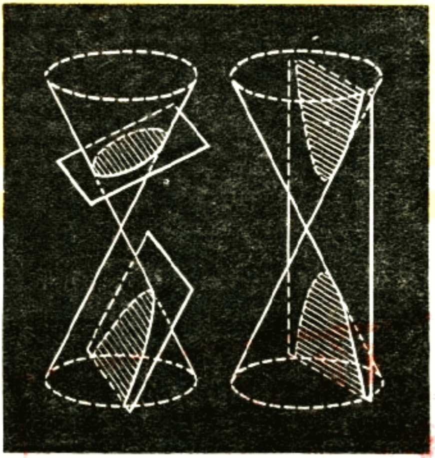
蘇聯青年科學叢書

奇妙的曲線

馬庫希維奇著
高徹譯



開明書店

蘇聯青年科學叢書

奇妙的曲線

馬庫希維奇著
高徹譯

開明書店

奇 妙 的 曲 線

(ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ)

每冊定價 1,300 元　　　　32 開本 21 定價頁

著 者	蘇聯 馬庫希維奇 (А. И. Маркушевич)
譯 者	高 徹
原著版本	蘇聯國家技術理論書籍出版局《數學通俗講話》小叢書第四種,1952
出版者	開 明 書 店 (北京西總布胡同甲50號)
印刷者	華 義 印 刷 廠
發行者	中 國 圖 書 發 行 公 司

一九五三年三月第一版　　分類 10 書號 4806(緒)

一九五三年三月第一次印刷　1——10,000

譯者的話

本書是由俄文的數學通俗講演第四本——‘奇妙的曲線第二版翻譯出來的．本書的特色是把比較枯燥的數學定理和日常生活中所遇到的生動具體的事物聯系起來，使讀者讀了以後會對數學發生濃厚的興趣，而且毫不費勁地知道許多曲線的有趣的性質．

據原作者說：本書是根據在莫斯科中學對七、八年級學生的講稿寫成的．蘇聯的七、八年級相當於我國初中三、高中一程度；所以具有中學數學程度的人，一定能讀得懂它．本書不但可供學生課外閱讀，而且也可給正在業餘學習數學的同志作自修參考之用．

高　徹 1952 年 8 月

原　序

這本小書主要是供中學生閱讀的，但也可以供只有中學程度數學知識的成年教師自修之用．作者是根據在莫斯科中學對七年級和八年級學生的講稿寫成本書的．

在準備這本講稿出版時，作者略添了一些材料，可是盡力設法保持原來容易瞭解的程度．最主要的是在第13節說到橢圓、雙曲線和拋物線都是圓錐的截線一段作了補充．

爲了不增加本書的篇幅，大多數關於曲線的說明是沒有證明的，雖然有許多情形本來可以作出證明，使讀者更易了解．

第二版的材料和第一版一樣，沒有什麼變更．

馬庫希維奇

1. 在日常談話裏，'曲'字的意義跟'直'，'正確'，'正當'這些字眼的意義相反．談話裏時常說到：彎曲的手杖，曲折的路，曲面的鏡子；諺語裏還有'曲在富人，直在貧人'這句話．

在數學裏有所謂'曲線'．什麼是曲線呢？怎樣能把一切曲線，例如用鉛筆或鋼筆在紙上畫的，用粉筆在黑板上畫的，隕星或者鑽天流星在黑夜天空中所畫出的，都包括在一個定義裏呢？

我們可以採用下面的定義：**曲線是動點留下的痕跡**．上例裏的鉛筆頭，粉筆頭，穿過空氣上層的熾熱的隕星或者鑽天流星，都是定義裏的動點．從這個定義的觀點看，直線是曲線的特殊情形．的確，動點爲什麼不可以留下一道直的痕跡呢？

2. 如果動點沿最短的路線，從它原來的位置移動到任意的別的位置，那麼這動點就畫出一條直線．畫直線可以用直尺；倘使鉛筆沿一支直尺的邊線滑動，鉛筆頭就留下一道直線的痕跡．

