

三角測量典型圖形平差法

A. B. 郭 吉 耶 夫 著
C. Г. 沙 魯 比 奇

測 繪 出 版 社

三角測量典型圖形平差法

苏联 A. B. 郭吉耶夫 著
C. Γ. 沙魯比奇
胡明城 譯

測繪出版社

1956 · 北京

A. B. ГОРГЕЕВ, С. Г. ШАРУПИЧ
УРАВНИВАНИЕ ТИПОВЫХ ФИГУР ТРИАНГУЛЯЦИИ
ГЕОДЕЗИЗДАТ
МОСКВА, 1953

本書係根据苏联測繪書籍出版社 1953 年於莫斯科出版的“三角測量典型圖形平差法”譯出，其中叙述二、三、四等三角補充網中常有的典型圖形的实用平差方法，對於各种圖形都載有独特的实用公式和示例，且大都未見於其他各書，書中擬訂的各种標準格式，都包括全部計算过程。直至得出點的坐標和點的位置精度爲止，適於作爲測量工程技術人員的作業參考書。

三角測量典型

書号15039·3

圖形平差法

120000字

著者 苏联 A. B. 郭吉耶夫
C. Г. 沙魯比奇

譯者 胡明城

出版者 測繪出版社

北京宣武門外永光寺西街3号

北京市書刊出版業營業許可証出字第零四號

發行者 新華書店

印刷者 地質印刷厂

北京廣安門內教子胡同甲32号

印数(京)4201—8210册 一九五六年一月北京第一版

定价(8)0.76元 一九五六年五月第二次印刷

开本31"×43"1/4 印張5 1/4 插頁1

原 序

苏联社会主义建設的發展，在苏联的測量工作面前提出了愈來愈新的科学的及生產的任務。本書針對着解决这些任務中之一。其目的在提高平差不大的三角網時之勞動生產率，並預定滿足於測量工作之實際要求。

本事中載有典型圖形平差之独特的实用公式和示例，其中大部份在已有的各書中尚未見過。所述的平差方法及公式對於各等補充網都是嚴密的和適用的。

本書第一章「三角測量典型圖形按條件觀測法之平差」及第三章「交会法之精度估計」是由 A. B. 郭吉耶夫所寫，第二章「三角測量典型圖形併用條件觀測法与間接觀測法之平差」是由 C. Г. 沙魯比奇所寫。對於本書的批評意見和希望，請函莫斯科卡查科夫街 15 号莫斯科土地整理工程学院。

A. B. 郭吉耶夫，C. Г. 沙魯比奇。

2

0

第 一 章

三角測量典型圖形按條件觀測法之平差

最簡單的典型圖形之條件方程式中僅有一個正弦條件時，則其平差適宜於利用以條件方程式自由項（閉合差）表示角度改正數的現成標準公式按角度進行。當兩組或三組平差時，最簡單的公式依改化條件方程式的係數求得之。

在本章中列舉某些最簡單的典型圖形按此種標準公式之平差示例。所有公式直接載於計算格式中適當的地方。為了解釋計算程序起見，將本章中列舉的各典型圖形分為在角度改正數計算方面可作為特徵的兩類。第一類包括圖形 1—4，第二類包括圖形 5—8。

第一類圖形之平差，用從兩相鄰基綫之前方交會作為示例研討之（圖 1）。

第一類圖形（條件觀測法）

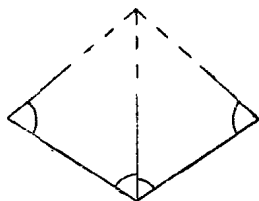


圖 1.

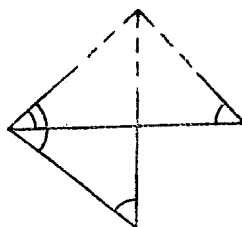


圖 2.

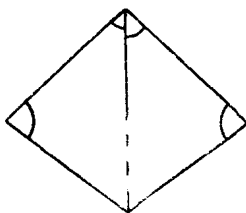


圖 3.

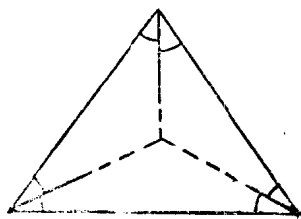


圖 4.

