解析不等式的若干问题

胡克 著

学出版社
全国优秀出版社

解析不等式的若干问题

胡克 著

武汉大学出版社
全国优秀出版社

图书在版编目(CIP)数据

解析不等式的若干问题/胡克著.—武汉：武汉大学出版社，2003.9

ISBN 7-307-03960-5

Ⅰ.解…　Ⅱ.胡…　Ⅲ.不等式—研究　Ⅳ.O178

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 059439 号

责任编辑：顾素萍　　责任校对：刘　欣　　版式设计：支　笛

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)

印刷：湖北省荆州市今印印务有限公司

开本：850×1168　1/32　印张：5　字数：120 千字　插页：2

版次：2003 年 9 月第 1 版　　2003 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 7-307-03960-5/O·280　　定价：8.00 元

作者简介

胡 克

1925年出生，江西奉新人。1952年毕业于南昌大学。随后五年在复旦大学数学系，师从陈建功教授，从事单叶函数论方面的研究工作。1981年在江西师范大学数学系晋升为教授。迄今为止在中外杂志上发表了数学论文80余篇。并著有《基础不等式创建、改进与应用》、《单叶函数的若干问题》等。

胡克教授于1981年发表在“中国科学”（第2期）上的论文“一个不等式及其若干应用”针对Hölder不等式的缺陷提出了一个全新的不等式，被美国数学评论(83m:26019)称之为“一个杰出的非凡的新的不等式”，现称为胡克(HK)不等式。胡克教授对这个不等式及其应用作了系统而深刻的研究。这些成果反映在本专著中。

前　言

本书源于作者在给数学专业高年级本科生和研究生开设的选修课中，为引发听者对数学研究的兴趣，而讲授的一系列不等式的创建和应用问题. 在数学研究中大家要注意如下十个要点：从无到有，从易到难，由小到大，由浅入深，删繁就简，去粗取精，异中求同，同中察异，美满中察不足，不足中求美满. 本书正是这十大要点的体现.

本书大部分内容为作者的科研成果. 共分五章，扼要介绍如下：

第一章介绍基础关系式和 Hölder 不等式的发展中有关的经典不等式.

第二章建立了两个新的不等式，以弥补应用 Hölder 不等式之不足，并使得许多重要的不等式得以改进.

第三章阐述了某些重要不等式的性质，解决了长达 30 年之久的 Opial-华罗庚积分不等式问题.

第四章是各种 Hilbert 类型不等式的改进和推广，显示了第二章所建的两个不等式的作用.

第五章介绍了凸函数的经典结果及近年来有关的新成果.

本书中很少部分提到的有关复变函数的一些结果与定理，若读者不熟悉的话，可以视其为给定的条件来对待，这不会影响本书的阅读.

由于作者水平所限，错误在所难免，希望读者指正.

作　者

2003 年 6 月

目　录

第一章　基础不等式和相关不等式

我们知道，Cauchy-Schwarz 不等式、Hölder 不等式在数学基础理论和应用上起着非常重大的作用，而且 Hölder 不等式是 Cauchy-Schwarz 不等式的推广. 这些不等式源于一个简单的所谓基础关系式：

$$x^{\alpha}y^{1-\alpha}\leqslant \alpha x+(1-\alpha)y,\quad x,y\geqslant 0,\ \alpha\in[0,1]. \tag{$*$}$$

本章我们首先介绍这些经典不等式以及它们的推广和应用，目的在于观察它们的发展、壮大、精妙和美中不足.

§1.1　Cauchy-Schwarz 不等式

下面给出 Cauchy-Schwarz 不等式的三个证明.

定理 1.1.1 (Cauchy-Schwarz 不等式)　设 a_k,b_k $(k=1,2,\cdots,n)$为实数列，则

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\Big)^2\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\Big), \tag{1.1.1}$$

当且仅当 $a_k=tb_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$时等号成立.

证 1　设 A_k,B_k 为正实数. 由$(A_k-B_k)^2\geqslant 0$，可知

$$A_kB_k\leqslant\frac{1}{2}(A_k^2+B_k^2). \tag{1.1.2}$$

在(1.1.2)中，对 k 求和，得

$$\sum_{k=0}^{n}A_kB_k\leqslant\frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^{n}A_k^2+\sum_{k=0}^{n}B_k^2\Big). \tag{1.1.3}$$

取 $A_k = a_k \Big/ \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $B_k = b_k \Big/ \left(\sum\limits_{k=0}^{n} b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, 代入(1.1.3)式即得(1.1.1).

证 2 (1.1.1)式也可直接由 Lagrange 恒等式

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k^2 \right) - \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_k \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{r,k=0}^{n} (a_r b_k - a_k b_r)^2 \geqslant 0 \tag{1.1.4}$$

得出.

