基辅数学奥林匹克试题集

JIFU SHUXUE AOLINPIKE SHITIJI

上海科学普及出版社

基辅数学奥林匹克试题集

[苏] В. А. 维申斯基　Н. В. 卡塔肖夫
В. И. 米哈依洛夫斯基　М. И. 雅特连科编著

上海科学普及出版社

责任编辑　顾慈兰

基辅数学奥林匹克试题集

［苏］B. A. 维申斯基等编著

上海科学普及出版社出版发行

（上海曹杨路500号）

各地新华书店经销　商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 12.25　字数 280000

1989年2月第1版　1989年2月第1次印刷

印数 1—10000

ISBN 7-5427-0144-4/O·4　　定价：4.40 元

译 者 序

本书是根据苏联国立基辅大学出版社出版的《基辅数学奥林匹克试题集》(СБОРНИК ЗАДАЧ КИЕВСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД)1984年的版本译出的.

全书包含了1935～1983年基辅市数学奥林匹克绝大部分的试题. 试题新颖别致、内容广泛、层次分明. 不仅包括了中学数学课程的各个分支,而且还涉及到初等数论的知识;组合数学的基本概念和原理等内容. 并针对试题的难易程度,给出完整或提示性的解答. 此外,从试题中还可以看到苏联中小学学制和数学教学内容的变化. 对十年制而言,四至八年级为中年级,九至十年级为高年级.

本书可供我国学有余力、有志于数学竞赛的广大中学生,以及担任数学竞赛、数学课外活动辅导工作的老师使用,也可为选修课所用. 随着中学数学教育的改革,这本书对于提高中学数学课程的教与学的水平,也将是十分有益的.

参加本书翻译的有何声武、吕乃刚、王静龙、刘鸿坤、倪明. 何声武和刘鸿坤对全书进行了统校. 在翻译过程中译者对原书中的印刷错误及作者疏漏之处,凡已发现的均一一改正,译文中不再说明.

错误是难免的,恳请读者不吝赐教,以便日后改正.

译 者

1988年3月于华东师范大学

作 者 序

年青数学家的竞赛——数学奥林匹克是在青年学生中传播知识的一个重要手段，在提高中学数学教育水平方面起着重大的作用．在我国数学奥林匹克得到了广泛的推行．每年进行区、市、州、共和国的数学奥林匹克，以全苏数学奥林匹克作为决赛而告结束．

在苏联，第一次数学奥林匹克是1934年春天在列宁格勒举行的．它的组织者是基辅大学毕业生、列宁格勒大学教授狄龙涅(Б. Н. Делоне)和塔泰可夫斯基(В. А. Тартаковский)．

次年，1935年在莫斯科与基辅进行了首次数学奥林匹克．

基辅数学奥林匹克的创导者是乌克兰科学院院士、基辅大学教授克拉甫楚克(М. Ф. Кравчук)．物理数学系的青年教师与研究生德林费尔特(Г. И. Дринфельд)、伊林(И.Г.Ильин)、拉寞舍娃(К. Я. Латышева)、莫夫希茨(С. С. Мовшиц)、阿符拉门科(С. А. Авраменко)、吉赫曼(И. И.Гихман)积极参加了战前的数学奥林匹克的组织与活动．战后，由鲍高柳勃夫院士(Н. Н. Боголюбова)创议，在1946年恢复了数学奥林匹克．在准备奥林匹克及组织基辅大学所属的中学生数学小组中，著名的数学史与数学方法专家格拉齐安斯卡雅(Л. Н. Грацианская)起了突出的作用．

基辅大学总是积极参与数学教育的发展．在普及数学知识方面《初等数学杂志》占有特别的地位，它的创刊号是在1884年9月出版的． 由基辅大学教授叶尔马可夫(В. П.

Ермаковым）组织的这一出版物首先是为中等学校的学生与教师的．在杂志上，由读者提供的征解的问题及这些问题的解答是一个主要的栏目．叶尔马可夫杂志的问题栏，实质上是我们现在的苏联各共和国的中学生都参加的通讯数学奥林匹克的先驱。

本书的出版正遇上了苏联数学奥林匹克的50周年．

本书包含了由基辅大学系统进行的，1935～1983年基辅市数学奥林匹克的试题．

很遗憾，作者未能找到某些战前数学奥林匹克的试题．但我们仍希望读者了解本书的内容之后，能追踪我国近50年来中学数学教育的进展．本书的材料囊括了中学数学课程的各个分支．大多数试题的解答要求一定程度的独立思考和机灵，也就是这些问题在发展数学才能上起重要作用．