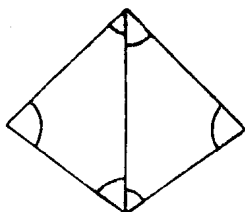


圖 5.

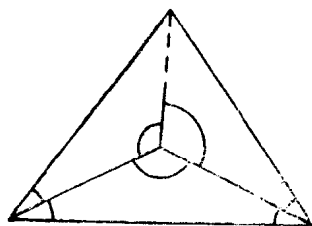


圖 6.

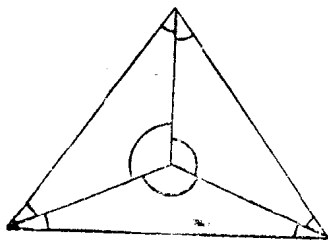


圖 7.

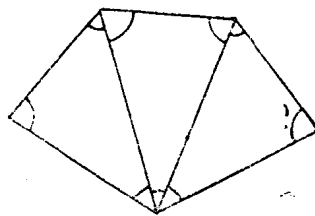


圖 8.

圖 形

第二類圖形 (條件与間接觀測併用法)

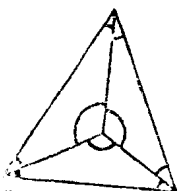


圖 9

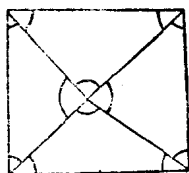


圖 10.

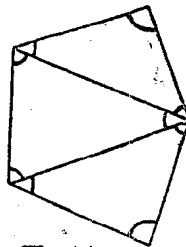


圖 11.

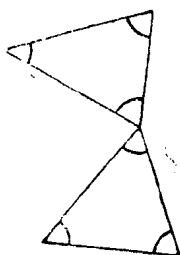


圖 12

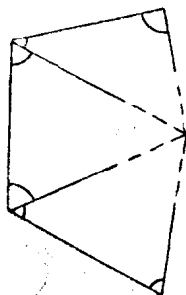


圖 13.

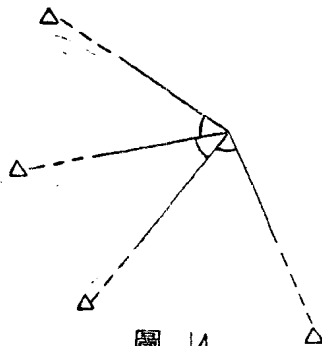


圖 14.

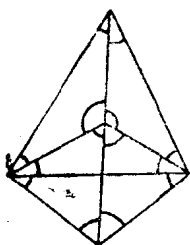


圖 15.

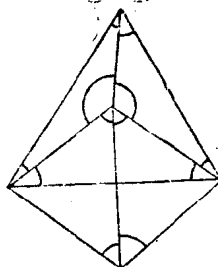


圖 16.

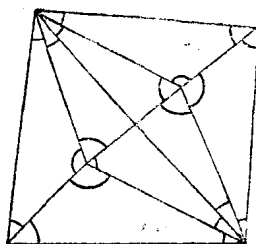


圖 17.



圖 18.



圖 19



圖 20

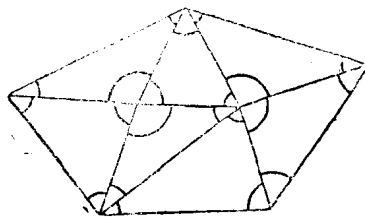


圖 21.

計 算 程 序

1. 在圖形上記出起算點及所求點之名稱。
2. 在表 1 (起算數據表) 中記錄各點的座標, 以及各邊之座標方位角和長度。
3. 按已知座標方位角計算固定角 B (在某些圖形中可能有幾個固定角)。
4. 在表 2 中記錄觀測角。未觀測的角度作為 180° 之補角計算之。並記入括弧中。
5. 計算和條件之閉合差。

$$\omega_b = 28^\circ 26' 12'' + 30^\circ 52' 47'' - 59^\circ 18' 46'' = +13''.$$

6. 計算角度 2 及 3 之第一改正數, 其值等於 ω_b 之一半反号。角度 1 及 4 不必求第一改正數。

7. 將第一改正數代入至角度觀測值中, 僅記出改正後的角度之秒數。

8. 按改正後之角度值計算基綫條件方程式之自由項 ω (表 3)。於記錄改正後的角度之正弦對數的同時, 亦記錄角度 $1''$ 之正弦對數增量, 以對數第六位為單位。

