华东师范大学教材出版基金资助出版

线性系统控制理论

陈树中 韩正之 胡启迪 著

华东师范大学出版社

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章 线性动态系统的数学描述

§1 引 言

控制系统设计一般包括建立系统的数学模型、分析系统具有的性质和根据系统的这些性质给出达到目的的设计三个步骤。于是，建立系统的数学模型，系统分析和系统设计成为自动控制理论的主要研究内容。本书主要讲述其中的系统分析和系统设计两部分。所谓系统分析，即是研究系统的运动规律及系统性质；所谓系统设计(又称系统综合)，即是研究改变运动规律的可能性和可以采取的方法。并由此而揭示系统结构、参数、行为和性能间的定性的和定量的关系。

为了方便读者，我们在这小节先对控制理论中的基本概念作简单的介绍。

系统　系统论的研究对象。它是由多个具有一定特性的部分作为其构成要素，并按一定规律组合而成的具有特定功能的有序整体。实际的系统总具有具体的属性，它可以是工程的、生物的，也可以是经济的、教育的，但在控制理论中，总是抽去系统的具体属性(如物理的或社会的)，而抽象为一般意义下的系统进行研究。

物理系统的模型　物理系统是指存在于现实世界中的几个装置的有序集合。为了便于对物理系统进行解析研究，必须抓住装置的本质，抽象出物理模型。同一个物理系统，由于问题的提法和研究的重点不同，其所对应的模型可以是不一样的，例如宇宙飞船，

如果研究的是其飞行轨道，那么可视其为质点；如果研究宇宙飞船的姿态变化，那必须视其为刚体。本书中所论述的系统就是指物理系统的模型，它可用一个方框（图 1.1）来表征，方框以外的部分视为系统的环境。

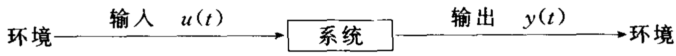


图 1.1　系统的方框图

系统的数学描述　反映系统的变量、参量和常量之间关系的一组数学表达式，又称数学模型。其中，参量指系统的参数或表征系统性能的参数。受环境影响，系统的参数一般是会变化的，系统性能参数的值是可以人为地改变的。常量是指不随时间改变的参数。实际上，数学模型只是真实客体的一种近似，一个系统可以由于研究的需要而有多种数学描述。

建立数学模型一般有两种方法。一种是通过分析系统的机理，直接运用各种物理原理来获得描述系统的数学方程。另一种是在对系统内部的结构并不清楚情况下，通过对系统进行试验，取得一系列的测量数据，应用相应的准则来分析和处理数据，并凭经验来最优地逼近真实系统，这种建模方法又称为系统辨识，系统辨识是控制理论中的一个重要分支。

系统输入 $u(t)$ 与系统输出 $y(t)$　如图 1.1，环境对系统的作用信号称为系统的输入（或称为系统的激励）。当加了输入后，系统会有反应，这种反应称为系统的输出（或称为系统的响应）。系统输入分为可以控制的和不可控制的，不可控制的输入常称为干扰。对于随时间变化而变化的输入和输出信号可用函数 $u(t)$ 和 $y(t)$ 来分别刻划。系统的输入 $u(t)$ 和系统的输出 $y(t)$ 称为系统的外部变量。

多输入与多输出　如果系统的输入有多个（如 m 个），用 u_1，u_2，……，u_m 表示，系统的输出有多个（如 r 个），用 y_1，y_2，……，

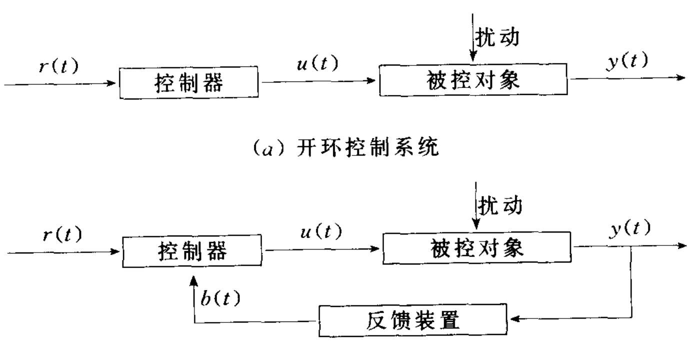
y_r 表示，那么分别称系统为多输入与多输出的，此时输入变量和输出变量常用向量表示，即：$u(t)=[u_1(t)\ \cdots\ u_m(t)]^T$ 和 $y(t)=[y_1(t)\ \cdots\ y_r(t)]^T$。

