

解析不等式的若干问题

↓
胡克 著



全国
优秀出版社
学出版社

0178
H572

解析不等式的若干问题

↓
胡克 著



全国优秀出版社
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

解析不等式的若干问题/胡克著. —武汉: 武汉大学出版社,
2003. 9
ISBN 7-307-03960-5

I. 解… II. 胡… III. 不等式—研究 IV. O178

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 059439 号

责任编辑: 顾素萍 责任校对: 刘 欣 版式设计: 支 笛

出版发行: 武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件: wdp4@whu.edu.cn 网址: www.wdp.whu.edu.cn)

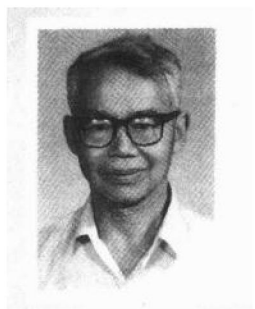
印刷: 湖北省荆州市今印印务有限公司

开本: 850×1168 1/32 印张: 5 字数: 120 千字 插页: 2

版次: 2003 年 9 月第 1 版 2003 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 7-307-03960-5/O · 280 定价: 8.00 元

版权所有, 不得翻印; 凡购买我社的图书, 如有缺页、倒页、脱页等质量问题,
请与当地图书销售部门联系调换。



作者简介

胡克

1925年出生，江西奉新人。1952年毕业于南昌大学。随后五年在复旦大学数学系，师从陈建功教授，从事单叶函数论方面的研究工作。1981年在江西师范大学数学系晋升为教授。迄今为止在中外杂志上发表了数学论文80余篇。并著有《基础不等式创建、改进与应用》、《单叶函数的若干问题》等。

胡克教授于1981年发表在“中国科学”（第2期）上的论文“一个不等式及其若干应用”针对Hölder不等式的缺陷提出了一个全新的不等式，被美国数学评论(83m:26019)称之为“一个杰出的非凡的新的不等式”，现称为胡克(HK)不等式。胡克教授对这个不等式及其应用作了系统而深刻的研究。这些成果反映在本专著中。

前 言

本书源于作者在给数学专业高年级本科生和研究生开设的选修课中,为引发听者对数学研究的兴趣,而讲授的一系列不等式的创建和应用问题.在数学研究中大家要注意如下十个要点:从无到有,从易到难,由小到大,由浅入深,删繁就简,去粗取精,异中求同,同中察异,美满中察不足,不足中求美满.本书正是这十大要点的体现.

本书大部分内容为作者的科研成果.共分五章,扼要介绍如下:

第一章介绍基础关系式和 Hölder 不等式的发展中有关的经典不等式.

第二章建立了两个新的不等式,以弥补应用 Hölder 不等式之不足,并使得许多重要的不等式得以改进.

第三章阐述了某些重要不等式的性质,解决了长达 30 年之久的 Opial-华罗庚积分不等式问题.

第四章是各种 Hilbert 类型不等式的改进和推广,显示了第二章所建的两个不等式的作用.

第五章介绍了凸函数的经典结果及近年来有关的新成果.

本书中很少部分提到的有关复变函数的一些结果与定理,若读者不熟悉的话,可以视其为给定的条件来对待,这不会影响本书的阅读.

由于作者水平所限,错误在所难免,希望读者指正.