9. 按表 2 相應欄中所列之公式計算改化係數 A_i , 並求其平方和 $[AA]$ 。

10. 按公式 $k = -\frac{\omega}{[AA]}$ 計算繫數 k 。

11. 按公式 $v_i^{II} = A_i k$ 計算角度之第二改正數, 即為繫數 k 與相應的基綫條件方程式改化係數之乘積。

12. 解算三角形。

13. 按兩方向計算 I 點之座標。

14. 估計所求點之位置的精度(表 5)。至所求點的距離、係數 A_i 以及係數平方和 $[AA]$ 之值。由同一典型圖形之平差的表 2 中抄取之, 所有示例中採用之觀測角中誤差 m 與三角測量等級相應, 僅圖 7 之示例除外, 其中之 m 係算得者。

平差及精度估計之計算, 須用計算尺進行之。

第二類圖形之平差, 用一點插入在一三角形中作為示例研討之(圖 7)。

計 算 程 序

1. 在圖形上記出起算點及所求點之名稱。
2. 在起算數據表中記錄各點的座標, 以及各邊之座標方位角和長度。
3. 按已知座標方位角計算各固定角(在某些圖形中只有一固定角)。
4. 記錄所有的觀測角(表 2)。
5. 計算所有角度條件之閉合差: 圖形條件 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, 固定角上之和條件 $\omega_a, \omega_b, \omega_c$, 水平條件 ω_g 。在以固定邊封閉的圖形中(類似於圖 7), 獨立的角度條件個數, 等於圖形中角度條件的總數減去一, 因為有一個圖形條件或和條件或水平條件為其餘的各條件之結果。

6. 按「第一改正數」欄中所列之公式計算角度之第一改正數。

7. 計算圖形條件方程式之改化自由項 $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3$ (用第一改正數改正後的三角形之閉合差)。閉合差 $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3$ 之和應等於水平條件之閉合差。計算輔助量

$$u = -0.2 \omega_g.$$

8. 按「第二改正數」欄中所列之公式計算第二改正數。

計算之檢查：各三角形改正數之和應等於閉合差 $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3$ 反号（在其他示例中，檢查示於各三角形之總計列中）。

9. 用第一及第二改正數改正觀測角之值。

10. 按這些角度計算極條件方程式之自由項 ω （表3）。於記錄角度正弦對數的同時，亦記錄這些角度 $1''$ 之正弦對數增量 Δ_i ，以對數第六位為單位。

11. 按相應欄內所列之公式計算輔助量 σ, σ', δ （在其他示例中，計算另外的輔助量，亦列有公式）。

12. 計算改化係數 A_i ，並求其平方和 $[AA]$ 。

係數計算之檢查：每一三角形之係數和等於零（圖6除外，其中第一及第二三角形之係數和的絕對值彼此相等，符号相反，而第三三角形之係數和等於零）。

13. 按公式 $k = -\frac{\omega}{[AA]}$ 計算繫數 k 。

14. 按公式 $v_i^{\text{III}} = A_i k$ 計算第三改正數。

第三改正數之檢查與係數 A_i 同。

15. 將第三改正數代入至用第一及第二改正數改正後的角度中，以計算平差角。

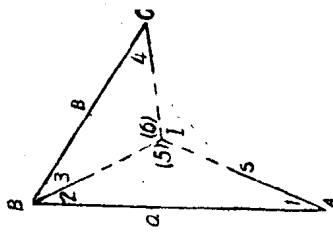
以下的計算程序與第一類圖形相同。

圖形 1 平差示例
所求點 I

1. 起算數據

點	等	級	座 標		座 標 方 位 角	邊 長
			x	y		
A		III	6 107 348.2	5 570 523.8	12°47'17"	9 306.9
B		III	6 116 424.2	5 572 583.8	133 28 31	6 751.2
C		III	6 111 779.1	5 577 483.0		

