也要设法减小其影响并估计误差范围。

2. 偶然误差

在相同条件下对同一量进行多次重复测量时，在极力消除或改正一切明显系统误差之后，每次测量的结果也不完全相同，这种不同表明测量值与真值之间的误差的符号和大小不可预知也不可控制，这种带有偶然性或随机性的误差称为偶然误差，也称为随机误差。

偶然误差是多种因素共同作用的结果。例如周围环境的无规起伏、仪器性能的微小波动、实验测量人员感觉器官分辨本领的限制，以及一些尚未发现的因素。偶然误差没有必然的规律性，但进行多次重复测量时会呈现出统计规律性，因此可以用统计方法来处理随机误差。虽然无法消除或补偿，但是增加测量次数可减小偶然误差，并用统计方法估算其大小。

偶然误差和系统误差经常同时存在于实验中，它们之间是相互联系的，有时很难区分。通常把一些不可定的系统误差当做偶然误差来处理，也常把一些可以确定的但规律过于复杂的系统误差看做偶然误差，从而使部分误差被抵消而得到较为准确的结果。有时系统误差和偶然误差的区别还与空间、时间和观测者等因素有关。

3. 粗大误差

它是指实验者使用仪器方法不正确，实验方法不合理，粗心大意，记错和算错数据或者环境条件突然变化引起的误差。这种误差是可以避免的，在正式的实验报告中，是不允许粗大误差存在的，在实验数据处理中必须剔除所有的粗大误差。

下面介绍两种剔除粗大误差的判别准则。

① 拉伊达准则（3 倍标准准则）：在测量次数较多时（例如几十次以上），是一种最为简便的方法。先求出测量值的平均值 $\bar{x}$ 和标准差 S_x，若某可疑数据 x_d 的偏差 $|x_d-\bar{x}|>3S_x$ 时，则 x_d 应该剔除。因为测量值的偏差落在 $\pm 3S_x$ 范围内的置信概率已达 99.7%，超出该范围的概率只有 0.3%。该异常值提出后，还要对余下的测量值用同样的方法进行检验。这种测量对于重复测量次数较少的测量值来说，其判别可靠性不够好。

② 格拉布斯准则：该准则以其判别的可靠性而著称，其检验步骤分为：(a) 求被检验测量值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的算术平均值 $\bar{x}$ 和标准差 S_x；(b) 求绝对值最大的偏差 $|u_i|_{max}$，即 $|x_i-\bar{x}|_{max}$；(c) 选定某一显著性水平 α 值（$\alpha=1-\xi$，代表错判为异常值的概率），通常选 $\alpha=0.05$ 或 0.01，由表 1-1 可查得格拉布斯准则的 $g(n,\alpha)$；　(d) 若 $|u_i|_{max}>g(n,\alpha)S_x$，则认为 x_i 是含有粗大误差的数据而剔除，否则应保留；(e) 舍弃某一含有粗大误差的数据后，还应该用同样的方法检查是否还有应剔除的数据。

表 1-1　格拉布斯准则 $g(n,\alpha)$ 数值表

n	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.05$	n	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.05$	n	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.05$
3	1.15	1.15	12	2.25	2.29	21	2.91	2.58
4	1.49	1.46	13	2.61	2.33	22	2.94	2.60
5	1.75	1.67	14	2.66	2.37	23	2.96	2.62
6	1.91	1.82	15	2.70	2.41	24	2.99	2.64
7	2.10	1.94	16	2.74	2.44	25	3.01	2.66
8	2.22	2.03	17	2.78	2.47	30	3.10	2.74
9	2.32	2.11	18	2.82	2.50	35	3.18	2.81
10	2.41	2.18	19	2.85	2.53	40	3.24	2.87
11	2.48	2.24	20	2.88	2.56	50	3.34	2.96