证 3 设 x 为实数. 因

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 = x^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \geqslant 0,$$

所以

$$\Delta = \left(2 \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right) \leqslant 0.$$

因此(1.1.1)式成立.

若 $a_k = t b_k$, $k = 1, 2, \cdots, n$, 从(1.1.4)式中很容易看出等号成立. □

§1.2 基础关系式和 Hölder 不等式

上节, 我们从简单的 $AB \leqslant \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$ 关系式推出了 Cauchy-Schwarz 不等式. 我们能否将此式作更进一步的推广呢?

定理 1.2.1 (基础关系式) 设 $A, B \geqslant 0$, 则

$$A^\alpha B^{1-\alpha} \leqslant \alpha A + (1-\alpha) B, \quad \alpha \in [0,1]. \tag{1.2.1}$$

证 若 A, B 中有一个为 0, 则(1.2.1)式显然成立. 设 A, B 均不为零. 将(1.2.1)式两边同除以 B, 得

$$\left(\frac{A}{B} \right)^\alpha \leqslant \alpha \left(\frac{A}{B} \right) + (1-\alpha).$$

令$\dfrac{A}{B}=x$，则上式变为

$$x^{\alpha}\leqslant \alpha x+(1-\alpha). \tag{1.2.2}$$

所以我们只需证明(1.2.2)式成立就可以了.

记 $f(x)=\alpha x+(1-\alpha)-x^{\alpha}$. 则

$$f'(x)=\alpha-\alpha x^{\alpha-1}.$$

因此，当 $x>1$ 时 $f'(x)>0$，当 $0<x\leqslant 1$ 时 $f'(x)<0$；$f'(1)=0$. 所以 $f(1)$为极小值，且 $f(1)=0$. 因此(1.2.2)式成立，从而(1.2.1)式成立. □

定理 1.2.2（Hölder 不等式） 设 $a_k,b_k\geqslant 0$ $(k=1,2,\cdots,n)$，$p,q\geqslant 1$ 以及$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，则

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k^q\Big)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.2.3}$$

其中等号当且仅当 $a_k^p=tb_k^q$ $(k=1,2,\cdots,n)$时成立.

其积分形式为

$$\int f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.2.4}$$

其中 $f(x),g(x)\geqslant 0$.

证 在(1.2.1)式中取 $\alpha=\dfrac{1}{p}$，$A=A_k^p$，$B=B_k^q$，则(1.2.1)式变为

$$A_kB_k\leqslant\frac{1}{p}A_k^p+\frac{1}{q}B_k^q. \tag{1.2.5}$$

将上式两边对 k 求和，便得

$$\sum_{k=1}^{n}A_kB_k\leqslant\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}A_k^p+\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n}B_k^q. \tag{1.2.6}$$

令 $A_k=a_k\Big/\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}$，$B_k=b_k\Big/\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^q\Big)^{\frac{1}{q}}$，代入上式即知(1.2.3)式成立. □

§1.3 算术平均、几何平均不等式及 Hölder 不等式的推广

本节介绍算术平均、几何平均不等式以及 Hölder 不等式的推广.

定理 1.3.1 设 $A_k \geqslant 0$, $t_k > 0$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 及 $\sum_{k=1}^{n} t_k = T_n$, 则

$$\left(\prod_{k=1}^{n} A_k^{t_k}\right)^{\frac{1}{T_n}} \leqslant \frac{1}{T_n}\sum_{k=1}^{n} t_k A_k. \tag{1.3.1}$$

证 由定理 1.2.1, 得

$$\begin{aligned}\left(\prod_{k=1}^{n} A_k^{t_k}\right)^{\frac{1}{T_n}} &= \left[\left(\prod_{k=1}^{n-1} A_k^{t_k}\right)^{\frac{1}{T_{n-1}}}\right]^{\frac{T_{n-1}}{T_n}} \cdot A_n^{t_n/T_n} \\ &\leqslant \frac{T_{n-1}}{T_n}\left(\prod_{k=1}^{n-1} A_k^{t_k}\right)^{\frac{1}{T_{n-1}}} + \frac{t_n}{T_n}A_n.\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

再由归纳法即证得定理. □

定理 1.3.2 (i) 设 $A_k^{(i)} \geqslant 0$ $(k=1,2,\cdots,m)$ 及 $\alpha_i \geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, 则

$$\sum_{i=1}^{m}\prod_{k=1}^{n} A_k^{(i)} \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}(A_k^{(i)})^{1/\alpha_k}\right)^{\alpha_k}. \tag{1.3.3}$$