$\angle B = (BA) - (BC) = 59^\circ 18' 46''$



2. 改正數之計算及三角形之解算

角 度 編 號	觀 測 角	第 一 改 正 數	改正後的角 度之秒數	基 綫 條 件 方 程 式之改 化 係 數	第 二 改 正 數 A_{ik}	平 差 角	角 度 正 弦	邊 長
1	23°45'11"	—	11"	$A = \Delta_1 + \Delta_5$	+3"	23°45'14"	0.402 809	4 745.3
2	28 26 12	$-\frac{1}{2} \omega_b$	06	$A = \frac{1}{2} (\Delta_5 + \Delta_6)$	-1	28 26 05	0.476 158	5 609.3
(5)	(127 48 37)	—	(43)	—	—	(127 48 41)	0.790 033	9 306.9
(6)	(106 50 33)	—	(40)	—	—	(106 50 41)	0.957 094	6 751.2
3	30 52 47	$-\frac{1}{2} \omega_b$	40	$A_5 = -I_2$	+1	30 52 41	0.513 212	3 620.1
4	42 16 40	—	40	$A_4 = -(\Delta_4 + \Delta_6)$	-2	42 16 38	0.672 719	4 745.3

$\omega_b = 2 + 3 - \angle B = +13''$ $[A_4] = 15.5; k = -\frac{\omega}{[AA]} = +1.0$

3. 基綫條件方程式自由項之計算

边及角 度編号	边長对數及第一次改正後 的角度之正弦对數	Δi	边及角 度編号	边長对數及第一次改正後 的角度之正弦对數	Δi
a	3.968 805		b	3.829 381	
1	9.605 085	+ 4.8	4	3.827 838	+ 2.3
(6)	9.980 955	- 0.6	(5)	9.897 642	- 1.6
	$\Sigma_1=3.554\ 845$			$\Sigma_2=3.554\ 861$	

$$w=\Sigma_1-\Sigma_2=-16$$

4. 座標計算

	A	B
	I	
a_0	12° 47' 17"	192° 47' 17"
$\angle$	+ 23 45 14	- 28 26 05
α	36 32 31	164 21 12
x	6 111 854.8	6 111 854.7
x_0	6 107 348.2	6 116 424.2
Δx	+ 4 506.6	- 4 569.5
$\cos \alpha$	0.803 421	0.962 944
s	5 609.3	4 745.3
$\sin \alpha$	0.595 411	0.269 705
Δy	+ 3 339.8	+ 1 279.8
y_0	5 570 523.8	5 572 583.8
y	5 573 863.6	5 573 863.6

中數 $x=6\ 111\ 854.8$
 $y=5\ 573\ 863.6$

計算者: _____

19 年 _____

5. 1 點位置中誤差之計算

$$m=\pm 10''$$

Δ_2			
$\sigma=\Delta_2+\Delta_h$	+ 3. 9	$q=p-q^2:[AA]$	1.43
$v=\Delta_2^2+\frac{1}{2}\sigma^2$	+ 2. 3	$r=1-A_1^2:[AA]$	0.339
$\tau=\Delta_h A_1+\sigma A_2$	5.20	$l=5.3r+23.5r$	15.6
	- 7.64	$M=ms\sqrt{r}\cdot 10^{-6}$	0.22

圖形 2 平差示例
所求點 1

1. 起算數據

點	等	座級	座標		座標方位角	邊長
			x	y		
A	III		6 105 824.3	5 569 293.4	38°19'56"	2 126.5
B	III		6 107 492.4	5 570 612.3	181 18 44	5 063.8
C	III		6 102 429.9	5 570 496.3		

$$\angle B = (BA) - (BC) = 37^{\circ}01'12''$$

2. 改正數之計算及三角形之解算

角度編號	觀測角	第一改正數	改正後的角 度之秒數	基綫條件方 程式之改化係數	第二改 正數 A_{ik}	平差角	角度正弦	邊長
1	36°33'35"	—	35"	$A_1 = \Delta_1 + \Delta_6$	+3"	36°33'38"	0.595 672	1 441.2
2	81 55 46	$-\frac{1}{2}\omega_b$	50	$A_2 = \frac{1}{2}(\Delta_6 - \Delta_6)$	+1	81 55 51	0.990 098	2 395.6
(5)	(61 30 39)	—	(35)	—	—	(61 30 31)	0.878 889	2 126.5
(6)	(120 57 38)	—	(41)	—	—	(120 57 46)	0.857 502	5 063.8
3	44 54 41	$-\frac{1}{2}\omega_b$	38	$A_3 = A_2$	+1	44 54 39	0.706 006	4 169.2
4	14 07 41	—	41	$A_4 = -(\Delta_4 + \Delta_6)$	-6	14 07 35	0.244 062	1 441.3