1.3 随机变量和概率分布函数

在近代物理实验中，测量值的随机性除了有随机误差的影响外，有时还有测量对象本身固有的随机性质。例如宏观热力学量（温度、密度、压强等）的数值都是统计平均值，原子和原子核等微观领域的统计涨落现象也非常突出。因此要用概率论和数理统计的方法来处理实验数据，首先要熟悉随机变量的概率及其概率分布函数。

1. 随机变量

在一定条件下，某一事件A可能发生，也可能不发生，则事件A称为随机事件。在物理实验中，在一定条件下测量某个物理量时，由于存在着许多影响因素，测量值的出现就是一个随机事件。

如果在一定条件下，进行了 N 次实验，其中事件A发生了 N_A 次，则比值 N_A/N 称为事件A发生的频率。当 $N\to\infty$ 时，频率的极限称为事件A的概率，记为 $P_r(A)$，即

$$P_r(A)=\lim_{N\to\infty}\frac{N_A}{N} \tag{1-4}$$

不同的随机变量可以用不同的数来表示，这个数就是随机变量。随机变量有两种类型：其一为离散型，只能取有限个或可数个数值的随机变量；其二是连续型，它的可能值布满某个区间。

随机变量全部取值的集合称为总体（或母体）。总体的任何一个部分称为样本（或子样）。在实际实验中，对某个物理量做有限次测量，测量结果总是获得某随机变量的样本。

2. 分布函数、概率函数和概率密度函数

对于随机变量，我们关心的不仅是随机变量的全部取值，还要了解各种取值的概率，即随机变量的概率分布。无论是离散型还是连续型的随机变量，其可能的全部取值可以排列在实数轴上，因此可以定义随机变量 X 的分布函数 $P(x)$ 为

$$P(x)=P_r(X\leqslant x) \tag{1-5}$$

即分布函数 $P(x)$ 在 x 处的取值，等于 X 取值小于或等于 x 这样一个随机变量的概率。按照分布函数的定义，它必须满足

$$\begin{gathered}P(-\infty)=0\\ P(\infty)=1\end{gathered} \tag{1-6}$$

离散型随机变量 X 只能取可数的数值 $x=x_1,x_2,x_3,\cdots$ 除了用分布函数来描述外，还可以用概率函数 $p(x)$ 来描述它的分布。概率函数在某一点 x 的取值，等于随机变量 X 取值为 x 的概率：

$$p(x)=P_r(X=x) \tag{1-7}$$

根据分布函数和概率函数的定义，它们之间的关系为

$$p(x) = \sum_{x_i \leqslant x} p(x_i) \tag{1-8}$$

对于连续型随机变量可以引入概率密度函数 $p(x)=\dfrac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x}$来描述它的分布，因此有

$$p(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\mathrm{d}x \tag{1-9}$$

根据公式(1-6)有

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{1-10}$$

这就是概率密度函数 $p(x)$应满足的归一化条件。

由概率密度函数或分布函数，可求得随机变量 X 在区间 $[a, b]$ 内取值的概率为

$$P_r(a \leqslant x \leqslant b) = P(b) - P(a) = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x \tag{1-11}$$

此值称为随机变量在区间 $[a, b]$ 内的概率含量。

1.4　概率分布的数字特征

如果一个随机变量的概率函数或概率密度函数形式已知，只要给出函数式中各个参数（称为分布参数）的数值，则随机变量的分布就完全确定。对于不同形式的分布，常常用一些有共同定义的数字特征量来表征它们。最重要的特征量就是期望值和方差。

1. 随机变量的期望值

随机变量的期望值的定义为

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x)\mathrm{d}x \tag{1-12}$$

期望值的物理意义是做无穷多次重复测量时测量结果的平均值。根据期望值的定义可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle) p(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{1-13}$$