单变量系统和多变量系统　凡单个输入与单个输出的系统称为单变量系统，多个输入或输出的系统称为多变量系统。

控制与控制变量　按给定的指令使某物理量改变的行为称为控制。为了使系统完成规定的任务，必须对系统加上适当的控制信号，此类系统输入变量又称为系统的控制变量。

干扰量　干扰量是一种不可控的扰乱系统的行为的输入。如果扰动是由系统内部的参数变化等原因产生的，就称为内扰，否则称为外扰。

开环控制和闭环控制　控制量 $u(t)$ 是根据事先对系统的了解来确定的，它不受系统的输出 $y(t)$ 的影响，这种控制方式称为开环控制（如图 1.2(a)所示）。把系统信息（如输出量 $y(t)$）反作用到系统输入 $u(t)$ 上的控制方式称为闭环控制。它有利于系统消除偏差。这种把系统信息反送到系统输入的装置称为反馈装置（如图 1.2(b)）。图中的 $r(t)$ 称为参考输入，是一种预先确定的信号，如设定值、预定程序等，$b(t)$ 称为反馈信号。



(a) 开环控制系统

(b) 闭环控制系统

图 1.2　控制系统

动态系统 控制理论主要研究动态系统，又称为动力学系统。所谓动态系统，其现时输出 $y(t)$ 不但是依赖现时的输入 $u(t)$ 而且依赖过去的输入 $u(\tau)$ $(\tau \leqslant t)$。此时 $y(t)$ 与 $u(t)$ 的数学关系可用一组微分方程或差分方程来刻划。这是较狭义的定义，更抽象的定义可见文献[1]。

瞬时系统与有记忆系统 若系统在 t 时刻的输出仅取决于 t 时刻的输入，则称该系统为瞬时系统，或称无记忆系统。但大多数系统是有记忆系统，即 t 时刻的输出不仅取决于 t 时刻的输入，而且还取决于 t 时刻之前的输入。

系统的松弛性 若系统在 t_0 时刻无能量存储，则称系统在 t_0 时刻是松弛的，此时，$y_{[t_0,\infty)}$ 可由 $u_{[t_0,\infty)}$ 唯一的确定，即有

$$y_{[t_0,\infty)} = Hu_{[t_0,\infty)}, \tag{1.1.1}$$

其中 H 称为输入输出算子。本书中，我们总假设系统在 $t=-\infty$ 时是松弛的。

系统的因果律 若系统的输出 $y(t)$ 仅取决于输入 $u_{(-\infty,t]}$，而与 $u_{(t,\infty)}$ 无关，则称系统是因果的(或非预期的)，此时有：

$$y(t) = Hu_{(-\infty,t]}。 \tag{1.1.2}$$

线性系统与非线性系统 如果一个松弛系统满足对于任何输入 u_1 和 u_2，以及任何实数 c_1 和 c_2 都有

$$H(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1Hu_1 + c_2Hu_2, \tag{1.1.3}$$

则称该系统为线性的，否则称系统为非线性的。本书只讨论线性系统。

由于所选的变量不同，线性系统的数学描述主要有时间域上的和频率域上的两种形式。前者表现为微分方程组或差分方程组，后者表现为传递函数或频率响应，后者主要适用于定常系统。

时不变系统与时变系统 时不变系统又称定常系统，这类系统的结构和参数都不随时间变化而变化，即系统性质不随时间而

变。Q_α 称为位移算子，如果对任意的函数 $\xi(t)$和任何实数 α，

$$Q_\alpha \cdot \xi(t) = \xi(t-\alpha)。 \tag{1.1.4}$$

系统是时不变的当且仅当对任何输入 u 和任何实数 α 有

$$HQ_\alpha u = Q_\alpha Hu = Q_\alpha y。 \tag{1.1.5}$$

因此对时不变松弛系统言，无论何时施加输入，其输出波形总相同。

严格地说，系统的参数和结构不可能完全不变，由于元部件的老化或其它因素，系统的特性总会随着时间而退化，因此定常系统只不过是时变系统的一种理想化模型。然而只要系统的参数和结构的变化过程比系统的运动过程要慢得多，那么用定常系统代替时变系统进行分析，便可保证足够的精度。由于定常系统在分析和综合上的简易性，因此线性定常系统便成为研究的重点。