(ii) 设 $f_i(x) \geqslant 0$, 则

$$\int \prod_{i=1}^{n} f_i(x)\mathrm{d}x \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\int f_i(x)^{1/\alpha_i}\mathrm{d}x\right)^{\alpha_i}. \tag{1.3.4}$$

证 只要证明(1.3.3)式就可以了. 令 $T_n = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i$. 由 Hölder

不等式，可得

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}A_k^{(i)} &= \sum_{i=1}^{m}\left(\prod_{k=1}^{n-1}A_k^{(i)}\cdot A_n^{(i)}\right)\\
&\leqslant\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\prod_{k=1}^{n-1}A_k^{(i)}\right)^{\frac{T_n}{T_{n-1}}}\right]^{\frac{T_{n-1}}{T_n}}\left[\sum_{i=1}^{m}(A_n^{(i)})^{1/\alpha_n}\right]^{\alpha_n}\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{m}\left(\prod_{k=1}^{n-2}A_k^{(i)}\right)^{\frac{T_n}{T_{n-2}}}\left[\sum_{i=1}^{m}(A_{n-1}^{(i)})^{1/\alpha_{n-1}}\right]^{\alpha_{n-1}}\cdot\\
&\quad\left[\sum_{i=1}^{m}(A_n^{(i)})^{1/\alpha_n}\right]^{\alpha_n}\\
&\leqslant\cdots.
\end{aligned}$$

再由归纳法，即可证得(1.3.3).　□

§1.4　Young 不等式

在§1.2 中，我们从基础关系式($a,b>0$，$a^{\alpha}b^{1-\alpha}\leqslant\alpha a+(1-\alpha)b$，$\alpha\in[0,1]$)推出了许多重要的不等式. Young 把基础关系式作了更为一般化的推广.

定理 1.4.1　设 $f(x)$为$[0,c]$上严格递增的连续函数，$F(y)$为 $f(x)$的逆函数，$f(0)=0$，$a\in(0,c)$，$b\in(0,f(c))$，则

$$ab\leqslant\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b F(x)\mathrm{d}x. \tag{1.4.1}$$

证　设 $g(x)=xb-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $g'(x)=b-f(x)$. 因 $f(x)$为严格递增的连续函数，所以有：当$0<x<F(b)$时 $g'(x)>0$；当 $x=F(b)$时 $g'(x)=0$；当 $x>F(b)$时 $g'(x)<0$. 因此 $x=F(b)$为 $g(x)$的极大值，于是得

$$g(a)\leqslant\max_{0<x<a}g(x)=g(F(b)).$$

由分部积分，得

$$g(F(b)) = bF(b) - \int_0^{F(b)} f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{F(b)} x\mathrm{d}f(x) = \int_0^b F(y)\mathrm{d}y, \qquad (1.4.2)$$

即有

$$g(a) \leqslant g(F(b)) = \int_0^b F(y)\mathrm{d}y. \qquad (1.4.3)$$

(1.4.3)式即为(1.4.1)式. □

从几何图形上亦可以看出 Young 不等式成立，如图 1-1.

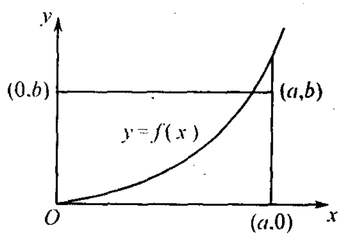

图1-1

例 1 已知 $f(x)=\ln(1+x)$，则有

$$ab \leqslant \int_0^a \log(1+x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b (\mathrm{e}^x - 1)\mathrm{d}x$$
$$=(1+a)\log(1+a) - a + \mathrm{e}^b - 1 - b.$$

例 2 已知 $f(x)=x^{p-1}$. 当 $p>1$ 时，有

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \left(1-\frac{1}{p}\right)b^{p'}, \quad p'=\frac{p}{p-1}.$$

这就是第一章的基础关系式，也就是说，Young 不等式包含了基础关系式，它是基础关系式的推广. 下面介绍 Young 不等式的推广.

定理 1.4.2 设 $f(x), g(x) \geqslant 0$ 及 $f'(x), g'(x) \geqslant 0$，且 $f'(x), g'(x)$在$[0,b]$上连续，$f(0)=0$，$0<a<b$. 则

$$f(a)g(b) \leqslant \int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x. \quad (1.4.4)$$

证　由 $d(f(x)g(x))=f(x)dg(x)+g(x)df(x)$，$f(a)\leqslant f(x)$，$x\geqslant a$，得

$$\begin{aligned}&\int_0^a g(x)f'(x)dx+\int_0^b f(x)g'(x)dx\\&=\int_0^a d(f(x)g(x))+\int_a^b f(x)g'(x)dx\\&\geqslant f(a)g(a)+f(a)[g(b)-g(a)]\\&=f(a)g(b).\end{aligned}$$

□

定理 1.4.3 (Oppenhein)　令 $a_k\geqslant 0$ $(k=1,2,\cdots,n)$，$f_k(x)$ 为连续非负的严格递增函数，其中有一个函数 $f_i(0)=0$，则

$$\prod_{k=1}^n f_k(a_k)\leqslant\sum_{k=1}^n\int_0^{a_k}\prod_{r\neq k}f_r(x)df_k(x),\tag{1.4.5}$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.