$$\omega_b = 2-3-\angle B = -7''$$

$$[AA] = 68.4;$$

$$k = -\frac{\omega}{[AA]} = +0.83$$

3. 基綫條件方程式自由項之計算

邊及角 度編號	邊長對數及第一次改正後 的角度之正弦對數	Δi	邊及角 度編號	邊長對數及第一次改正後 的角度之正弦對數	Δi
a	3.327 665		b	3.704 476	
1	9.774 999	+ 2.8	4	9.387 549	+ 8.4
(6)	9.933 242	- 1.3	(5)	9.943 938	+ 1.1
$\Sigma_1=3.035\ 906$			$\Sigma=3.035\ 963$		

$$\omega=\Sigma_1-\Sigma=-57$$

4. 座標計算

	A	B
I		
α_0	$38^\circ 19' 56''$	$218^\circ 19' 56''$
$\angle$	+ 36 33 38	- 81 55 51
α	74 53 34	136 24 05
x	6 106 448.7	6 106 448.7
x_0	6 105 824.3	6 107 492.4
Δx	+ 624.4	- 1 043.7
$\cos \alpha$	0.260 626	0.724 188
s	2 395.6	1 441.2
$\sin \alpha$	0.965 440	0.689 602
Δy	+ 2 312.8	+ 993.9
y_0	5 569 293.4	5 570 612.3
y	5 571 606.2	5 571 606.2

中 數 $x=6\ 106\ 448.7$
 $y=5\ 571\ 606.2$

計算者: _____

19 年 _____

5. I 點位置中誤差之計算

$$m=\pm 10''$$

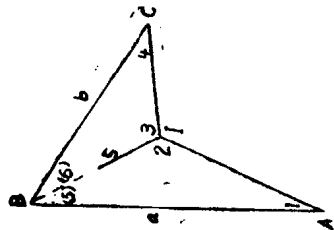
Δ_2			
$\sigma=\Delta_2+\Delta_5$	+0. 3	$q=v-v^2: [AA]$	1. 67
$v=\Delta_5^2+\frac{1}{2}\sigma^2$	+1. 4	$r=1-A_1^2: [AA]$	0.778
$\tau=\Delta_5 A_1+\sigma A_2$	2.19	$t=5.3q+23.5r$	27.2
	5.97	$M=ms\sqrt{t}\cdot 10^{-6}$	0.12

圖形 3 平差示例
所求點 1

圖幅

IV 等

14



1. 起算數據

點	等	座標		座標方位角	邊長
		x	y		
A	III	6 107 348.2	5 570 523.8	12°47'17"	9 306.9
B	III	6 116 424.2	5 572 583.8	133 28 31	6 751.2
C	III	6 111 779.1	5 577 483.0		

$$\angle B = (BA) - (BC) = 59^\circ 18' 45''$$

2. 改正數之計算及三角形之解算

角度編號	觀測角	第一改正數 $-\frac{1}{4}(\omega_1)$	改正後的角度之秒數	基綫條件方程式之變化係數	第二改正數 A_{ik}	平差角	角度正弦	邊長
1	23°45'11"	+1"	12"	$A_1 = \Delta_1 + \rho$	+3"	23°45'15"	0.402 813	4 745.3
2	127 48 39	0	39	$A_2 = -\Delta_2 + \rho$	+1	127 48 40	0.790 036	9 306.9
(5)	—	—	—	—	—	(28 26 05)	0.476 158	5 609.3
(6)	—	—	—	—	—	(30 52 41)	0.513 212	3 620.1
3	106 50 42	0	42	$A_3 = \Delta_3 + \rho$	-1	106 50 41	0.957 094	6 751.2
4	42 16 40	+1	41	$A_4 = -\Delta_4 + \rho$	-3	42 16 38	0.672 719	4 745.3

$$\omega_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \angle B - 360^\circ = -2''$$

$$[AA] = 27.5; k = -\frac{(\omega)}{[AA]} = +0.73$$

3. 基綫條件方程式自由項之計算

邊及角 度編號	邊長對數及第一次改正後 的角度之正弦對數	Δ_i	邊及角 度編號	邊長對數及第一次改正後 的角度之正弦對數	Δ_i
a	3.968 805		b	3.829 381	
1	9.605 089	+ 4.8	2	9.897 647	- 1 6
3	9.980 954	- 0.6	4	9.827 840	+ 2 3