§2 时间域上线性系统的数学描述

时间域上线性系统的数学描述是指其数学模型是以时间作为自变量的。以这种数学描述为基础的系统分析与综合都是在时间域内进行的。时间域上的数学描述主要有两种基本类型。一种是不需要系统的内部信息，即只是通过外部变量 $u(t)$和 $y(t)$之间的关系来描述系统，它反映的只是系统的外部特性。这种描述称为系统的输入-输出描述（或称为系统的外部描述）。另一种方法是选取反映系统内部的特征的一组变量 $x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_n(t)$，称之为状态变量，一般记成向量形式 $x(t) = [x_1(t)\ x_2(t)\ \cdots\ x_n(t)]^T$，然后建立 $u(t)$，$x(t)$和 $y(t)$之间的关系。这种描述既刻划了系统内部特性，又描述了其外部的行为，我们称之为系统的状态空间描述

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(又称为系统的内部描述)。从以后的分析可以看出,一般地说,系统的外部描述是对系统的一种不完全描述,它不能反映系统内部的全部活动,而内部描述则是系统的一种完全的描述,它能完全表征系统的一切动力学特征。当然,在一定的条件下,这两种描述之间是可以相互转换的。

2.1 线性系统的输入输出描述

在控制理论发展的早期阶段,处理的大多是单变量系统,此时系统的外部描述是用一个单变量高阶微分方程来反映输入 $u(t)$ 输出 $y(t)$的关系,即

$$f\left(\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n},\ \cdots,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\ y;\ \frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}t^m},\ \cdots,\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},\ u,\ t\right)=0。\qquad (1.2.1)$$

特别,当系统是线性时,其外部描述为下述的线性常微分方程:

$$\begin{aligned}&y^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1(t)y'(t)+a_0(t)y(t)\\&=b_m(t)u^{(m)}(t)+b_{m-1}(t)u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1(t)u'(t)\\&\quad+b_0(t)u(t)。\end{aligned}\qquad (1.2.2)$$

其中的 t 表示时间,$a_i(t)$, $b_j(t)$ $(i=0,1,\cdots,n-1;\ j=0,1,\cdots,m)$ 为 t 的实函数。

当系统是定常时,$a_i(t)$, $b_j(t)$退化成常数,这时用 a_i, b_j 表示,(1.2.2)也就成为线性定常微分方程。

在将(1.2.1)或(1.2.2)推广到多变量系统的时候,方程会出现变量之间的耦合,求解将变得复杂起来。

利用脉冲函数 $\delta(t-\tau)$ (即脉冲发生在 τ 时刻的函数),可以对线性定常系统的输入输出描述给出一个非常简洁的积分表示,它的推导是直接的,可参阅[2],这里罗列一些主要的结果。

线性松弛系统　前文已经假定,本书提及的一切系统在 $t=-\infty$ 时都是松弛的。这时,线性定常单变量系统的输入输出描述是

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t,\ \tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{1.2.3}$$

其中二元函数 $g(t,\ \tau)$为系统的脉冲响应，它是系统输入为 $\delta(t-\tau)$ 时产生的响应，就是 $g(t,\ \tau)=H\delta(t-\tau)$，$\tau$ 是脉冲发生的时刻，t 是输出的时间变量。(1.2.3)式意味着当 $g(t,\ \tau)$已知时，系统的输入输出特性可以完全把握。

推广到多变量系统的时候，有

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(t,\ \tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{1.2.4}$$

其中 $G(t,\ \tau)=[g_{ij}(t,\ \tau)]_{q\times p}$ 为系统的脉冲响应阵。这里的二元函数 $g_{ij}(t,\ \tau)$表示第 j 个输入端输入一个脉冲 $\delta(t-\tau)$，其它的输入端都只有零输入时，系统第 i 个输出端的响应。特别需要强调的是(1.2.3)和(1.2.4)两式中的积分都是在$(-\infty,\ \infty)$上进行的。

线性松弛因果系统　由于系统在 $t=-\infty$ 时是松弛的，所谓系统是因果的是指在 $y(t)$和 $u(\tau)$ $(\tau>t)$ 无关，所以有

$$G(t,\ \tau)=0,\ (\forall\tau,\ \forall t<\tau)。 \tag{1.2.5}$$

因此

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}G(t,\ \tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{1.2.6}$$