如果在平面上運動的一動點，跟這平面上一定點的距離保持不變，那麼這動點就描出一個圓．用圓規畫圓，就是根據這個性質．

直線和圓是兩種最簡單的曲線．從性質來說，同時又是最奇妙的曲線．比起別的曲線來，讀者對於直線和圓一定比

較熟悉些，但不要以爲你已經知道了直線和圓的一切重要的性質．比方說，你知道下面的定理嗎？設有兩個三角形 ABC 和 $A'B'C'$，它們的頂點聯線 AA'，BB' 和 CC' 相交於一點 S（圖 1），那麼這兩個三角形的三對對應邊，AB 和 $A'B'$，BC 和 $B'C'$，CA 和 $C'A'$ 的三個交點 M，K，L 必在同一直線上．

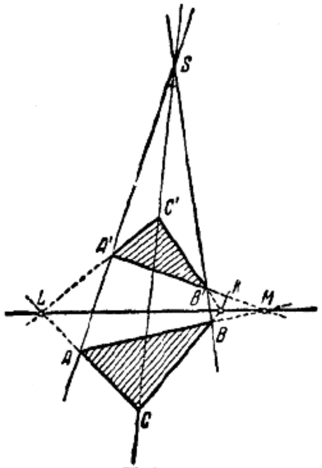


圖 1

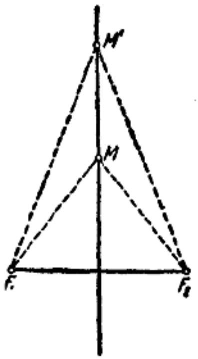


圖 2

讀者當然知道下面的事實：假使動點 M 在一個平面上運動，跟這平面上兩定點 F_1，F_2 的距離是相等的，也就是說 $MF_1=MF_2$，那麼 M 點必然描出一條直線（圖 2）．倘使問讀者：假定從 M 點到 F_1 點的距離，是 M 點到 F_2 點距離的若干倍（比方說兩倍，如圖 3），M 點會描出什麼樣的曲線呢？這個問題讀者大概覺得很難回答．可以證明這條曲線是一個圓．總之，如果 F_1 和 F_2 是平面上兩定點，M 點在這平面上這樣的

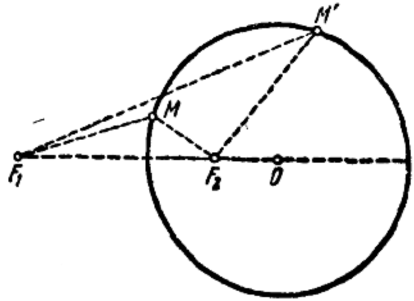


圖 3

運動，使M點到F_1的距離跟它到F_2的距離成正比，就是

$$MF_1=k\cdot MF_2,$$

那麼 M 點或者是描出一條直線（如果比例係數$k=1$），或者描出一個圓（如果比例係數 k 不等於 1）.

3. 如果動點 M 到兩定點 F_1 和 F_2 的距離的和保持不變，讓我們研究一下 M 點所描出的曲線. 取一根線，把它的兩頭繫在兩根針上，又把針釘在一張紙上的某兩點，這兩點的距離比線的長度短，這樣這根線是寬鬆的. 現在用一支直立的鉛筆拉緊這根線，把鉛筆輕輕地壓在紙上，同時把鉛筆漸漸移動，並注意應該把線拉緊（圖 4），那麼鉛筆尖 M 點就會畫出一個卵圓形的曲線（很像壓扁的圓）；這種曲線叫做橢圓.

要畫出整個橢圓，在畫好一半橢圓的時候，必須把線換到針的另一側，再畫出另一半. 顯然，當針運動的時候，鉛筆尖 M 點

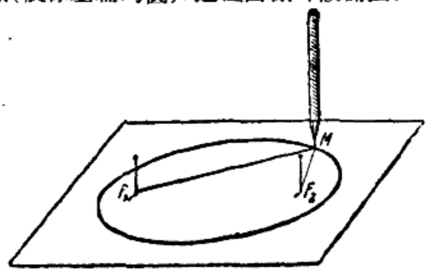


圖 4

到針頭 F_1 點的距離和到針頭 F_2 點的距離的和，總是不變的；

這兩段距離的和就等於線的長度.