在本书的第二部分①中，对最困难的问题给出完整的解答．

本书特推荐给中学与中专的数学教师．它可为选修课所用，随着中学教育改革的实施，选修课的作用在显著地增加．对于学生我们想强调下述意见：看了题目之后不要急忙去读解答．不要吝惜几个小时甚至几天去解一个问题．只是在长久的思索未能达到目的时才去看我们的解答．独立找到的思路或解答将会永远留在你们的记忆中．

将如此长时期的试题收集在一起不仅对数学教师与数学奥林匹克的组织者有好处，对那些喜欢解数学题，想试试自己的才能的人也是有利的．

我们真诚地感谢帮助准备本书的基辅大学力学数学系的教师与毕业生们．

① 本译文中以一个年度的赛题为一个单元．解答直接附在该赛题之后。

目　录

1935 年竞赛题及解答

九、十年级

1. 计算表示式

$$\frac{b^3-a^3b-b^2c+ca^3}{(b-c)^2}+\sqrt{d}$$

在 $a=-\frac{1}{2}$，$b=-0.19$，$c=0.18$，$d=0.04$ 时的值.

2. 解方程

$$4^{x^2-\sqrt{x^2-9}-20.75}=\sqrt{2}.$$

3. 正三棱柱的高为H. 连接上底的中心与下底的边的中点的直线交底面成 α 角. 求棱柱的全面积.

4. 正棱台的高为 h，侧棱为 b. 求棱锥的侧面的高.

5. 解方程组

$$\begin{cases}x+y=4,\\(x^2+y^2)(x^3+y^3)=280.\end{cases}$$

6. 正数 u_1，u_2，…，u_n组成算术级数. 证明：

$$t_n=\frac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}}+\frac{1}{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_n}}.$$

7. 设 a，b 为直角三角形的直角边，c 为斜边. 证明：

$$\log_{b+c}a+\log_{c-b}a=2\log_{c+b}a\log_{c-b}a.$$

8. 已知三角形的外接圆半径 R，内切圆半径 r 及一条边上的高，求三角形的各边与角.

9. a, b, c 取何值时，多项式 x^4+ax^2+bx+c 被 $(x-1)^3$ 除尽？

10. 两圆交于 A 点与 D 点. 过 A 点引直线交两圆于 P 点及 Q 点. 若直线绕 A 点转动，求线段 PQ 的中点的轨迹.

11. 已知直角三角形的两直角边之和大于斜边8厘米，斜边上的高等于9.6厘米，求三角形的各边.

12. 证明：对任意整数 n，$n^6+2n^5-n^2-2n$ 被120整除.

13. 若三角形 ABC 的角 A, B, C 满足等式

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1,$$

则三角形为直角三角形. 试证之.

解　　答

九、十年级

6. 设 $d=u_k-u_{k-1}$ 为级数的公差. 则

$$t_n=\frac{\sqrt{u_2}-\sqrt{u_1}}{u_2-u_1}+\frac{\sqrt{u_3}-\sqrt{u_2}}{u_3-u_2}+\cdots+\frac{\sqrt{u_n}-\sqrt{u_{n-1}}}{u_n-u_{n-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{u_n}-\sqrt{u_1}}{d}=\frac{u_n-u_1}{d(\sqrt{u_n}+\sqrt{u_1})}$$

$$=\frac{(n-1)d}{d(\sqrt{u_n}+\sqrt{u_1})}=\frac{n-1}{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_1}}.$$

9. 将多项式 $P(x)=x^4+ax^2+bx+c$ 除以 $x-1$，得商式

$$P_1(x)=x^3+x^2+(a+1)x+a+b+1$$

及余式 $a+b+c+1$. 由题意 $a+b+c+1=0$.

$P_1(x)$ 除以 $x-1$ 得商式

$$P_2(x)=x^2+2x+(a+3),$$

余式 $2a+b+4$. 这余式也应等于零，因为 $P_1(x)$ 被 $x-1$ 除尽. 将 $P_2(x)$ 除以 $x-1$. 余式为 $a+6=0$.

因此 $\qquad a=-6,\ b=8,\ c=-3.$

10. 设 PQ 为过 A 点的任意割线，M 为线段 PQ 的中点，B 与 C 为直径 AB 与 AC 的端点，K 为线段 BC 的中点. 则 $BP\perp PQ$, $CQ\perp PQ$, 因而 $BP\parallel CQ\parallel KM$, $KM\perp PQ$. 这样，从 M 点看固定的线段 AK 的视角为直角. 因此，要求的轨迹是以 AK 为直径的圆.

12. 将所给表示式写成

$$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2),$$

并注意到，五个连续的自然数中一定有一个被 5 整除，至少有一个被 3 整除，至少有 2 个偶数. 同时两个相继的偶数中有一个被 4 整除. 这就意味着，所讨论的乘积被 $5\cdot3\cdot2\cdot4=120$ 整除.