表明随机变量分布在期望值的周围，但是期望值和概率密度函数取极大值的位置未必重合。

现在，把随机变量的概念加以推广，若随机变量 x 的概率密度函数为 $p(x)$，则随机变量函数$f(x)$的期望值的定义为

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x)\mathrm{d}x \tag{1-14}$$

2. 随机变量的方差

随机变量 x 的方差定义为

$$\sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 p(x)\mathrm{d}x = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \tag{1-15}$$

方差描述随机变量围绕期望值分布的离散程度，也就是随机变量取值偏离期望值起伏的大小。方差的平方根$\sigma(x)$称为随机变量的根方差或标准差。

根据方差的定义，容易证明

$$\sigma^2(x)=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2 \tag{1-16}$$

3. 两个随机变量的协方差

两个随机变量的协方差定义为

$$\mathrm{cov}(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}(x-\langle x\rangle)(y-\langle y\rangle)p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\langle(x-\langle x\rangle)(y-\langle y\rangle)\rangle \tag{1-17}$$

$p(x,y)$为两个随机变量的联合概率密度。

协方差描述两个随机变量的相关程度。当 x 和 y 相互独立时，$\mathrm{cov}(x,y)=0$。如果$\mathrm{cov}(x,y)\neq0$，x 和 y 一定不相互独立；但是如果$\mathrm{cov}(x,y)=0$，x 和 y 可能相互独立，也可能不独立。通常还要用相关系数 $\rho(x,y)$来描述 x 和 y 的相关程度

$$\rho(x,y)=\frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma(x)\sigma(y)} \tag{1-18}$$

根据协方差的定义，容易证明

$$\mathrm{cov}(x,y)=\langle xy\rangle-\langle x\rangle\langle y\rangle \tag{1-19}$$

1.5 物理量测量中常见的统计分布

在一定条件下对某一物理量进行测量，每次出现什么观测值是一个随机事件，若各随机事件可分别用一个数值表示，则这个数值可看做随机事件的函数，称为随机变量。由于随机变量受到不同因素的影响，或者物理现象的本身的统计性差异，使得随机变量的概率分布形式多种多样。这里介绍几种常见的分布，要注意掌握其概率函数（或概率密度函数）和数字特征量。

1. 二项式分布

设随机事件 A 发生的概率为 p，不发生的概率为 $1-p$，则在 n 次独立实验中事件 A 发生 k 次的概率为

$$p(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \tag{1-20}$$

式(1-20)中的系数$\frac{n!}{k!(n-k)!}$是在 n 次实验中，A 发生 k 次，而 $n-k$ 次不发生的可能组合数。$p(k)$的表达式恰好是二项式展开式

$$[p+(1-p)]^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

中的项，所以这个分布称为二项式分布。k 是离散型随机变量，只能取 $0,1,2,\cdots,n$，其中 n 为有限值。一个随机变量的概率函数或概率密度函数式中的参数（称为分布参数）是表征该统计分布的特征量。随机变量的期望值和方差（方差的平方根是标准差）是最重要的特征量。利用二项式定理可以求出二项式分布的期望值 $\langle k\rangle$ 和方差 $\sigma^2(k)$分别为

$$\langle k\rangle = \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} = np \tag{1-21}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2(k)&=\langle k^2\rangle-\langle k\rangle^2=\langle k^2\rangle-(np)^2=\\ &\sum_{k=0}^{n}k^2\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}-n^2p^2=\\ &np(1-p)\end{aligned} \tag{1-22}$$

2. 泊松分布

泊松分布是二项式分布的极限形式。在二项式分布中考虑以下情形，即 $n\to\infty$，$np\to m$(有限值)，则二项式分布可改写为

$$\begin{aligned}p(k)&=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}=\\ &\frac{(np)^k}{k!}\left(1-\frac{np}{n}\right)^{n-k}\times1\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$时，有

$$\lim_{n\to\infty}np = m,\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{np}{n}\right)^{n-k} = \mathrm{e}^{-m},\ \lim_{n\to\infty}1\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{k-1}{n}\right)=1$$