作 者

2003 年 6 月

目 录

前 言	1
第一章 基础不等式和相关不等式	1
§ 1.1 Cauchy-Schwarz 不等式	1
§ 1.2 基础关系式和 Hölder 不等式	2
§ 1.3 算术平均、几何平均不等式及 Hölder 不等式的推广	4
§ 1.4 Young 不等式	5
§ 1.5 Cauchy-Schwarz 不等式的进一步性质	7
第二章 两个新的基础不等式及其应用	10
§ 2.1 一个新的不等式	10
§ 2.2 又一个新的不等式	15
§ 2.3 应用 1——Minkowski 不等式和 Dresher 不等式的改进	19
§ 2.4 应用 2——Carlson, Laudan, Hardy, Nagy 等 不等式的改进	22
§ 2.5 应用 3——Beckenbach 不等式的改进	24
§ 2.6 应用 4——Opial-Beesack 不等式的改进	26
§ 2.7 应用 5——有关伪平均不等式的推广与改进	31
§ 2.8 应用 6——Ky Fan 不等式的改进	33

§ 2.9	应用 7——Jenkins 不等式的改进与证明的简化	35
§ 2.10	应用 8——单叶函数中 $ f $ 的偏差定理的改进	37
第三章	几个重要不等式构成函数的单调性问题	42
§ 3.1	单变量的不等式构成一个函数 $F(x) \geq 0$, $F(0) = 0$, 并具有单调增加(或减少)问题	42
§ 3.2	Hölder, Minkowski 不等式构成函数的单增性	43
§ 3.3	HK 不等式构成函数的单增性	44
§ 3.4	改进后的 Beesack 不等式构成函数的单增性	48
§ 3.5	Opial-华罗庚型的不等式问题完美解决且 其构成函数具有单增性	50
§ 3.6	复合指数函数间的基础不等式	52
§ 3.7	有关复合指数函数的单调性不等式	58
第四章	Hilbert, Hardy 型不等式中的若干问题	61
§ 4.1	Hilbert, Hardy 各类型不等式的介绍	61
§ 4.2	Ingham 不等式的改进	62
§ 4.3	Hilbert B 型不等式和 Ingham 不等式统一 优美公式及其改进	63
§ 4.4	特殊情形下 Ingham 不等式的精细改进	66
§ 4.5	Hardy-Littlewood 之一不等式的改进	69
§ 4.6	Polya, Szego, A' , C' 两型平方模和的优美不等式	70
§ 4.7	两类特殊 Hilbert A, B 型不等式的估计	74
§ 4.8	Hilbert D 型不等式的估计——徐利治问题	76
§ 4.9	Hilbert 积分不等式的改进	82
§ 4.10	Widder 不等式的改进	83
§ 4.11	Hardy-Littlewood-Polya 不等式的第一种推广、 改进与应用	84

§ 4.12 Hardy-Littlewood-Polya 不等式的第二种推广、 改进与应用	92
§ 4.13 Hardy-Littlewood-Polya 不等式的第三种推广、 改进与应用	96
§ 4.14 Knopp 不等式的几种推广	99
§ 4.15 有关 Hilbert 型积分不等式的另一种推广	102
§ 4.16 有关 Hardy 之一不等式的推广与改进	104
§ 4.17 H_p 函数中 Hardy 之一定理的改进	111
§ 4.18 H_p 函数中 Fejer-Riesz 不等式的改进与推广	112
§ 4.19 Hilbert B 型不等式又一种推广与改进	117
 第五章 有关凸函数的若干不等式及其应用	121
§ 5.1 凸函数的概念及其基本性质	121
§ 5.2 几何平均与算术平均构成函数的单调性	126
§ 5.3 Jensen 不等式构成函数的单调性	127
§ 5.4 Hardmard 不等式及其构成函数的单调性	128
§ 5.5 凸函数的积分平均及其构成函数的单调性	130
§ 5.6 Hardmard 不等式的推广及其简易证明	131
§ 5.7 Steffensen 不等式构成函数的单增性与 Jensen 不等式的改进	131
§ 5.8 van der Corput 不等式	134
§ 5.9 Carleman 不等式的改进	135
§ 5.10 van der Corput 之一不等式的改进	136
§ 5.11 有关凸函数的积分不等式	139
 附 录 Gram 不等式的证明	141
参考书目	143
参考文献	144

第一章 基础不等式和相关不等式

我们知道, Cauchy-Schwarz 不等式、Hölder 不等式在数学基础理论和应用上起着非常重大的作用, 而且 Hölder 不等式是 Cauchy-Schwarz 不等式的推广. 这些不等式源于一个简单的所谓基础关系式:

$$x^a y^{1-a} \leq ax + (1-a)y, \quad x, y \geq 0, a \in [0, 1]. \quad (*)$$

本章我们首先介绍这些经典不等式以及它们的推广和应用, 目的在于观察它们的发展、壮大、精妙和美中不足.