13. 将所给等式改写成

$$\frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}+\cos^2 C=1,$$

$$\cos 2A+\cos 2B+2\cos^2 C=0,$$

$$2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C=0.$$

但是 $\quad \cos(A+B)=\cos(180°-C)=-\cos C.$

所以 $\quad 2\cos C[\cos C-\cos(A-B)]=0.$

$$4\cos C\sin\frac{A-B+C}{2}\sin\frac{A-B-C}{2}=0,$$

$$4\cos C\cos B\cos A=0.$$

由此得，角 A, B, C 中有一个等于 90°.

1936 年竞赛题及解答

七年级

14．求过两定点的圆的圆心轨迹．

15．三角形 ABC 的边按比例 $\frac{BP}{PC}=\frac{CQ}{QA}=\frac{AK}{KB}=\frac{1}{2}$ 分割．求由直线 AP, BQ, CK 所围成的三角形 $A'B'C'$ 的面积与三角形 ABC 的面积之比．

16．证明：x 与 y 取同一值时，$x^3+y^3+x^4y+xy^4$ 及 $x+y$ 的值有相同的符号．

17．解方程组

$$\begin{cases}\frac{yz}{y+z}=a,\\ \frac{xz}{x+z}=b,\\ \frac{xy}{x+y}=c.\end{cases}$$

18．化简分式

$$\frac{x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x+1},$$

并计算它在 $x=-0.02$ 时分式的值．

八年级

19．求定圆中有定长的各弦按定比的分点的轨迹．

20．在梯形 $ABCD$ 中底边 $AB=a$，每一个底角等于 $45°$．梯形的腰等于 b．求梯形的面积及由底边 AB 与边 AD、BC 的延长线所围成的三角形的面积．

21．给定线段 a, b, c, d. 作线段 $x=\sqrt[4]{abcd}$.

22．化简分式

$$\frac{x^8+x^6y^2+x^4y^4+x^2y^6+y^8}{x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4},$$

并计算 $x=0.01$, $y=0.02$ 时分式的值.

23．求四个数，它们组成几何级数，两个边项之和等于27,中间两项之和等于18.

24．解方程

$$\frac{x}{x+a}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+x}}=\frac{b}{a}.$$

九年级

25．求周长相等的正三角形及正六边形的面积之比.

26．在平面 P 上方的平行四边形的三个顶点到平面 P 的距离分别为a,b, c, 求第四个顶点到这平面的距离.

27．在直角三角形 ACB 中斜边 $AB=c$, 直角边 $AC=b$. 由直角顶点作斜边 AB 的垂线，由此垂线的垂足作直角边 AC 的垂线，然后由这垂线的垂足再作斜边 AB 的垂线，由垂足再作 AC 的垂线，这样无限继续下去. 求所有这些垂线的长度之和.

28．解方程

$$3^{x^2+1}+3^{x^2-1}-270=0.$$

29．解方程组

$$\begin{cases}2^{\lg x}+3^{\lg y}=5,\\2^{\lg x}\cdot 3^{\lg y}=4.\end{cases}$$

30．已知 $\dfrac{\sin^4\alpha}{a}+\dfrac{\cos^4\alpha}{b}=\dfrac{1}{a+b}$. 证明：

$$\frac{\sin^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}.$$

31．证明：

$$\cos^2\alpha+\cos^2(60^\circ+\alpha)+\cos^2(60^\circ-\alpha)$$
$$=\sin^2\alpha+\sin^2(120^\circ+\alpha)+\sin^2(120^\circ-\alpha)=\frac{3}{2}.$$

32．已知 $\cos\alpha=\frac{3}{4}$．计算：

$$16\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{3\alpha}{2}-\sin^2 2\alpha.$$

十年级

33．凸四边形的边长为 a, b, c, d，一双对角之和等于 2α．证明：四边形的面积等于

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\alpha},$$

其中 p 为四边形的半周长．

34．过圆内一点作长度预先给定的弦．

35．已知圆锥的底半径 R、圆锥母线与底面的夹角 α．在圆锥内作内接立方体，其底在圆锥的底面上．求立方体的棱长．

36．设 S_m 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的 m 次方的和．证明：

$$aS_m+bS_{m-1}+cS_{m-2}=0.$$

认为 S_0 与 S_1 已知，求 S_2 与 S_3．

37．解方程组

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{7}{\sqrt{xy}},\\ \sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}=\sqrt{12}.\end{cases}$$

38．证明：对任意实数 a，都有不等式

$$3(1+a^2+a^4)\geqslant(1+a+a^2)^2.$$

39．解方程

$$\sqrt[x]{9}+\sqrt[x]{6}=\sqrt[x]{4}.$$

40．解方程

$$\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}(1-x)=2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x-x^2}.$$

41. 解方程

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x.$$

42. 设 A 与 B 分别为 $(x+a)^n$ 的展开式中奇数项与偶数项之和. 求 A^2-B^2.