证　令

$$F_k(x)=f_k(x)\quad(0\leqslant x\leqslant a_k),$$
$$F_k(x)=f_k(a_k)\quad(x\geqslant a_k),$$

因而 $F_k(x)\leqslant f_k(x)$. 不妨设 $a_n=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}$，则

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^n f_k(a_k)&=\prod_{k=1}^n F_k(a_n)=\int_0^{a_n}d\prod_{k=1}^n F_k(x)\\&=\sum_{k=1}^n\int_0^{a_k}\prod_{r\neq k}F_r(x)df_k(x)\\&\leqslant\sum_{k=1}^n\int_0^{a_k}\prod_{r\neq k}f_r(x)df_k(x).\end{aligned}$$

□

§1.5　Cauchy-Schwarz 不等式的进一步性质

我们应用 Cauchy-Schwarz 不等式往往不是其等号成立时的情形，对它作改进是一个重要课题.

下面的定理涉及内积的概念. 内积有两种形式的表达式，一

种为求和形式，一种为积分形式：

$$(a,b)=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k;\quad (u,v)=\int u(x)v(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $a_k,b_k,u(x),v(x)$ 均为正的.

定理 1.5.1 (Beckenbach) 若记

$$[f,g;v]=(f,g)(v,v)-(f,v)(g,v),$$

则有

$$[f,g;v]^2\leqslant[f,f;v][g,g;v]. \tag{1.5.1}$$

证 考虑

$$J(u,v)=(u,u)(v,v)-(u,v)^2\geqslant 0,$$

代 u 以 $xf+g$，其中 x 为实数. 由于 $J(u,v)\geqslant 0$，可导出不等式：

$$\begin{aligned}&x^2[(f,f)(v,v)-(f,v)^2]+\\&\quad 2x[(f,g)(v,v)-(f,v)(g,v)]+\\&\quad [(g,g)(v,v)-(g,v)^2]\geqslant 0.\end{aligned} \tag{1.5.2}$$

因而由判别式 $\Delta\leqslant 0$ 有

$$\begin{aligned}&[(f,f)(v,v)-(f,v)^2][(g,g)(v,v)-(g,v)^2]\\&\quad\geqslant[(f,g)(v,v)-(f,v)(g,v)]^2.\end{aligned} \tag{1.5.3}$$

(1.5.3)式即为(1.5.1)式. □

定理 1.5.2 (Ostrowski) 设 $a_k,b_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ 为两组不成比例的实数列. 又设有 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使

$$\sum_{k=1}^{n}a_kx_k=0,\quad \sum_{k=1}^{n}b_kx_k=1. \tag{1.5.4}$$

则

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}x_k^2, \tag{1.5.5}$$

等号当且仅当

$$x_i = \frac{b_i \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - a_i \sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2}$$

时成立.

证　设 $A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, B = \sum_{k=1}^{n} b_k^2, C = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ 及 $y_k = \dfrac{Ab_k - Ca_k}{AB - C^2}$. 直接验算，可知 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 适合(1.5.4)式. 又已设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足(1.5.4)式，则必有

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \frac{A}{AB - C^2}, \quad \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \frac{A}{AB - C^2}. \qquad (1.5.6)$$

所以对任一满足(1.5.4)式的序列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 必有

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \geqslant 0. \qquad (1.5.7)$$

由(1.5.6)和(1.5.7)可立刻得出(1.5.5)式的证明. □

定理 1.5.3 (Fan-Todd)　同定理 1.5.2 所设. 已知 $a_i b_k \neq a_k b_i$，$i \neq k$，则

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2} \leqslant \binom{n}{2}^{-2} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i \neq k} \frac{a_k}{a_i b_k - a_k b_i}\right)^2. \qquad (1.5.8)$$

证　设

$$x_k = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{r \neq k} \frac{a_r}{a_r b_k - a_k b_r},$$

则 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 适合(1.5.4)式. 由定理 1.5.2 即可得(1.5.8)式. □

注意：若 $a_k = \sin \alpha_k$，$b_k = \cos \alpha_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$，J. E. Chassan 根据统计方法得到了(1.5.4).