所以二项式分布的极限形式是

$$p(k)=\frac{m^k}{k!}\mathrm{e}^{-m} \tag{1-23}$$

式(1-23)所表示的概率分布为泊松分布。这里 k 是离散型的随机变量，但是 k 的取值为 $k=1,2,\cdots$大量放射性原子核相互独立地衰变就属于这种情况，在单位时间内，放射源中的原子核的衰变数目服从泊松分布。

根据泊松分布的概率函数可以得到服从泊松分布的随机变量 k 的期望值 $\langle k\rangle$、方差 $\sigma^2(k)$和标准差 $\sigma(k)$分别为

$$\langle k\rangle=m,\ \sigma^2(k)=m,\ \sigma(k)=\sqrt{m} \tag{1-24}$$

泊松分布只有一个参数 m，它等于随机变量的期望值和分布的方差。

3. 正态分布

正态分布又称为高斯（Gauss）分布，是误差理论中最重要的分布，它是一种连续型的分布，其概率密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1-25}$$

式(1-25)中的 x 是连续型随机变量，μ 和 σ 是分布参数，且 $\sigma>0$。

通常用$n(x;\mu,\sigma^2)$表示正态分布的概率密度函数，用$N(x;\mu,\sigma^2)$表示正态分布的分布函数，即

$$n(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$N(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

服从正态分布的随机变量称为正态变量。正态变量 x 的期望值、方差和标准差分别为

$$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot n(x;\mu,\sigma^2)dx=\mu$$

$$\sigma^2(k)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2n(x;\mu,\sigma^2)dx=\sigma^2 \tag{1-26}$$

$$\sigma(k)=\sqrt{\sigma^2(k)}=\sigma$$

参数 μ 就是正态变量的期望值，参数 σ 是标准差。正态分布的特征由这两个参数决定，如果消除了系统误差，μ 就是待测物理量的真值，它决定分布的位置；σ 决定了概率密度函数的“胖瘦”，即决定分布偏离期望值的离散程度。图 1-1 是不同参数的正态分布概率密度曲线。正态分布曲线是单峰对称的，对称轴处于期望值和概率密度最大值所在处。

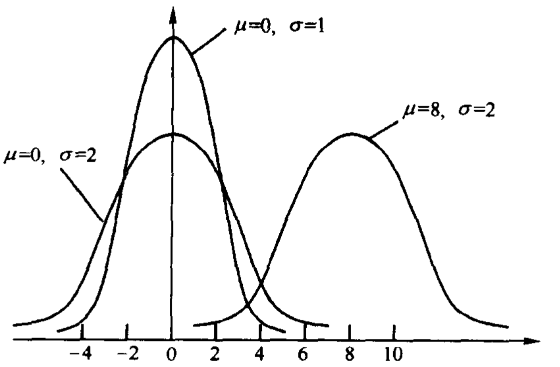

图 1-1 正态分布曲线

期望值 $\mu=0$ 和方差 $\sigma^2=1$ 的正态分布称为标准正态分布，其概率密度函数和分布函数分别为

$$n(x;0,1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{1-27}$$

$$N(x;0,1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \tag{1-28}$$

标准正态分布的分布函数数值表可以查表得到。如果 $\mu\neq0$，$\sigma^2\neq1$，只要将随机变量 x 做线性变换

$$u=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

那么随机变量就服从标准正态分布

$$n(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma}n(u;0,1) \tag{1-29}$$

$$N(x;\mu,\sigma^2)=N(u;0,1) \tag{1-30}$$

1.6 间接测量结果的误差估计

间接测量的物理量，是利用直接观测的结果代入相应的函数关系式计算出来的。在直接测量量中存在误差，因此在间接测量量中也必然存在误差，称为误差的传递。那么，如何根据直接测量量来估计间接测量量的误差？

设间接测量量 y 和直接测量量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数关系式为 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。由于直接测量量的误差 $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$ 都可以看做微小量，可以将 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 按泰勒级数展开，略去 Δx_1，Δx_2，…，Δx_n 二次方以上的量，则间接测量量的误差