針頭在紙上刺出的兩點,叫做橢圓的**焦點**. 焦點這個名詞是從拉丁文 *focus* 翻譯來的,它的原來意義是'爐灶'或'火',下面舉的一個有趣的橢圓的性質,說明了爲什麼要替它取這樣的名字.

倘使把一條磨光的金屬片沿一條橢圓弧捲起來,並且在橢圓的一個焦點上放一個發光的東西,比方說火光,那麼光線在金屬片上反射後,就都聚集在另外一個焦點上;因此,在另外一個焦點上也可以看到火光——這是原來的火光的映像(圖5).

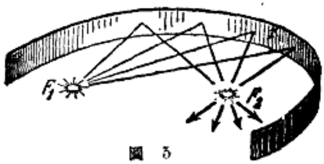


圖 5

4. 如果把焦點用一直線段聯結起來,而且延長這線段,使它跟橢圓相交,就得到橢圓的長軸 A_1A_2 (圖6). 橢圓對於它的長軸是對稱的. 如果把線段 F_1F_2 平分,並在中點作一條 F_1F_2 的垂直線,再延長它跟橢圓相遇,就得到橢圓的短軸 B_1B_2. 它也是橢圓的對稱軸. 軸的端點 A_1, A_2, B_1 和 B_2 叫做橢圓的**頂點**.

A_1 點到兩焦點 F_1 和 F_2 的距離的和,應當等於所用的線的長度 l:

$$A_1F_1+A_1F_2=l.$$

但因爲橢圓是對稱的,所以

$$A_1F_1=A_2F_2,$$

因此,我們可以在前式中拿 A_2F_2 來替代 A_1F_1, 得到

$$A_2F_2+A_1F_2=l.$$

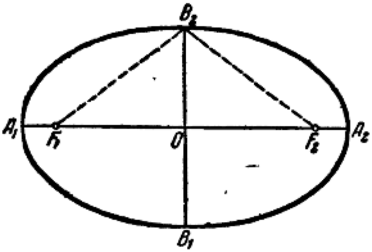


圖 6

顯然，上式左端的和等於橢圓長軸的長度．可見橢圓長軸的長度等於那一根線的長度；換一句話說，橢圓上任何一點到兩焦點距離的和，等於這橢圓的長軸的長度．因爲橢圓是對稱的，還可以推出下面的推論：從頂點 B_2（或者 B_1）到一個焦點的距離，等於長軸長度的一半．所以已知橢圓的四頂點，極容易作出它的焦點：用 B_2 點做圓心，用 A_1A_2 的一半長度做半徑，作一個圓弧，這圓弧跟長軸相交的兩點，就一定是焦點．

5. 把橢圓的長軸當作直徑，作一個圓（圖 7），從圓上任意一點 N 向長軸作垂直線 NP，它跟橢圓相交於 M 點．很明顯的可以看出 NP 比 MP 的數值大，用解析幾何可以證明下面的事實：倘使在圓上

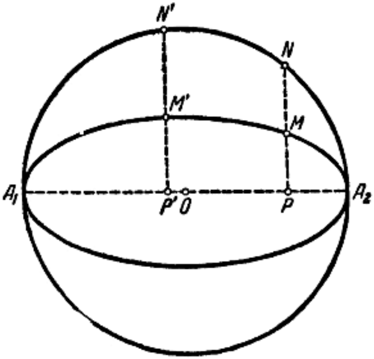


圖 7

取另一任意點 N'，跟前邊同樣作一垂直線 $N'P'$，那麼線段 $N'P'$ 和 $M'P'$ 的比，一定跟 NP 和 MP 的比相等；就是

$$\frac{NP}{MP}=\frac{N'P'}{M'P'}.$$

換一句話說，倘使我們把這圓上任意的一些點，用同一比率把它們到某一直徑的距離縮短，就能够從包圍這個橢圓的圓作出這個橢圓來．根據這一個性質，可以這樣簡單的作橢圓：先作一個圓和這個圓的任一直徑，再從圓上任意一點 N，向這直徑作垂直線 NP，在 NP 上求出一點 M，令 M 點到直徑的距離跟 N 點到直徑的距離成一定的比率（譬如說 2：3，1：2，1：3 等等）．這樣就可以得到橢圓上的許多點，這個橢圓的長軸跟這個圓的直徑相等，它的短軸跟直徑的比率就跟前面所說的比率（2：3，1：2，1：3等）相同．