43. 解方程

$$\log_3 x+\log_x 3-2\log_3 x\log_x 3=\frac{1}{2}.$$

44. 给定正 n 棱锥, 底边为 a, 侧面的顶角为 α. 求棱锥的内切球的半径.

45. 解方程

$$a^{\log_{\sqrt{b}} x}-5x^{\log_b a}+6=0.$$

46. 解方程

$$\sin 5x\cos 3x=\sin 6x\cos 2x+\sin 2x.$$

47. 证明: 分数 $\dfrac{a^2+b^2}{ac+bd}$ (a, b, c, d 均为整数)不可约, 若 $ad-bc=1$.

48. 求使 $(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$ 取最小值的 x.

49. 给定一凸四边形, 作一正方形, 使四边形的顶点在正方形的边上.

50. 一棱锥外接于高为 1 米的圆锥, 棱锥的底是对角线为 6 米与 8 米的菱形. 求内切于一个由棱锥的底面与两个侧面构成的三面角且与圆锥侧面相切的球的半径.

51. 给定方程组

$$\begin{cases} x(1+\sin^2\theta-\cos\theta)-y\sin\theta(1+\cos\theta)=c(1+\cos\theta), \\ y(1+\cos^2\theta)-x\sin\theta\cos\theta=c\sin\theta. \end{cases}$$

求 x 与 y. 消去 θ.

解　答

七年级

17．设 $a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$. 注意到 $x\neq0$, $y\neq0$, $z\neq0$, 将方程组改写成

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a},\quad \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{b},\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{c}.$$

将上述三个方程逐项相加，得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

由最后这个方程与方程组的每一个方程比较，就得到

$$x=\frac{2abc}{ac+ab-bc},\quad y=\frac{2abc}{ab+bc-ac},\quad z=\frac{2abc}{ac+bc-ab}.$$

18．作相应的变换后，得

$$\frac{x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}=\frac{x^{10}-1}{x^2-1}:\frac{x^5-1}{x-1}$$

$$=\frac{x^5+1}{x+1}=x^4-x^3+x^2-x+1.$$

八年级

21．我们记得，对给定的线段 a 与 b，能按下列方法作线段 $\sqrt{ab}$．在直线上取线段 $AB=a$, $BC=b$. 以 AC 为直径作半圆，并在 B 点引 AB 的垂线．设 D 为垂线与半圆周的交点．这时 $BD=\sqrt{ab}$．为了作未知线段 $x=\sqrt[4]{abcd}$，只要注意到 $x=\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}$ 即可．

23．设 a, aq, aq^2, aq^3 为未知的级数，则

$$a(1+q^3)=27,\ aq(1+q)=18.$$

将第一式除以第二式，得

$$2q^2-5q+2=0,$$

由此得 $q_1=2$, $q_2=\frac{1}{2}$. 从而 $a_1=3, a_2=24$.

因此，所求级数为

$$3, 6, 12, 24 \text{ 或 } 24, 12, 6, 3.$$

九年级

26. 设平行四边形 $ABCD$ 的顶点 A, B, C 到平面 P 的距离分别等于 a, b, c. 第四个顶点到平面 P 的距离记为 x. $ABCD$ 的对角线交点 O 在平面 P 上的投影记为 O_1. 线段 OO_1 是两个梯形 AA_1C_1C 与 BB_1D_1D 的中线.

所以
$$OO_1=\frac{a+c}{2}=\frac{b+x}{2},$$

由此得

$$x=a+c-b.$$

30. 将等式

$$\frac{\sin^4\alpha}{a}+\frac{\cos^4\alpha}{b}=\frac{1}{a+b}$$

的两边乘以 $a+b$，并将右边的 1 换成 $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2$. 可得

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+\frac{b}{a}\sin^4\alpha+\frac{a}{b}\cos^4\alpha$$
$$=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha,$$

由此得 $\frac{b}{a}\sin^4\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\frac{a}{b}\cos^4\alpha=0,$

$$\frac{b}{a}\sin^4\alpha=\frac{a}{b}\cos^4\alpha,$$

即 $\frac{\sin^4\alpha}{a^2}=\frac{\cos^4\alpha}{b^2}=c$. 代入原等式得 $c=\frac{1}{(a+b)^2}$. 所以

$$\frac{\sin^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}=\frac{a}{(a+b)^4}+\frac{b}{(a+b)^4}$$
$$=\frac{1}{(a+b)^3}.$$