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n \tag{1-31}$$

为误差传递的基本公式，其中函数的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ 为误差传递系数。一个直接测量量的误差对间接测量量的影响不仅取决于本身误差的大小，还取决于误差传递系数，也就是说和函数的具体形式也有关系。

设对 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别作了 N 次测量，其中第 i 次测量的误差分别为 Δx_{1i}，Δx_{2i}，…，Δx_{ni}，则 y 的误差为

$$\Delta y_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_{1i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_{2i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_{ni} \tag{1-32}$$

将上式的两边平方，得

$$(\Delta y_i)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 (\Delta x_{1i})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 (\Delta x_{2i})^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 (\Delta x_{ni})^2 + 2\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_{1i}\Delta x_{2i} + \cdots$$

由此可以写出其余（$N-1$）个间接测量误差的平方表达式。将 N 个式子累加并除以 N。因为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是相互独立的随机变量，Δx_{1i}，Δx_{2i}，…，Δx_{ni} 有正有负，在求和时会相互抵消，当 $N \to \infty$ 时，各交叉乘积之和趋向于零，因此有

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta y_i)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta x_{1i})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta x_{2i})^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta x_{ni})^2$$

再由方差的表达式可知

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta y_i)^2 = \sigma_y^2,\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta x_{1i})^2 = \sigma_{x_1}^2, \cdots, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta x_{ni})^2 = \sigma_{x_n}^2$$

因此得到

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2 \tag{1-33}$$

或

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2} \tag{1-34}$$

公式(1-34)又称为高斯误差传递公式。它不仅可以用于计算间接测量的标准误差，也可用于计算其他误差公式，只要把公式中的 $\sigma_y,\sigma_{x_1},\sigma_{x_2},\cdots,\sigma_{x_n}$ 用直接测量的误差代入即可。

根据式(1-34)，容易导出下面几个简单函数关系的不确定度传递公式。

(1) $y=ax$（a 为常数），则 $\sigma_y=a\sigma_x$

(2) 设 x_1,x_2,x_3 是相互独立的直接观测量，则

① $y=x_1\pm x_2\pm x_3$，则 $\sigma_y=\sqrt{\sigma_{x_1}^2+\sigma_{x_2}^2+\sigma_{x_3}^2}$

② $y=\dfrac{x_1x_2}{x_3}$，则 $\dfrac{\sigma_y}{y}=\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_{x_1}}{x_1}\right)^2+\left(\dfrac{\sigma_{x_2}}{x_2}\right)^2+\left(\dfrac{\sigma_{x_3}}{x_3}\right)^2}$

(3) $y=x^n$，则 $\sigma_y=nx^{n-1}\sigma_x$

(4) $y=\ln x$，则 $\sigma_y=\dfrac{\sigma_x}{x}$

1.7 最小二乘法和曲线的拟合

在物理实验中常常要观察两个有相互关系的物理量，然后根据两个物理量的许多组测量值来确定它们之间的函数关系曲线，称为曲线拟合。曲线拟合的问题通常有两种情况：一种是两个物理量的函数关系已知，但是有一些参数未知，需要确定这些未知参数的最佳估计值；另一种情况是两个物理量之间的函数关系也不知道，需要找到它们之间的经验公式。对于第二种情况常常假设物理量之间的关系是一个待定的多项式，采用第一种方法确定多项式的系数。

1. 最小二乘法原理

在两个观测量中，总有一个相对另一个的测量精度要高，其测量误差可以忽略，为了讨论简便，把测量精度高的观测量选作自变量 x，其测量值看做是准确值，把所有的误差看做是因变量 y 的误差。