§ 1.1 Cauchy-Schwarz 不等式

下面给出 Cauchy-Schwarz 不等式的三个证明.

定理 1.1.1 (Cauchy-Schwarz 不等式) 设 a_k, b_k ($k=1, 2, \dots, n$) 为实数列, 则

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right), \quad (1.1.1)$$

当且仅当 $a_k = tb_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) 时等号成立.

证 1 设 A_k, B_k 为正实数. 由 $(A_k - B_k)^2 \geq 0$, 可知

$$A_k B_k \leq \frac{1}{2} (A_k^2 + B_k^2). \quad (1.1.2)$$

在(1.1.2)中, 对 k 求和, 得

$$\sum_{k=0}^n A_k B_k \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n A_k^2 + \sum_{k=0}^n B_k^2 \right). \quad (1.1.3)$$

取 $A_k = a_k / \left(\sum_{k=0}^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $B_k = b_k / \left(\sum_{k=0}^n b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, 代入(1.1.3)式即得
(1.1.1).

证 2 (1.1.1)式也可直接由 Lagrange 恒等式

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k^2 \right) - \left(\sum_{k=0}^n a_k b_k \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{r,k=0}^n (a_r b_k - a_k b_r)^2 \geq 0 \quad (1.1.4)$$

得出.

证 3 设 x 为实数. 因

$$\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 = x^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2x \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \geq 0,$$

所以

$$\Delta = \left(2 \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 - 4 \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \leq 0.$$

因此(1.1.1)式成立.

若 $a_k = tb_k$, $k=1, 2, \dots, n$, 从(1.1.4)式中很容易看出等号成立. $\square$

§ 1.2 基础关系式和 Hölder 不等式

上节, 我们从简单的 $AB \leq \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$ 关系式推出了 Cauchy-Schwarz 不等式. 我们能否将此式作更进一步的推广呢?

定理 1.2.1 (基础关系式) 设 $A, B \geq 0$, 则

$$A^\alpha B^{1-\alpha} \leq \alpha A + (1-\alpha)B, \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (1.2.1)$$

证 若 A, B 中有一个为 0, 则(1.2.1)式显然成立.

设 A, B 均不为零. 将(1.2.1)式两边同除以 B , 得

$$\left(\frac{A}{B} \right)^\alpha \leq \alpha \left(\frac{A}{B} \right) + (1-\alpha).$$

令 $\frac{A}{B} = x$, 则上式变为

$$x^a \leq ax + (1-a). \quad (1.2.2)$$

所以我们只需证明(1.2.2)式成立就可以了.

记 $f(x) = ax + (1-a) - x^a$. 则

$$f'(x) = a - ax^{a-1}.$$

因此, 当 $x > 1$ 时 $f'(x) > 0$, 当 $0 < x \leq 1$ 时 $f'(x) < 0$; $f'(1) = 0$. 所以 $f(1)$ 为极小值, 且 $f(1) = 0$. 因此(1.2.2)式成立, 从而(1.2.1)式成立. $\square$

定理 1.2.2 (Hölder 不等式) 设 $a_k, b_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), $p, q \geq 1$ 以及 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (1.2.3)$$

其中等号当且仅当 $a_k^p = tb_k^q$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 时成立.

其积分形式为

$$\int f(x)g(x)dx \leq \left(\int f^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int g^q(x)dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (1.2.4)$$

其中 $f(x), g(x) \geq 0$.