6. 橢圓在我們日常生活裏也時常看到．舉例來說，倘使把盛水的玻璃杯傾側，那麼水面就成橢圓形（圖 8）；同樣如

圖 8

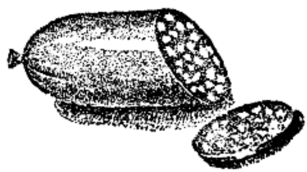


圖 9

果把一段圓柱形的香腸用刀斜切成小片，所得小片也是橢圓形（圖 9）．一般說，倘使把正圓柱體（或圓錐體）斜截，只要截

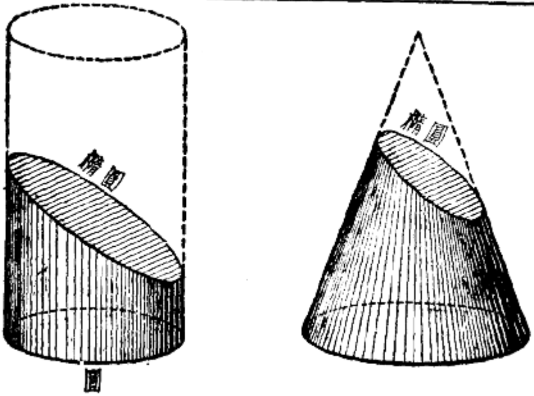


圖 10. 左,圓柱體; 右,圓錐體

面不跟它的底相交,所得到的截面就是橢圓(圖 10).

刻卜勒(1571~1630)已經發現行星繞太陽運動的軌道,並不像從前的人所想像的是一個圓,而是一個橢圓,太陽的位置就在這個橢圓的焦點上(圖 11).行星繞轉的時候有一次會轉到離太陽最近的橢圓頂點 A_1 上,這點叫做**近日點**,有一次會轉到離太陽最遠的頂點 A_2 上,這點叫做**遠日點**.拿地球當例子,它轉到近日點的時候,在我們北

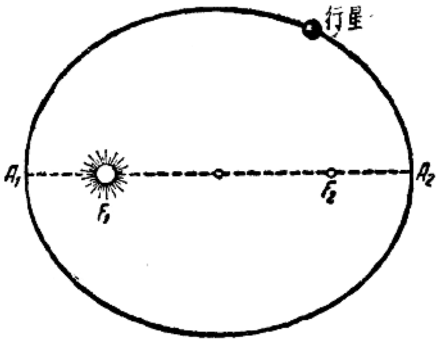


圖 11

半球是冬天,但轉到遠日點的時候,在我們北半球是夏天. 地球的軌道,這個橢圓形並不太扁,看去就像一個圓.

7. 在一張紙上作任意一條直線 D_1D_2, 在直線外任取一點 F,現在叫鉛筆頭 M 點這樣的運動,使它在無論什麼時候到這定直線的距離都跟到 F 點的距離相等 (圖 12). 要這樣做我們只要把一根線的一頭用圖畫釘固定在三角板的頂點 S 上,令這根線的長度等於三角板的一邊 SN,線的沒有釘住的一頭繫在一根針上,把針釘在 F 點上,現在如果把三角板的另一邊沿着按在直線 D_1D_2 上的直尺滑動,用鉛筆把線拉緊,並且讓鉛筆壓到三角板的 SN 邊上,那麼鉛筆頭 M 到直尺的距離,跟它到針的距離就一定相等,就是

$$NM=MF.$$

鉛筆在紙上畫出的曲線是叫做拋物線的曲線的一部分.