设 x 和 y 之间的函数关系由理论公式

$$y=f(x;c_1,c_2,\cdots,c_m) \tag{1-35}$$

给出，其中 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 是要通过实验确定的参数。

对于实验测得的 N 个数据点(x_i,y_i)，$i=1,2,\cdots,N$，都应对应于 xy 平面上的点，如果不存在测量误差，则这些点都应该准确落在理论曲线上，因此只要从 N 组测量数据中选取 m 组测量值，得到方程组

$$y_i=f(x_i;c_1,c_2,\cdots,c_m)\quad i=1,2,\cdots,m \tag{1-36}$$

求解方程组(1-36)，就可以得到 m 个参数的数值，函数关系也就可以确定了。当 $N<m$ 时，参数也不能确定。

实际实验中的观测值总是有误差存在的，这些数据点不可能完全准确地落在理论曲线上，在 $N>m$ 的情况下，式(1-36)就成为矛盾方程组，不能通过直接解方程的方法确定参

数，只能用曲线拟合的方法来处理。

假设实验中已经消除了系统误差，则 y 的观测值 y_i 围绕着期望值 $f(x_i;c_1,c_2,\cdots,c_m)$ 摆动，其分布为正态分布，则 y_i 的概率密度函数为

$$p(y_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\mathrm{e}^{-\frac{[y_i-f(x_i;c_1,c_2,\cdots,c_m)]^2}{2\sigma_i^2}} \tag{1-37}$$

式(1-37)中 σ_i 是分布的标准差。为了简便，下面用 C 代表 $c_1,c_2,\cdots,c_m$；如果各次测量是相互独立的，那么测量值 $(y_1,y_2,\cdots,y_N)$ 的似然函数为

$$L=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_N}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{[y_i-f(x;C)]^2}{\sigma_i^2}}$$

取似然函数 L 最大来估计参数 C，应使

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{[y_i-f(x;C)]^2}{\sigma_i^2}=\min \tag{1-38}$$

这种用式(1-38)来估计参数值的方法称为最小二乘法。

根据公式(1-38)的要求，应有

$$\frac{\partial}{\partial c_k}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}[y_i-f(x;C)]^2\bigg|_{c=\hat{c}}=0\qquad(k=1,2,\cdots,m) \tag{1-39}$$

从而得到方程组

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}[y_i-f(x;C)]\frac{\partial f(x_i;C)}{\partial c_k}\bigg|_{c=\hat{c}}=0 \tag{1-40}$$

解此方程组，可以得到 m 个参数的估计值 $\hat{c}_1,\hat{c}_2,\cdots,\hat{c}_m$，从而得到回归方程

$$y=f(x;\hat{c}_1,\hat{c}_2,\cdots,\hat{c}_m) \tag{1-41}$$

2. 直线拟合

曲线拟合中最基本和最常用的是直线拟合。设变量 x 和 y 之间的函数关系由直线

$$y=kx+b \tag{1-42}$$

确定，式(1-42)中有两个待定参数，k 代表斜率，b 代表截距。测量所得到的 N 组数据 (x_i,y_i)，$i=1,2,\cdots,N$，x_i 值是准确的，所有误差是由 y_i 引起的。下面讨论用最小二乘法确定函数中的待定参数。

根据最小二乘法原理，可得

$$\sum_{i=1}^{N}[y_i-(kx_i+b)]^2\bigg|_{k=\hat{k},b=\hat{b}}=\min \tag{1-43}$$

即对参数 k，b 的最佳估计使测量值 y_i 的平方和为最小。

根据上式要求，应有

$$\frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{N}[y_i-(kx_i+b)]^2\bigg|_{k=\hat{k},b=\hat{b}}=-2\sum_{i=1}^{N}(y_i-\hat{k}x_i-\hat{b})=0$$

$$\frac{\partial}{\partial k}\sum_{i=1}^{N}[y_i-(kx_i+b)]^2\bigg|_{k=\hat{k},b=\hat{b}}=-2\sum_{i=1}^{N}x_i(y_i-\hat{k}x_i-\hat{b})=0$$