证 在(1.2.1)式中取 $\alpha = \frac{1}{p}$, $A = A_k^p$, $B = B_k^q$, 则(1.2.1)式变为

$$A_k B_k \leq \frac{1}{p} A_k^p + \frac{1}{q} B_k^q. \quad (1.2.5)$$

将上式两边对 k 求和, 便得

$$\sum_{k=1}^n A_k B_k \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n A_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n B_k^q. \quad (1.2.6)$$

令 $A_k = a_k / \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $B_k = b_k / \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}$, 代入上式即知(1.2.3)式成立. $\square$

§ 1.3 算术平均、几何平均不等式 及 Hölder 不等式的推广

本节介绍算术平均、几何平均不等式以及 Hölder 不等式的推广.

定理 1.3.1 设 $A_k \geq 0$, $t_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 及 $\sum_{k=1}^n t_k = T_n$, 则

$$\left(\prod_{k=1}^n A_k^{t_k} \right)^{\frac{1}{T_n}} \leq \frac{1}{T_n} \sum_{k=1}^n t_k A_k. \quad (1.3.1)$$

证 由定理 1.2.1, 得

$$\begin{aligned} \left(\prod_{k=1}^n A_k^{t_k} \right)^{\frac{1}{T_n}} &= \left[\left(\prod_{k=1}^{n-1} A_k^{t_k} \right)^{\frac{1}{T_{n-1}}} \right]^{\frac{T_{n-1}}{T_n}} \cdot A_n^{t_n/T_n} \\ &\leq \frac{T_{n-1}}{T_n} \left(\prod_{k=1}^{n-1} A_k^{t_k} \right)^{\frac{1}{T_{n-1}}} + \frac{t_n}{T_n} A_n. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

再由归纳法即证得定理. $\square$

定理 1.3.2 (i) 设 $A_k^{(i)} \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, m$) 及 $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, 则

$$\sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^m A_k^{(i)} \leq \prod_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n (A_k^{(i)})^{1/\alpha_i} \right)^{\alpha_i}. \quad (1.3.3)$$

(ii) 设 $f_i(x) \geq 0$, 则

$$\int \prod_{i=1}^n f_i(x) dx \leq \prod_{i=1}^n \left(\int f_i(x)^{1/\alpha_i} dx \right)^{\alpha_i}. \quad (1.3.4)$$

证 只要证明(1.3.3)式就可以了. 令 $T_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. 由 Hölder

不等式, 可得

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m \prod_{k=1}^n A_k^{(i)} &= \sum_{i=1}^m \left(\prod_{k=1}^{n-1} A_k^{(i)} \cdot A_n^{(i)} \right) \\
 &\leq \left[\sum_{i=1}^m \left(\prod_{k=1}^{n-1} A_k^{(i)} \right)^{\frac{T_n}{T_{n-1}}} \right]^{\frac{T_{n-1}}{T_n}} \left[\sum_{i=1}^m (A_n^{(i)})^{1/a_n} \right]^{a_n} \\
 &\leq \sum_{i=1}^m \left(\prod_{k=1}^{n-2} A_k^{(i)} \right)^{\frac{T_n}{T_{n-2}}} \left[\sum_{i=1}^m (A_{n-1}^{(i)})^{1/a_{n-1}} \right]^{a_{n-1}} \\
 &\quad \left[\sum_{i=1}^m (A_n^{(i)})^{1/a_n} \right]^{a_n} \\
 &\leq \dots
 \end{aligned}$$

再由归纳法, 即可证得(1.3.3). □

§ 1.4 Young 不等式

在§1.2中, 我们从基础关系式($a, b > 0$, $a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b$, $\alpha \in [0, 1]$)推出了许多重要的不等式. Young 把基础关系式作了更为一般化的推广.