$$\Sigma_1 = 3.554\ 848$$

$$\Sigma_2 = 3.554\ 868$$

$$w = \Sigma_1 - \Sigma_2 = -20$$

$$\rho = \frac{1}{4} (\Delta_2 + \Delta_4 - \Delta_1 - \Delta_3) = -0\ 9$$

4. 座標計算

	A	B
	I	
α_0	$+ 12^\circ\ 47'\ 17''$	$192^\circ\ 47'\ 17''$
$\angle$	23 45 15	28 26 05
α	36 32 32	164 21 12
x	6 111 854.8	6 111 854.7
x_0	6 107 348.2	6 116 424.2
Δx	+ 4 506.6	- 4 569.5
$\cos \alpha$	0.803 418	0.962 944
s	5 609.3	4 745.3
$\sin \alpha$	0.595 415	0 269 705
Δy	+ 3 339.9	+ 1 279.8
y_0	5 570 523.8	5 572 583.8
y	5 573 863.7	5 573 863.6

中 數 $x = 6\ 111\ 854.8$
 $y = 5\ 573\ 863.6$

計算者: _____

19 年 _____

5. 1 點位置中誤差之計算

$$m = \pm 10''$$

$v = \Delta_2 + \Delta_4 - \Delta_1 - \Delta_3$	$+ 15.4$	$q = v - v^2 : [AA]$	1.1
$v = \Delta_1 \Delta_2 - \Delta_2 \Delta_1$	$+ 19.8$	$r = 1 - v^2 : [AA]$	0.229
$t_1 = A_1 + A_2$	$+ 4.6$	$t = 5.3q + 23.5r$	11.2
		$M = ms \sqrt{t} \cdot 10^{-6}$	0.16

圖形 4 平差示例
所求點 I

1 起算數據

點	等	級	座 標		座 標 方 位 角	邊 長
			x	y		
A	III		6 107 348.2	5 570 523.8	12°47'17"	9 306.9
B	III		6 116 424.2	5 572 583.8	133 28 31	6 751.2
C	III		6 111 779.1	5 577 483.0	237 30 56	8 250.0

$$\begin{aligned}\angle A &= (AC) - (AB) = 44^\circ 43' 39'' \\ \angle B &= (BA) - (BC) = 59^\circ 18' 46'' \\ \angle C &= (CB) - (CA) = 75^\circ 57' 35''\end{aligned}$$

2. 改正數之計算及三角形之解算

角度 編號	觀測角	第一改正數	改正後的角 度之秒數	極條件方 程係數之 改 化	第二改正數	平 差 角	角 度 正 弦	邊 長
6 (7)	33°40'50"	$-\frac{1}{2}\omega_c$	+3"	—	$v_6'' = -v_6''$	33°40'55" (125 20 42)	0.554 582	5 609.2
1	20 58 25	$-\frac{1}{2}\omega_a$	+2	—	—	20 58 23	0.815 683	8 250.0
2	23 45 11	$-\frac{1}{2}\omega_a$	+1	$A_1 = \Delta_1 + \Delta_2$	$v_1'' = A_{1k}$	23 45 16	0.357 929	3 620.2
(8)	—	—	—	—	$v_2'' = -v_1''$	(127 48 41)	0.402 817	4 745.3
3	28 26 12	$-\frac{1}{2}\omega_b$	-6	$A_3 = \Delta_3 + \Delta_4$	$v_3'' = A_{3k}$	28 26 03	0.790 033	9 306.9
4	30 52 47	$-\frac{1}{2}\omega_b$	-7	—	$v_4'' = -v_3''$	30 52 43	0.476 149	5 609.2
(9)	—	—	—	—	—	106 50 37	0.513 221	3 620.2
5	42 16 40	$-\frac{1}{2}\omega_c$	+2	$A_5 = \Delta_5 + \Delta_6$	$v_5'' = A_{5k}$	42 16 40	0.957 099	6 751.2

$$\begin{aligned}\omega_a &= 1+2-\angle A = -3'' \\ \omega_b &= 3+4-\angle B = +13'' \\ \omega_c &= 5+6-\angle C = -5''\end{aligned}$$

$$[AA] = 191.0 \quad k = -\frac{\omega}{[AA]} = -0.38$$