在 t_0 时刻松弛的线性因果系统　此时积分的下限可以换成 t_0，就是

$$y(t)=\int_{t_0}^{t}G(t,\ \tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau,\ (\forall t\geqslant t_0)。 \tag{1.2.7}$$

在 t_0 时刻松弛的线性定常因果系统　由于对于定常系统成立

$$\begin{aligned}Q_\alpha g(t,\ \tau)&=Q_\alpha H\delta(t-\tau)=HQ_\alpha\delta(t-\tau)=H\delta(t-\tau-\alpha)\\&=g(t,\ \tau+\alpha),\ (\forall t,\ \tau,\ \alpha),\end{aligned}$$

所以

$$g(t,\tau)=Q_\alpha g(t+\alpha,\tau)=g(t+\alpha,\tau+\alpha)。$$

特别取 $\alpha=-\tau$，则有

$$g(t,\tau)=g(t-\tau,0),(\forall t,\tau)。$$

因此线性定常系统的脉冲响应函数仅仅依赖于 t 和 τ 的差值。为方便起见，记

$$g(t,\tau)=g(t-\tau,0)=g(t-\tau),(\forall t,\tau)。$$

应该指出，前后两个 g 描述的是不同的函数，人们只是为了方便才将后一个函数也记为 g。推广到多变量系统，则有

$$G(t,\tau)=G(t-\tau,0)=G(t-\tau),(\forall t,\tau)。$$

所以，对于在 t_0 时刻是松弛的系统，有

$$y(t)=\int_{t_0}^{t}G(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^{t-t_0}G(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau。\tag{1.2.8}$$

特别当 $t_0=0$ 时，(1.2.8)式化为

$$y(t)=\int_0^{t}G(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau=G(t)*u(t),\tag{1.2.9}$$

这里 $G(t)$ 表示在 $\tau=0$ 时输入 δ 函数所引起的响应，t 是响应的时间变量，其中 $*$ 表示卷积。(1.2.7)和(1.2.8)两式都是在 t_0 时刻系统松弛的条件下得到的。

2.2 线性系统的状态空间描述

系统的状态空间描述是建立在状态概念基础上的。状态的概念曾在经典动力学中得到过应用，60 年代初控制理论专家卡尔曼(R. E. Kalman)把它引入到控制理论中，并用来描述系统。状态概念由此而有了新的意义。下面就从介绍状态概念开始，建立系统的状态空间描述。

状态的概念　我们注意到，如果系统在 t_0 时刻非松弛，那么输出 $y_{[t_0,\infty)}$ 就不可能由 $u_{[t_0,\infty)}$ 唯一确定，还必须知道系统在 t_0 时刻的一组初始条件。初始条件不同，响应的输出 $y_{[t_0,\infty)}$ 也会不同。因此这组初始条件乃是反映系统内部特性的一组信息量，这组信息就称为状态。状态具有最小性，就是我们希望能用最少的信息量来完全地表征系统的内部特性。严格的状态概念可定义如下：

定义 2.1　系统在 t_0 时刻的状态，即指 t_0 时刻的一组个数最少的内部变量，它与输入量 $u_{[t_0,\infty)}$ 一起，可唯一地确定系统在 t 时刻 $(t \geqslant t_0)$ 的行为。

例如考虑某一质点（系统）的运动，仅知在 t_0 时刻受到的外力（输入）的作用，仍然无法确定 $t > t_0$ 时质点的运动（输出）。但如果我们还知道 t_0 时刻质点的位置和速度这两个信息，那么 $t > t_0$ 时运动规律就可唯一确定了，因此我们可视 t_0 时刻质点的位置和速度为系统的状态。

由于在不同时刻状态值未必相同，因而状态总是一组变量，一般用一组实值函数 $x_1(t)$，$x_2(t)$，… $x_n(t)$ 来表示状态，其中 $t \geqslant t_0$，t_0 为系统的初始时刻。若记

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} (t \geqslant t_0), \tag{1.2.10}$$

则称 $x(t)$ 为系统的状态向量，状态向量也常常简称为状态。

状态空间　一般地说，状态变量的个数可以是有限个，也可以是无限个。但本书仅研究状态变量是有限的这样一类系统，即状态向量是有限维的。状态向量是有限维的系统称为有限维系统，状态变量个数 n 称为系统的维数。