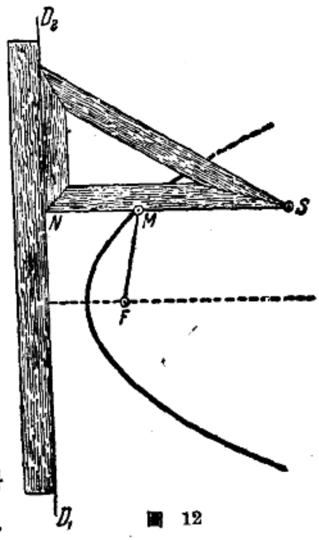


圖 12

要這曲線畫出的部分多一些,必須用邊比較長的三角板,同時要有比較長的直尺. 拋物線是由向無限開展的一支構成的.

這裏 F 點叫做拋物線的焦點,從焦點向直線 D_1D_2 (叫做準線)作垂直線,並且把這條線延長,這就是拋物線的對稱軸,簡稱拋物線的軸.

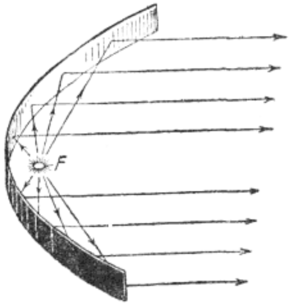


圖 13

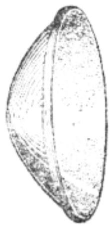


圖 14

8. 如果把一條狹長的磨光的金屬片，沿一條拋物線弧彎曲起來，那麼放在焦點上的發光的東西所發出的光線，經過金屬片的反射後，它們都跟拋物線的軸平行（圖 13）．反過來說，倘使一束跟拋物線的軸平行的光線射在這金屬片上，那麼反射後也一定在焦點集中．

汽車車燈裏的和探照燈裏的拋物面鏡（圖 14）就是根據拋物線的這個性質製成的．可是這種拋物面鏡不是做成長條形，而是做成所謂**旋轉拋物面**的形狀．把拋物線繞它的軸旋轉，就可以得到這樣的曲面．

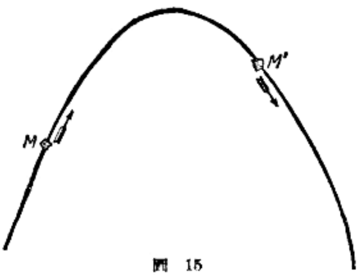


圖 15

9. 不是絕對鉛直向上拋的石子，是沿拋物線的路線飛的（圖15）；還有砲彈也是這樣．不

錯，空氣的阻力會把石子或砲彈所走的拋物線歪曲了，事實上所得到的是另一種曲線．可是如果是在眞空裏觀察這種運動的話，我們就會得到眞正的拋物線．

如果砲彈從砲口飛出的速度 v 一定，但砲筒跟水平方向成各種不同的角度，那麼砲彈的彈道就是各種不同的拋物線，得到的射程也就不同．在砲筒的傾角是 $45°$ 的時候，射程最大．這一個最大射程等於 $\frac{v^2}{g}$，這裏 g 是重力加速度．如果砲彈是鉛直的向上發射，那麼砲彈上昇的高度等於最遠射程的一半，就是 $\frac{v^2}{2g}$．如果不使砲筒的方向轉變（就是令它在同一

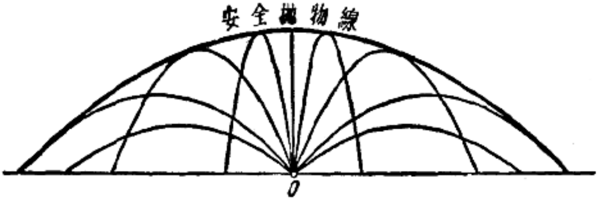


圖 16

鉛直面內），而砲彈飛出砲口的速度始終不變，那麼地面和天空砲彈飛得到的地方是有一定範圍的．可以證明，砲彈飛不到的地方，跟砲彈取適當瞄準的時候能够飛得到的地方的分界線，也是一條拋物線（圖 16），這條拋物線叫做**安全拋物線**．

10. 跟橢圓相似，我們還可以作一條曲線，令一動點 M 到兩定點 F_1 和 F_2 的距離的差，不是和，保持不變．又可以作另一條曲線，使兩距離的積不變．最後，也可以作一條曲線，使兩距離的比不變（最後的情形得到的曲線就是圓）．