定理 1.4.1 设 $f(x)$ 为 $[0, c]$ 上严格递增的连续函数, $F(y)$ 为 $f(x)$ 的逆函数, $f(0)=0$, $a \in (0, c)$, $b \in (0, f(c))$, 则

$$ab \leq \int_0^a f(x) dx + \int_0^b F(x) dx. \quad (1.4.1)$$

证 设 $g(x) = xb - \int_0^x f(t) dt$, 则 $g'(x) = b - f(x)$. 因 $f(x)$ 为严格递增的连续函数, 所以有: 当 $0 < x < F(b)$ 时 $g'(x) > 0$; 当 $x = F(b)$ 时 $g'(x) = 0$; 当 $x > F(b)$ 时 $g'(x) < 0$. 因此 $x = F(b)$ 为 $g(x)$ 的极大值, 于是得

$$g(a) \leq \max_{0 < x < a} g(x) = g(F(b)).$$

由分部积分, 得

$$\begin{aligned}
 g(F(b)) &= bF(b) - \int_0^{F(b)} f(x)dx \\
 &= \int_0^{F(b)} xdf(x) = \int_0^b F(y)dy, \quad (1.4.2)
 \end{aligned}$$

即有

$$g(a) \leq g(F(b)) = \int_0^b F(y)dy. \quad (1.4.3)$$

(1.4.3)式即为(1.4.1)式. □

从几何图形上亦可以看出 Young 不等式成立, 如图 1-1.

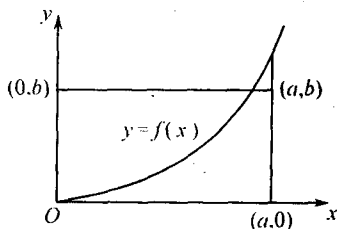


图1-1

例 1 已知 $f(x) = \ln(1+x)$, 则有

$$\begin{aligned}
 ab &\leq \int_0^a \log(1+x) dx + \int_0^b (e^x - 1) dx \\
 &= (1+a)\log(1+a) - a + e^b - 1 - b.
 \end{aligned}$$

例 2 已知 $f(x) = x^{p-1}$. 当 $p > 1$ 时, 有

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right) b^{p'}, \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

这就是第一章的基础关系式, 也就是说, Young 不等式包含了基础关系式, 它是基础关系式的推广. 下面介绍 Young 不等式的推广.

定理 1.4.2 设 $f(x), g(x) \geq 0$ 及 $f'(x), g'(x) \geq 0$, 且 $f'(x), g'(x)$ 在 $[0, b]$ 上连续, $f(0) = 0, 0 < a < b$. 则

$$f(a)g(b) \leq \int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^b f(x)g'(x)dx. \quad (1.4.4)$$

证 由 $d(f(x)g(x)) = f(x)dg(x) + g(x)df(x)$, $f(a) \leq f(x)$, $x \geq a$, 得

$$\begin{aligned} & \int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^b f(x)g'(x)dx \\ &= \int_0^a d(f(x)g(x)) + \int_a^b f(x)g'(x)dx \\ &\geq f(a)g(a) + f(a)[g(b) - g(a)] \\ &= f(a)g(b). \end{aligned} \quad \square$$

定理 1.4.3 (Oppenheim) 令 $a_k \geq 0$ ($k=1, 2, \dots, n$), $f_k(x)$ 为连续非负的严格递增函数, 其中有一个函数 $f_i(0)=0$, 则

$$\prod_{k=1}^n f_k(a_k) \leq \sum_{k=1}^n \int_0^{a_k} \prod_{r \neq k} f_r(x) df_k(x), \quad (1.4.5)$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 时等号成立.