状态空间为状态向量 x 所取值的空间，记作 X。通常状态值为实值，因而，线性系统的状态空间 X 为 n 维实向量空间 $\mathbf{R}^n$。对于

某个确定时刻，状态表示为状态空间中的一个点，即有 $x \in X$，随时间的变化，状态的运动便形成了状态空间中的一条轨线。

为了进一步理解状态和状态空间的含义，现作如下几点注记：

(1) 一般所刻划系统内部特征的变量个数可以比 n 大，但其中相互独立的仅有 n 个。

(2) 系统状态的选择不是唯一的，它可随分析方法而不同，但一个线性系统的任意选取的两个状态向量 x 和 $\tilde{x}$之间必定存在着非异线性变换关系，即，存在可逆矩阵 $P(t)$，使得 $x(t) = P(t)\tilde{x}(t)$，记 $Q(t) = P^{-1}(t)$，那末有 $\tilde{x}(t) = Q(t)x(t)$。$P(t)$和$Q(t)$都称为状态的等价变换。

(3) 系统的状态，可以是与物理量有关的量(如位置、速度、电压等)，也可以是由于数学的需要而引出的(如通过非异线性变换)，而在物理意义上却难以理解的量，且状态不要求像系统的输出，必须是物理上可量测的量。

动态方程　一个动态系统的结构可以简单地用图 2.1 所示的方框图来表示。

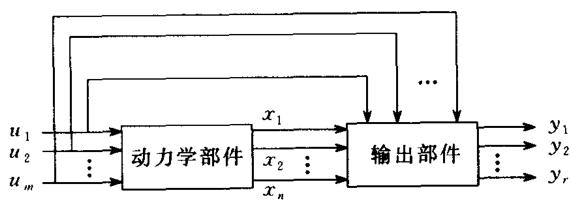


图 1.3　动态系统的结构示意图

图 1.3 表示一个由 m 个输入和 r 个输出组成的 n 维动态系统。系统的状态空间描述认为输入引起的系统状态变化，而状态和输入又决定了输出的变化。这种反映系统 $u(t)$、$x(t)$和 $y(t)$之间关系的数学方程组，称为动态方程，其中反映 $u(t)$和 $x(t)$之间动态关系的方程，称为系统状态方程，刻划 $x(t)$、$u(t)$和 $y(t)$之间转换关系的方程，称之为系统的输出方程(或量测方程)。一般动态方

程可用如下的一阶微分方程组表示：

$$\begin{cases} \dot{x}= f(x, u, t) \text{ 状态方程} \\ y = g(x, u, t) \text{ 输出方程} \end{cases} (t \geqslant t_0); \tag{1.2.11}$$

其中 $x=[x_1 \ \cdots \ x_n]^T$，$u=[u_1 \ \cdots \ u_m]^T$ 和 $y=[y_1 \ \cdots \ y_r]^T$；

$$f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x, u, t) \\ \vdots \\ f_n(x, u, t) \end{bmatrix} \text{和 } g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x, u, t) \\ \vdots \\ g_r(x, u, t) \end{bmatrix}。 \tag{1.2.12}$$

为了对任何初态 $x(t_0)$和任何给定的连续输入 $u(t)$ $(t \geqslant t_0)$，状态方程(1.2.11)有唯一确定的解，我们假定 f_i 和 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(i, j = 1, 2, \cdots n)$ 都是时间 t 的连续函数。此时，由 $u_{[t_0, \infty)}$和 $x(t_0)$可以唯一确定 $x_{[t_0, \infty)}$和 $y_{[t_0, \infty)}$。

线性动态方程　当动态系统为线性时，(1.2.12)式中的向量函数 $f(x, u, t)$和 $g(x, u, t)$的所有元都是变量 x 和 u 的线性函数，此时状态空间描述为

$$(E)\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} (t \geqslant t_0), \tag{1.2.13}$$

其中 $A(t)$，$B(t)$，$C(t)$和 $D(t)$分别称为系统的动态矩阵、输入矩阵、输出矩阵和直接传输矩阵，这些矩阵的元素都假设为时间 t 的连续函数，因此方程(1.2.13)有唯一解。

对于线性定常系统，(1.2.13)中的矩阵 $A(t)$，$B(t)$，$C(t)$和 $D(t)$均与时间 t 无关，此时方程(1.2.13)可写成

$$(FE)\begin{cases} \dot{x}= Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \tag{1.2.14}$$

其中 A，B，C 及 D 分别为 $n \times n$，$n \times m$，$r \times n$ 及 $r \times m$ 的常值

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com