讓我們先來研究差不變的情形．要使鉛筆這樣的運動，

我們把兩根針分別釘在 F_1 和 F_2，把直尺的一頭固定在 F_1 針上，但直尺在紙上仍舊能够繞這根針轉動（圖 17）．直尺的另一頭 S 繫着一根線（這線必須比直尺短），線的另一頭固定在 F_2 點上，再用鉛筆頭把線拉緊壓到直尺上，這樣兩距離 MF_1 和 MF_2 的差一定等於：

$$(MF_1+MS)-(MF_2+MS)=F_1S-(MF_2+MS),$$

這就是說等於直尺長度跟這條線長度的差．現在把直尺繞 F_1 點轉動，鉛筆緊靠在直尺邊上，同時把線拉緊，那麼鉛筆在紙上就會畫出一條曲線，這曲線上任意一點到 F_1 和 F_2 兩點距離的差始終不變，就是等於直尺的長度跟線的長度的差．這樣，還只能够畫出圖 17 右邊這條曲線的上部分；要畫出這條曲線的下部分，我們不把直尺固定在這根針的上面，而是把它固定在針的下面．最後，把直尺固定在針 F_2 上，而把線的一頭繫在針 F_1 上，還可以畫出圖 17 左邊這一部分的曲線．這樣畫出的一對曲線是看做一個曲線的，叫做**雙曲線**．還有，現在畫出的曲線弧，還並不是雙曲線的全部．倘使我們改用比較長的直尺，和比較長的線（但是直尺跟線的長度的差保持不變），我們可以無限制地把這雙曲線繼續畫下去，正像我們能够把直線段無限制地延長下去一樣．

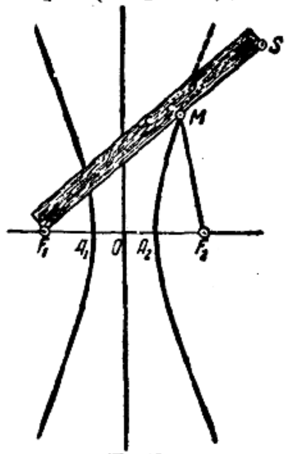


圖 17

11. 經過雙曲線的兩焦點作一條直線，這條直線是雙曲線的對稱軸．另外一根對稱軸，是垂直於 F_1F_2、而且經過 F_1F_2 中點的一條線．兩軸的交點 O 是雙曲線的對稱中心，簡稱**雙曲線中心**．第一對稱軸跟雙曲線相交於 A_1，A_2 兩點，這兩點叫做雙曲線的**頂點**；線段 A_1A_2 叫做雙曲線的**實軸**．雙曲線的頂點 A_1 到焦點 F_2 的距離減去它到焦點 F_1 的距離所得的差，一定等於直尺的長度跟線的長度的差 m：

$$A_1F_2-A_1F_1=m.$$

但是因爲雙曲線是對稱的，所以

$$A_1F_1=A_2F_2$$

因此在前式裏可以拿 A_2F_2 來替代 A_1F_1，得到

$$A_1F_2-A_2F_2=m.$$

顯然 $A_1F_2-A_2F_2$ 的差等於線段 A_1A_2，就是等於雙曲線實軸的長度．可見雙曲線上任意一點到兩焦點的距離的差 m（應該從較大的距離減去較小的距離），一定等於雙曲線實軸的長度．

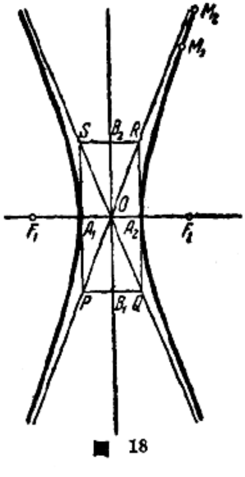


圖 18

用頂點 A_1（或頂點 A_2）做圓心，F_1F_2 的長度的一半做半徑，作一個圓弧跟雙曲線第二對稱軸相交．這樣求到兩個交點 B_1 和 B_2（圖 18）；線段 B_1B_2 叫做雙曲線的**虛軸**．再作一個長方形 $PQRS$，令它的邊都跟雙曲線的軸平行，而且分別經過