证 令

$$F_k(x) = f_k(x) \quad (0 \leq x \leq a_k),$$

$$F_k(x) = f_k(a_k) \quad (x \geq a_k),$$

因而 $F_k(x) \leq f_k(x)$. 不妨设 $a_n = \max_{1 \leq k \leq n} \{a_k\}$, 则

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n f_k(a_k) &= \prod_{k=1}^n F_k(a_n) = \int_0^{a_n} d \prod_{k=1}^n F_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^{a_k} \prod_{r \neq k} F_r(x) df_k(x) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_0^{a_k} \prod_{r \neq k} f_r(x) df_k(x). \end{aligned} \quad \square$$

§ 1.5 Cauchy-Schwarz 不等式的进一步性质

我们应用 Cauchy-Schwarz 不等式往往不是其等号成立时的情形, 对它作改进是一个重要课题.

下面的定理涉及内积的概念. 内积有两种形式的表达式, 一

种为求和形式, 一种为积分形式:

$$(a, b) = \sum_{k=1}^n a_k b_k; \quad (u, v) = \int u(x)v(x)dx,$$

其中 $a_k, b_k, u(x), v(x)$ 均为正的.

定理 1.5.1 (Beckenbach) 若记

$$[f, g; v] = (f, g)(v, v) - (f, v)(g, v),$$

则有

$$[f, g; v]^2 \leq [f, f; v][g, g; v]. \quad (1.5.1)$$

证 考虑

$$J(u, v) = (u, u)(v, v) - (u, v)^2 \geq 0,$$

代 u 以 $xf + g$, 其中 x 为实数. 由于 $J(u, v) \geq 0$, 可导出不等式:

$$\begin{aligned} & x^2[(f, f)(v, v) - (f, v)^2] + \\ & 2x[(f, g)(v, v) - (f, v)(g, v)] + \\ & [(g, g)(v, v) - (g, v)^2] \geq 0. \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

因而由判别式 $\Delta \leq 0$ 有

$$\begin{aligned} & [(f, f)(v, v) - (f, v)^2][(g, g)(v, v) - (g, v)^2] \\ & \geq [(f, g)(v, v) - (f, v)(g, v)]^2. \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

(1.5.3)式即为(1.5.1)式. $\square$

定理 1.5.2 (Ostrowski) 设 a_k, b_k ($k=1, 2, \dots, n$) 为两组不成比例的实数列. 又设有 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 使

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n b_k x_k = 1. \quad (1.5.4)$$

则

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2} \leq \sum_{k=1}^n x_k^2, \quad (1.5.5)$$

等号当且仅当

$$x_i = \frac{b_i \sum_{k=1}^n a_k^2 - a_i \sum_{k=1}^n a_k b_k}{\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2}$$

时成立.

证 设 $A = \sum_{k=1}^n a_k^2$, $B = \sum_{k=1}^n b_k^2$, $C = \sum_{k=1}^n a_k b_k$ 及 $y_k = \frac{Ab_k - Ca_k}{AB - C^2}$.
直接验算, 可知 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 适合(1.5.4)式. 又已设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 满足(1.5.4)式, 则必有

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k = \frac{A}{AB - C^2}, \quad \sum_{k=1}^n y_k^2 = \frac{A}{AB - C^2}. \quad (1.5.6)$$

所以对任一满足(1.5.4)式的序列 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 必有

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{k=1}^n y_k^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 \geq 0. \quad (1.5.7)$$

由(1.5.6)和(1.5.7)可立刻得出(1.5.5)式的证明. $\square$

定理 1.5.3 (Fan-Todd) 同定理 1.5.2 所设. 已知 $a_i b_k \neq a_k b_i$, $i \neq k$, 则

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2} \leq \binom{n}{2}^{-2} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i \neq k} \frac{a_k}{a_i b_k - a_k b_i} \right)^2. \quad (1.5.8)$$

证 设

$$x_k = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{r \neq k} \frac{a_r}{a_r b_k - a_k b_r},$$

则 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 适合(1.5.4)式. 由定理 1.5.2 即可得(1.5.8)式. $\square$

注意: 若 $a_k = \sin \alpha_k$, $b_k = \cos \alpha_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), J. E. Chassan 根据统计方法得到了(1.5.4).